

**CFA '18 LE HAVRE ■ 23-27 avril 2018**  
**14<sup>ème</sup> Congrès Français d'Acoustique**



**Modélisation du comportement acoustique d'éléments de réseau de ventilation**

C. Coguenanff<sup>a</sup>, C. Guigou Carter<sup>a</sup>, S. Bailhache<sup>a</sup> et F. Bessac<sup>b</sup>

<sup>a</sup>CSTB, 24 Rue Joseph Fourier, 38400 Saint Martin D'Hères, France

<sup>b</sup>CETIAT, Domaine Scientifique de la Doua, 25, avenue des Arts, 69603 Villeurbanne Cedex, France  
corentin.coguenanff@cstb.fr

Dans ce travail, un modèle pour évaluer l'atténuation acoustique d'éléments de réseau de ventilation est présenté. La modélisation mise en œuvre utilise une approche 2D pour des raisons de simplicité et de rapidité de calcul. La stratégie de modélisation acoustique est différenciée en fonction des composants à prendre en compte dans le réseau considéré. Un modèle multi-modal est utilisé pour les éléments associés à une propagation guidée des ondes acoustiques, c'est-à-dire pour les éléments de type conduit droit, coude, etc. Les éléments complexes tels que les embranchements, les caissons de distribution, etc..., sont modélisés sur la base de la méthode des éléments finis. Le couplage des modèles est alors effectué pour associer les différents composants. Une fois les champs de pression et de vitesse connus en tout point, il est possible de calculer différentes grandeurs comme le niveau de pression moyen ou le niveau de puissance sur une section. Le terme source représentant l'excitation doit aussi être défini ; on considère pour simplifier une excitation de type onde plane avec éventuellement un coude en entrée pour générer des modes d'ordre plus élevé. Le modèle est détaillé et des résultats sont présentés.

## 1 Introduction

L'objet du projet AcouReVe démarré courant 2015 est de développer une méthodologie qui, partant d'une même description de réseau de ventilation, permettrait de dimensionner dans le même temps acoustique et aéralique. Le projet est axé sur la partie acoustique du problème, mais conçu de façon à définir des briques pouvant être implémentées dans les outils de dimensionnement aéralique de réseaux existants. Le CSTB et le CETIAT sont les partenaires de ce projet co-financé par l'ADEME.

Afin d'améliorer la capacité prédictive des outils de dimensionnement acoustique de réseaux de ventilation, ce travail propose une approche originale pour l'évaluation des performances de sections de ces réseaux. Il s'agit en particulier de déterminer la répartition de la puissance acoustique aux différentes sorties de ces composants. Au regard des débits mis en œuvre dans le bâtiment, le problème se place à faible nombre de Mach. Dans ce qui suit, les phénomènes de convections sont ainsi négligés. De plus, les termes sources d'origine aéro-acoustique sont ignorés à cette échelle composant mais destinés à être pris en compte pour la modélisation du réseau complet. Une comparaison entre résultats numériques et expérimentaux est effectuée dans [1].

Dans ce cadre, un modèle acoustique en deux dimensions de sections de réseau de ventilation est développé. Trois typologies de géométries sont distinguées : des conduites droites (correspondant respectivement à  $\Omega_1$  sur la Figure 1), des coudes (correspondant à  $\Omega_2$ ) et des éléments de complexité géométrique arbitraire (correspondant à  $\Omega_3$ ). Trois stratégies de modélisation distinctes y seront respectivement déployées.

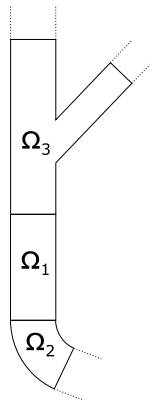


Figure 1: Exemple de section de réseau de ventilation avec distinctions de trois typologies de domaines

## 2 Modèle acoustique

Dans le cadre de l'acoustique linéaire et dans le domaine fréquentiel, la perturbation du champ de pression  $p$  vérifie l'équation d'Helmholtz

$$\Delta p + k^2 p = 0 \quad \text{dans } \Omega_{1,2,3} \quad (1)$$

avec  $k = \omega/c$  le nombre d'onde.

