

Vorhersage der Transmission akustischer Moden durch Statorstufen in Turbomaschinen: Weiterentwicklung und Kalibration eines analytischen Modells anhand von Messdaten

Lukas Klähn, Maximilian Behn, Ulf Tapken

DLR, Institut für Antriebstechnik, Abteilung Triebwerksakustik, 10623 Berlin, Deutschland

Email: maximilian.behn@dlr.de

Einleitung

Bei Flugzeugen ist das Triebwerk die dominante Lärmquelle, insbesondere beim Start. Hierbei spielt die Schallausbreitung im Triebwerk eine wichtige Rolle. Beim Schalldurchgang der akustischen Moden durch Statorschaufelreihen tritt Modenstreuung auf. Zum einen in je eine transmittierte und reflektierte Mode derselben Modenordnung, zum anderen kann auch Streuung in andere Modenordnungen auftreten. Für die analytische Modellierung der Schalltransmission durch eine Schaufelreihe wird das System häufig in ein zweidimensionales Randwertproblem überführt. Die Statorschaufeln werden als infinitesimal dünne Platten in einer unendlichen Kaskade modelliert, dies ist in Abbildung 1 veranschaulicht.

Die Randbedingung ist, dass die zu den Platten normale Komponente der Schallschnelle verschwindet. Diese Randbedingung wird etwa von Kaji und Okazaki[7] durch eine Verteilung von Dipolen entlang der Platten erfüllt. Im Modell von Smith[9], welches in dieser Arbeit betrachtet wird, werden hingegen Wirbelquellen verwendet. Behn et al.[1] zeigten, dass das Modell von Smith gute Übereinstimmungen mit numerischen Ergebnissen sowie mit dem Modell von Bouley et al.[4] aufweist, bei dem die Schalltransmission durch *Mode Matching* an der Vorder- und Hinterkante der Kaskade ermittelt wird.

Ob der Schalldurchgang durch eine Statorschaufelreihe mit einem 2D-Kaskadenmodell hinreichend beschrieben werden kann, wird durch Vergleich mit Messdaten ohne Strömung untersucht ($M = 0$). In diesem Fall kann in Messungen eine umfangreiche Parametervariation realisiert werden und somit existiert eine breite Datenbasis [3]. Das Smith-Modell wird allerdings für kleine Machzahlen instabil und ist im Fall ohne Strömung nicht definiert. Zur Behebung dieses Problems wird eine Kalibrierung eingeführt. Im Folgenden wird das Modell sowie das Kalibrationsverfahren vorgestellt. Anschließend wird die Eignung des kalibrierten Modells in Gegenüberstellung mit den Messdaten diskutiert.

Das Kaskadenmodell von Smith

Das 2D-Kaskadenmodell wurde von Smith[9] formuliert und wurde von Puttkammer[8] und Behn et al.[1][3] weiterentwickelt und implementiert. Nach der Überführung in das zweidimensionale Koordinatensystem entsprechen die Moden ebenen Wellen. Entlang der Platten wird eine endliche Anzahl an Wirbelquellen angenommen, die durch die einfallende Schallwelle eine *Upwash Velocity*

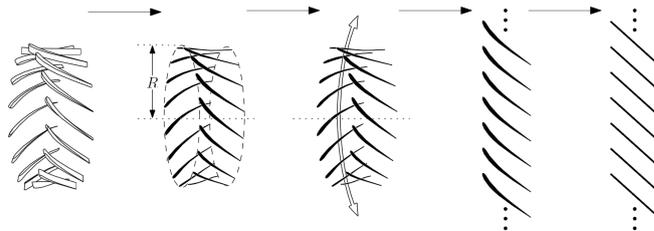


Abbildung 1: Modellierung einer Statorstufe als unendliche 2D-Kaskade aus infinitesimal dünnen Platten[6]

induzieren. Die Wirbel werden in Betrag und Phase angepasst, so dass die induzierte *Upwash Velocity* die zu den Platten normale Komponente der Schallschnelle auslöscht. Dies führt zur *Upwash Integral Equation* (UIE), die in diskretisierter Form als lineares Gleichungssystem

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}\boldsymbol{\gamma} \quad (1)$$

dargestellt werden kann. Hier bezeichnet \mathbf{u} die *Upwash Velocity*, \mathbf{K} die Kernelmatrix und $\boldsymbol{\gamma}$ die Wirbelstärken. Die Herleitung von Gleichung (1) ist in [9] und [8] beschrieben. Nachdem die Wirbelstärken bestimmt wurden, werden nun mit der Transfermatrix \mathbf{V} die von den Wirbelstärken induzierten Schallmoden berechnet:

$$\mathbf{a}_{Smith} = \begin{pmatrix} A_{mn,Smith}^+ \\ A_{mn,Smith}^- \end{pmatrix} = \mathbf{V}\boldsymbol{\gamma}. \quad (2)$$

Die transmittierten und reflektierten Modenamplituden ergeben sich durch Überlagerung der induzierten und der einfallenden Schallwellen:

$$\begin{pmatrix} A_{mn,trans}^+ \\ A_{mn,refl}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{mn,ein}^+ \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{mn,Smith}^+ \\ A_{mn,Smith}^- \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Die Koordinatentransformation von der dreidimensionalen Statorschaufelreihe in das 2D-Kaskadenmodell, wird am *Caustic Radius* durchgeführt. Am *Caustic Radius* stimmen die axiale und azimutale Komponente der Wellenzahl mit der 2D-Wellenzahl überein. Diese Methode erlaubt eine schnelle und stabile Schätzung der Modenamplituden [1].

Die Einträge der Kernelmatrix werden mit der Kernelfunktion berechnet. Die Kernelfunktion wird in der Nähe der Wirbelquellen singular. Smith leitet eine Funktion

zum Ausgleich der Singularität her, die von der Kernelmatrix abgezogen wird:

$$\widetilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K} - \mathbf{f}_{Smith} \circ \mathbf{L}, \quad (4)$$

mit \circ dem Hadamard Produkt. Die Funktion zum Ausgleich der Singularität wird aufgeteilt in einen logarithmischen Term \mathbf{L} und in die Singularitätsfunktion \mathbf{f}_{Smith} , welche Smith als endliche Potenzreihe annähert:

$$f_{Smith}(z) = \frac{kc}{2\pi M \sqrt{1-M^2}} \sum_{i=0}^3 d_i \left(\frac{kc}{M}\right)^i z^i, \quad (5)$$

mit k der Freifeldwellenzahl, c der Schallgeschwindigkeit, M der Machzahl und z der normierten Plattenkoordinate. Die Koeffizienten d_i sind nur von der Machzahl M abhängig. Die Singularitätsfunktion (5) divergiert für $M \rightarrow 0$, daher liefert das Smith-Modell im Grenzfall $M = 0$ kein Ergebnis. Die Singularitätsfunktion von Smith ist in Abbildung 2 dargestellt.

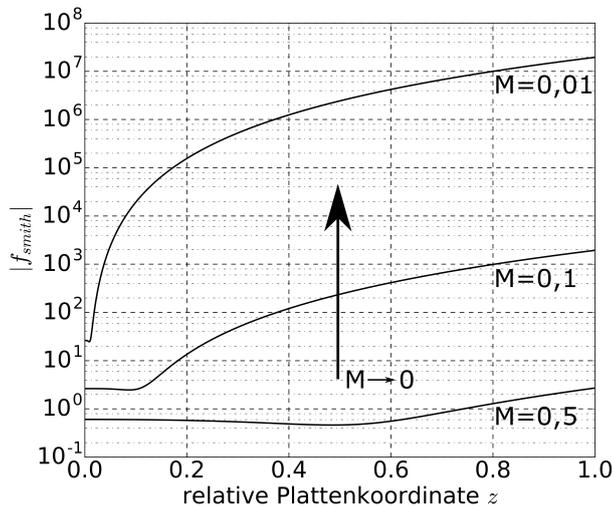


Abbildung 2: Die Singularitätsfunktion von Smith bei 2 kHz für die Machzahlen 0,5; 0,1 und 0,01

Kalibration des Modells von Smith

In einer experimentellen Studie wurde die Transmission und Reflexion akustischer Moden durch verschiedene Statorstufen aus ebenen Platten und auch komplexen Schauflergeometrien untersucht [3]. Die Ergebnisse der Plattenkonfigurationen wurden für die Kalibration genutzt. Da die Singularitätsfunktion (5) für kleine Machzahlen divergiert, schlagen Behn et al.[3] vor, eine neue Singularitätsfunktion zu bestimmen. Diese wird ebenfalls als Potenzreihe formuliert:

$$f_{kalib}(z) = \sum_{i=0}^3 \beta_i z^i, \quad (6)$$

wobei β_i die komplexen Koeffizienten sind, die es zu bestimmen gilt. Die korrigierte Kernelmatrix ist dann:

$$\widehat{\mathbf{K}}(\beta) = \mathbf{K} - \mathbf{f}_{kalib}(\beta) \circ \mathbf{L}. \quad (7)$$