Soit  $\mathbf{v}$  le champ de vitesse particulière, l'équation d'Euler linéarisée donne de plus

$$i\omega \rho \mathbf{v} = -\nabla p \quad \text{dans } \Omega_{1,2,3} \quad (2)$$

Dans ce travail, les frontières latérales des domaines acoustiques sont considérées parfaitement rigides. Sur ces dernières, l'Eq. (2) donne alors

$$\nabla p \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (3)$$

### 2.1 Conduites droites

La position au regard des directions longitudinales et latérales à la conduite est repérée par les variables  $s \in [0, s_1]$  et  $l \in [0, h]$  en accord avec la Figure 2.

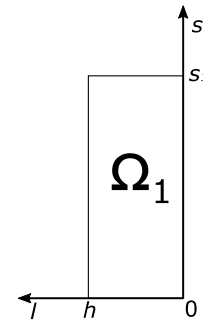


Figure 2: Repère associé au domaine  $\Omega_1$

On cherche alors une approximation du champ de pression dans le domaine  $\Omega_1$  sous la forme suivante

$$\tilde{p}_1(s, l, \omega) = \sum_{n=0}^N S_n^{(1)}(s, \omega) \varphi_n(l) \quad (4)$$

Les fonctions  $\varphi_n$  sont choisies pour vérifier naturellement l'Eq. (3) et sont définies telles que

$$\varphi_n(l) = N_n \cos\left(\frac{n\pi l}{h}\right). \quad (5)$$

Les coefficients  $N_n$  sont choisis pour assurer la relation d'orthonormalité dans la direction latérale

$$\int_0^h N_m \cos\left(\frac{m\pi l}{h}\right) N_n \cos\left(\frac{n\pi l}{h}\right) dl = \delta_{mn}. \quad (6)$$

L'introduction de l'Eq. (4) dans Eq. (1) suivie d'une intégration dans la direction latérale sur une fonction  $\varphi_m$  donne alors pour chaque indice  $m = 0, \dots, N$

$$\frac{\partial^2 S_m^{(1)}}{\partial S^2} + k_m^2 S_m^{(1)} = 0, \quad (7)$$

avec  $k_m^2 = k^2 - \left(\frac{m\pi}{h}\right)^2$ .

Les fonctions  $S_m^{(1)}$  vérifient alors une équation d'Helmholtz à une dimension dans la direction longitudinale et peuvent être construites telles que

$$S_m^{(1)}(s, \omega) = A_m^{(1)} e^{ik_m s} + B_m^{(1)} e^{-ik_m s}. \quad (8)$$

On a donc finalement l'expression suivante du champ de pression dans le domaine  $\Omega_1$  :

$$\tilde{p}_1(s, l, \omega) = \sum_{n=0}^N (A_n^{(1)} e^{ik_n s} + B_n^{(1)} e^{-ik_n s}) \varphi_n(l). \quad (9)$$

## 2.2 Conduites courbes

Dans une conduite courbe correspondant au domaine  $\Omega_2$  sur la Figure 1, l'Eq. (1) exprimée en coordonnées polaires devient

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + k^2 p = 0. \quad (10)$$

Soit un système de coordonnées curvilignes repéré par les variables  $s \in [0, s_2]$  et  $l \in [0, h]$  en accord avec la Figure 3, telles que

$$s = -R_0 \theta, \quad (11)$$

$$l = r - R_0, \quad (12)$$

avec  $R_0$  le rayon de courbure interne de la conduite.