Die β -Koeffizienten werden bestimmt, indem die L2 Norm aus der Differenz der gemessenen und der berechneten Modenamplituden minimiert wird. Es wird die Kostenfunktion definiert als:

$$J := \left\| \mathbf{a}_{Mess} - \left[\mathbf{a}_{Smith} + \begin{pmatrix} A_{mn, ein}^+ \\ 0 \end{pmatrix} \right] \right\|_2^2, \quad (8)$$

mit:

$$\mathbf{a}_{Smith} = \mathbf{V} \left[\widehat{\mathbf{K}}(\beta) \right]^{-1} \mathbf{u}. \quad (9)$$

Um die Kostenfunktion (8) zu minimieren wird der Gradient $\nabla_{\beta} J$ benötigt. Die Einträge sind partielle Ableitungen nach den β -Koeffizienten. Da die β -Koeffizienten komplexwertig sind, wird, als Ergänzung zum vorherigen Ansatz in [3], der Gradient in Real- und Imaginärteil aufgeteilt:

$$\frac{\partial J}{\partial \beta_i} = \frac{\partial J}{\partial \Re(\beta_i)} + j \frac{\partial J}{\partial \Im(\beta_i)}, \quad (10)$$

mit:

$$\frac{\partial J}{\partial \Re(\beta_i)} = \left\langle \Re(-2\tilde{\mathbf{J}}), \Re\left(\mathbf{V} \frac{\partial \widehat{\mathbf{K}}^{-1}}{\partial \beta_i} \mathbf{u}\right) \right\rangle, \quad (11)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \Im(\beta_i)} = \left\langle \Im(-2\tilde{\mathbf{J}}), \Im\left(\mathbf{V} \frac{\partial \widehat{\mathbf{K}}^{-1}}{\partial \beta_i} \mathbf{u}\right) \right\rangle, \quad (12)$$

$$\tilde{\mathbf{J}} = \mathbf{a}_{Mess} - \left[\mathbf{V} \widehat{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{u} + \begin{pmatrix} A_{mn, ein}^+ \\ 0 \end{pmatrix} \right], \quad (13)$$

$$\frac{\partial \widehat{\mathbf{K}}^{-1}}{\partial \beta_i} = -\widehat{\mathbf{K}}^{-1} \frac{\partial \widehat{\mathbf{K}}}{\partial \beta_i} \widehat{\mathbf{K}}^{-1}. \quad (14)$$

Hier bezeichnet $\langle [\cdot], [\cdot] \rangle$ das Skalarprodukt und \Re und \Im den Real- und Imaginärteil.

Die Kostenfunktion wird numerisch mit dem CG-Verfahren (Conjugate Gradient) minimiert. Wenn die berechneten β -Koeffizienten die Kostenfunktion hinreichend minimieren, werden sie in einer *Lookup-Table* gespeichert.

Die Kalibration muss für jede Frequenz und jede Modenordnung einzeln durchgeführt werden. Die vermessenen Plattenkonfigurationen variieren bezüglich der Plattenanzahl, der Plattenlänge, und dem Anstellwinkel der Platten. Es ergibt sich somit eine *Lookup Table* für die β -Koeffizienten mit fünf Dimensionen.

Die vorhandene Implementierung des Smith-Modells wurde so erweitert, dass im Fall ohne Strömung die β -Koeffizienten mit einem *Nearest-Neighbour*-Interpolator aufgerufen werden und die Singularitätsfunktion (5) ersetzen. Dadurch können vom Modell auch Konfigurationen berechnet werden, für die keine Kalibrationsrechnung durchgeführt wurde. Weichen die Parameter der aufgerufenen β -Koeffizienten zu stark von der zu analysierenden Konfiguration ab, kann das kalibrierte Modell instabil werden. Die Grenzen, in denen das *Nearest Neighbour* Verfahren zu stabilen Ergebnissen führt, sind noch zu bestimmen.

Ergebnisse

Die Messungen, die für die Kalibration genutzt wurden, wurden in einem Kanal mit einem Nebenverhältnis von $\eta = 0.66$ durchgeführt. Das Messverfahren und die Signalverarbeitung der Experimente führen im betrachteten Frequenzbereich zwischen 500 Hz und 3500 Hz zu einer hohen Genauigkeit, wie Behn et al. zeigen [2][3].

Um einen repräsentativen Eindruck zu vermitteln, werden beispielhaft erfolgreiche sowie weniger erfolgreiche Vorhersagen des Modells gezeigt. Zunächst wird der Schalldurchgang durch eine Plattenkaskade aus 30 Platten mit einem Anstellwinkel von 45° untersucht. Diese Konfiguration wurde, neben anderen, für die Kalibrationsrechnung verwendet. Dieser Fall ist interessant, da hier die Messergebnisse symmetrisch bezüglich der Mode $m = 0$ sind, während in 2D-Kaskadenmodellen eine solche Symmetrie nur bei Platten mit einem Anstellwinkel von 0° auftritt [3]. Im Folgenden werden nur Moden mit der radialen Modenordnung $n = 0$ betrachtet. In Abbildung 3 sind die Transmissions- und Reflexionsgrade aller ausbreitungsfähigen Moden bei 1900 Hz dargestellt, die Messdaten sind über Frequenzbänder von 20 Hz gemittelt.

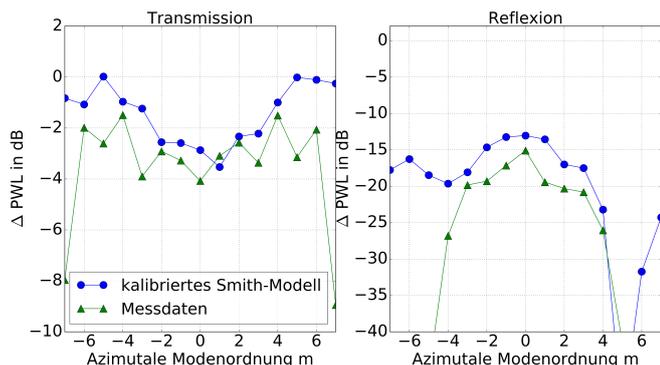


Abbildung 3: Transmission und Reflexion an einer Stator-kaskade aus 30 ebenen Platten mit 45° Anstellwinkel bei 1900 Hz

Die Mode $m = 5$ hat bei 1900 Hz einen Ausbreitungswinkel von 44° und breitet sich somit nahezu parallel zur Platte aus. Dies führt nach Hanson [5] bei 2D-Kaskadenmodellen zu totaler Transmission ohne Reflexion. Diese sogenannte *Venetian-Blind*-Bedingung findet sich auch in den Ergebnissen des kalibrierten Modells, da infinitesimal dünne Platten angenommen werden, jedoch nicht in den Messergebnissen [3]. Die Modenamplituden der Moden $m = \{-4, \dots, 4\}$ werden gut vom Modell reproduziert.

In den Abbildungen 4 und 5 sind die Transmissions- und Reflexionsgrade der Moden $m = -3$ bzw. $m = +3$ in Abhängigkeit der Frequenz dargestellt, die Messdaten sind über Frequenzbänder von 5 Hz gemittelt. Die Messergebnisse der Mode $m = -3$ werden im gesamten Frequenzbereich gut reproduziert. Dies trifft im Fall der mode $m = +3$ nur auf schmale Frequenzbänder zu. In einigen Frequenzintervallen treten sogar sehr große Abweichungen auf. Der generelle Verlauf wird dennoch gut geschätzt.

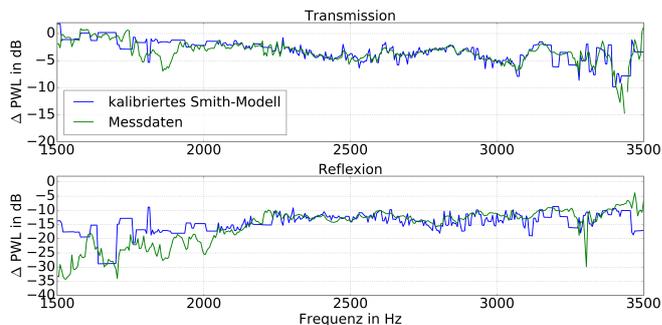


Abbildung 4: Transmission und Reflexion der Mode $m = -3$ an einer Stator-kaskade aus 30 ebenen Platten mit 45° Anstellwinkel