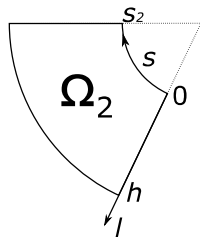


Figure 3: Repère associé au domaine  $\Omega_2$

Dans ce système de coordonnées, l'Eq. (10) devient alors

$$\frac{\partial^2 p}{\partial l^2} + \frac{1}{(R_0 + l)} \frac{\partial p}{\partial l} + \frac{R_0^2}{(R_0 + l)^2} \frac{\partial^2 p}{\partial s^2} + k^2 p = 0. \quad (13)$$

En suivant une démarche comparable à celle présentée dans [2], on cherche une approximation du champ de pression dans le domaine  $\Omega_2$  sous la forme suivante

$$\tilde{p}_2(s, l, \omega) = \sum_{n=0}^N S_n^{(2)}(s, \omega) \varphi_n(l). \quad (14)$$

L'introduction de l'Eq. (14) dans l'Eq. (13) suivie d'une projection dans la direction latérale sur les fonctions  $\varphi_m$  donne un système de  $N$  équations couplées écrit ici sous forme matricielle :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{S}^{(2)}}{\partial S^2} + [\mathbf{M}] \mathbf{S}^{(2)} = 0. \quad (15)$$

Le vecteur  $\mathbf{S}^{(2)}$  regroupe ainsi les  $N$  fonctions  $S_n^{(2)}$ . La matrice  $[\mathbf{M}]$  est de taille  $(N \times N)$ , pleine et à coefficients réels. Ces derniers sont construits tels que

$$M_{mn} = \int_0^h \frac{(R_0 + l)}{R_0^2} \frac{\partial \varphi_n(l)}{\partial l} \varphi_m(l) dl + k_m^2 \int_0^h \frac{(R_0 + l)^2}{R_0^2} \varphi_n(l) \varphi_m(l) dl \quad (16)$$

Il peut être noté que la dépendance en fréquence de la matrice  $[\mathbf{M}]$  réside uniquement dans les nombres d'onde  $k_m^2$ . Les deux intégrales de l'Eq. (16) ne doivent ainsi être évaluées qu'une seule fois. Soit la décomposition aux valeurs propres de la matrice  $[\mathbf{M}]$  telle que

$$[\mathbf{M}] = [\psi][\Lambda][\psi]^{-1}, \quad (17)$$

où la matrice diagonale  $[\Lambda]$  regroupe les valeurs propres distinctes  $\alpha_q^2$  et la matrice  $[\psi]$  regroupe les vecteurs propres associés. Ces derniers forment une base de  $\mathbb{R}^N$  et les fonctions  $S_n^{(2)}$ , éléments du vecteur  $\mathbf{S}^{(2)}$ , peuvent alors être développées tel que

$$S_n^{(2)}(s, \omega) = \sum_{q=0}^N \psi_{nq}(\omega) \gamma_q(s, \omega). \quad (18)$$

L'introduction de l'Eq. (18) dans l'Eq. (15) et la pré-multiplication par  $[\psi]^{-1}$  amène un set d'équations de Helmholtz découplées, soit pour  $q = 0, \dots, N$

$$\frac{\partial^2 \gamma_q}{\partial S^2} + \alpha_q^2 \gamma_q = 0. \quad (19)$$

Les fonctions  $\gamma_q$  solutions peuvent alors être construites sous la forme

$$\gamma_q(s, \omega) = A_q^{(2)} e^{i\alpha_q s} + B_q^{(2)} e^{-i\alpha_q s}. \quad (20)$$

On a donc finalement l'expression suivante du champ de pression dans le domaine  $\Omega_2$  :

$$\tilde{p}_2(s, l, \omega) = \sum_{n=0}^N \sum_{q=0}^N \psi_{nq}(\omega) \gamma_q(s, \omega) \varphi_n(l). \quad (21)$$