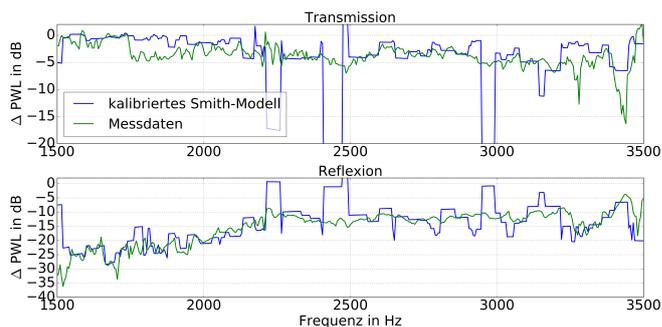


Abbildung 5: Transmission und Reflexion der Mode $m = +3$ an einer Stator-kaskade aus 30 ebenen Platten mit 45° Anstellwinkel

Um eine gekrümmte Schaufel als Platte zu modellieren wird die Sehnenlänge und der mittlere Anstellwinkel der Schaufeln benutzt [3]. Für die hier betrachteten Schaufeln ergibt sich eine Länge von 51 mm und ein Anstellwinkel von ca. $13,5^\circ$. Die Stator-kaskade besteht aus 30 Schaufeln. Diese Konfiguration wurde nicht für die Kalibrationsrechnung verwendet, daher werden größere Abweichungen erwartet als im vorigen Fall. In Abbildung 6

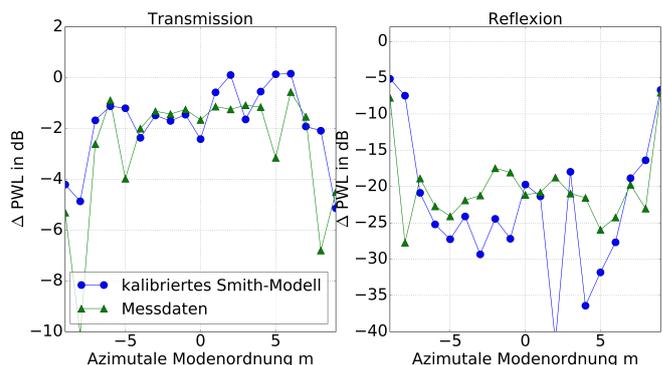


Abbildung 6: Transmission und Reflexion an einer Stator-kaskade aus 30 gekrümmten Schaufeln bei 2500 Hz

ist beispielhaft zu sehen, dass mit dem kalibrierten Modell, auch für komplexere Schaufelgeometrien, die Transmission und Reflexion der meisten Moden gut vorhergesagt werden kann. Die Mode $m = 2$ hat bei 2500 Hz einen Ausbreitungswinkel von 12° und ist somit nah an der *Venetian-Blind*-Bedingung, daher ergeben sich starke Abweichungen. Auch für die Moden $m > 3$ ergeben

sich größere Abweichungen. Diese Moden treffen auf die konvex gekrümmte Rückseite der Schaufeln.

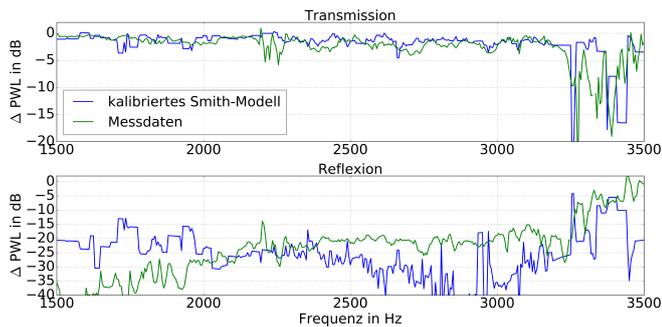


Abbildung 7: Transmission und Reflexion der Mode $m = -3$ an einer Statorcascade aus 30 gekrümmten Schaufeln

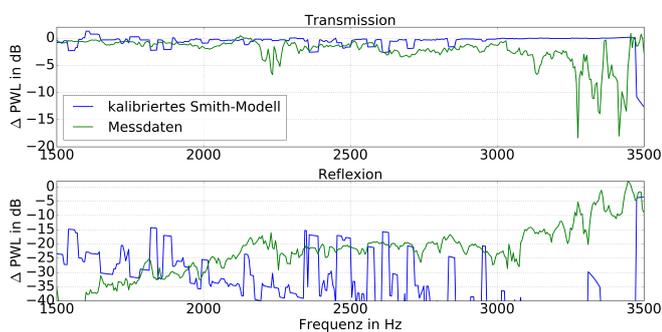


Abbildung 8: Transmission und Reflexion der Mode $m = +3$ an einer Statorcascade aus 30 gekrümmten Schaufeln

In den Abbildungen 7 und 8 sind die Messergebnisse und die Vorhersage vom kalibrierten Modell für die Moden $m = -3$ und $m = +3$ in Abhängigkeit der Frequenz dargestellt. Für die Mode $m = -3$ werden die Transmissionsgrade gut vorhergesagt und die Reflexionsgrade werden, im Vergleich zur Mode $m = +3$, gut geschätzt. Für die Mode $m = +3$ kommt es zu großen Differenzen zwischen den gemessenen und den berechneten Werten.

Fazit und Ausblick

Anhand von Messdaten wird das 2D-Kaskadenmodell von Smith kalibriert. Mit dem kalibrierten Modell kann die Transmission und Reflexion akustischer Moden durch Statorstufen ohne überlagerte Strömung vorhergesagt werden. Dies war mit dem bisherigen Smith-Modell nicht möglich. Die Vorhersage ist erfolgreicher, wenn der Ausbreitungswinkel der Mode dem Anstellwinkel der Statorschaufel entgegengesetzt ist. Wenn der Ausbreitungswinkel der Schallmoden nah beim Anstellwinkel der Platten liegt, kann das kalibrierte Modell instabil werden. Im Grenzfall erfüllt das Modell die *Venetian-Blind*-Bedingung und sagt totale Transmission voraus. Die Kalibration wird nur am *Caustic-Radius* bestimmt. Eine Kalibration an mehreren radialen Positionen würde die Ergebnisse vermutlich weiter verbessern, jedoch den Rechenaufwand auch deutlich erhöhen. Ein Ziel für zukünftige Weiterentwicklungen ist es, die Bestimmung der β -Koeffizienten zu verbessern, um die Instabilitäten zu unterdrücken. Mit dem vorgestellten Verfahren kann das

Modell auch für kleine Machzahlen, für die das Smith-Modell ebenfalls instabil wird, kalibriert werden.

Danksagung

Die hier präsentierte Arbeit wurde im Rahmen des nationalen Projektes LisT (das leise installierte Triebwerk) durchgeführt, welches durch das 5. Luftfahrtforschungsprogramm des BMWi (Bundesministerium für Wirtschaft und Energie) gefördert wird.

Literatur

- [1] Behn, M., U. Tapken, P. Puttkammer, R. Hagmeier und N. Thouault: Comparative study of different analytical approaches for modelling the transmission of sound waves through turbomachinery stators. In: 22nd AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. Lyon, Frankreich, AIAA 2016-2927 (2016)
- [2] Behn, M., R. Kisler und U. Tapken: Efficient Azimuthal Mode Analysis using Compressed Sensing. In: 22nd AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. Lyon, Frankreich, AIAA 2016-3038. (2016)
- [3] Behn, M., L. Klähn und U. Tapken: Comprehensive experimental investigation of mode transmission through stator vane rows: Results and calibration of an analytical prediction model. In: 23rd AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. Denver, Colorado (USA), AIAA 2017-3218. (2017)
- [4] Bouley, S., B. Francois, M. Roger, H. Posson und S. Moreau: On a mode-matching technique for sound generation and transmission in a linear cascade of outlet guide vanes. In: 21st AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. Dallas, Texas (USA), AIAA 2015-2825. (2015)
- [5] Hanson, D. B.: Acoustic Reflection and Transmission of 2-Dimensional Rotors and Stators Including Mode and Frequency Scattering Effects. Research Report NASA/CR-1999-208880. Glenn Research Center: NASA. (1999)
- [6] Jenkins, G.: Models for the prediction of rear-arc and forward-arc fan broadband noise in turbofan engines. Ph.D. Dissertation. Southampton, England: University of Southampton. (2013)
- [7] Kaji, S. und T. Okazaki: Propagation of sound waves through a blade row: II. Analysis based on the acceleration potential method. In: Journal of Sound and Vibration 11.3, S. 355-375. (1970)
- [8] Puttkammer, P.: Theory and Application of an Analytical Approach for the Determination of the Transmission of Sound Waves through a Stator. Master's Thesis. Enschede, Niederlande: University of Twente & Engine Acoustics Dept. DLR (2015)
- [9] Smith, S. N.: Discrete frequency sound generation in axial flow turbomachines. In: Aeronautical Research Council Reports and Memoranda 3709 (1972)