## 2.3 Sections complexes

Dans une section complexe du réseau correspondant au domaine  $\Omega_3$  sur la Figure 1, l'Eq. (1) est résolue par la méthode des éléments finis. Pour une fonction test  $\delta p$  suffisamment régulière, la formulation faible associée s'écrit

$$\begin{aligned} -k^2 \int_{\Omega_3} p \overline{\delta p} d\Omega + \int_{\Omega_3} \nabla p \cdot \nabla \overline{\delta p} d\Omega \\ = \int_{\partial\Omega_3} \nabla p \cdot \mathbf{n} \overline{\delta p} dS, \end{aligned} \quad (22)$$

avec  $\mathbf{n}$  la normale sortante sur le contour du domaine  $\Omega_3$ . Sur un maillage du domaine  $\Omega_3$ , on cherche alors une approximation du champ de pression sous la forme suivante

$$\tilde{p}_3(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{j=0}^{Nnode} H_j(\mathbf{x}) P_j(\omega), \quad (23)$$

où les fonctions de la fréquence  $P_j$  sont les valeurs nodales du champ de pression et les fonctions de l'espace  $H_j$  sont les fonctions d'interpolation éléments finis. L'approximation des différents champs de l'Eq. (22) sur la base de l'Eq. (23) amène le problème matriciel suivant

$$(-k^2[M^f] + [K^f]) \mathbf{P} = \int_{\partial\Omega_3} (\nabla p \cdot \mathbf{n}) \mathbf{H} dS, \quad (24)$$

avec les vecteurs  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{H}$  regroupant respectivement les valeurs nodales  $P_j$  du champ de pression et les  $Nnode$  fonctions d'interpolation  $H_j$ .

## 2.4 Problème couplé

A chaque interface on cherche à assurer la continuité des champs de pression et de vitesse normale. Du fait des approximations choisies, une partie de ces relations ne peut être imposée que de manière faible en imposant que l'erreur soit orthogonale à la base d'approximation.

### Interface entre conduite courbe et droite

L'introduction des Eqs. (9) et (22) dans la relation de continuité du champ de pression à l'interface entre les domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  puis la projection dans la direction latérale sur une fonction  $\varphi_m$  donne alors pour chaque indice  $m = 0, \dots, N$

$$S_m^{(1)}(s=0, \omega) - \sum_{n=0}^N \psi_{mn}(\omega) \gamma_n(s=s_2, \omega) = 0. \quad (25)$$

Dans un second temps, la continuité des vitesses normales s'écrit, en utilisant les coordonnées polaires dans le domaine  $\Omega_2$ , telle que

$$\frac{\partial p_1}{\partial s} \Big|_{s=0} - \frac{1}{r} \frac{\partial p_2}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_2} = 0. \quad (26)$$

Dans le système de coordonnées curvilignes défini par les Eqs. (11) et (12), l'Eq. (26) devient alors

$$\frac{\partial p_1}{\partial s} \Big|_{s=0} + \frac{R_0}{(R_0 + l)} \frac{\partial p_2}{\partial s} \Big|_{s=s_2} = 0. \quad (27)$$

L'introduction des Eqs. (9) et (21) dans l'Eq. (27) puis la projection dans la direction latérale sur la fonction  $\varphi_m$  donne alors pour chaque indice  $m = 0, \dots, N$

$$\sum_{n=0}^N D_{mn} \frac{\partial S_n^{(1)}}{\partial s} \Big|_{s=0} + \psi_{mn} \frac{\partial \gamma_n}{\partial s} \Big|_{s=s_2} = 0, \quad (28)$$

où les coefficients  $D_{mn}$  sont construits tels que

$$D_{mn} = \int_0^h \frac{(R_0 + l)}{R_0} \varphi_n(l) \varphi_m(l) dl. \quad (29)$$

### Interface entre conduite droite et composant complexe

L'introduction des Eqs. (9) et (24) dans la relation de continuité du champ de pression à l'interface entre les domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_3$  puis la projection dans la direction latérale sur une fonction  $\varphi_m$  donne alors pour chaque indice  $m = 0, \dots, N$

$$S_m^{(1)}(s=s_1, \omega) - \sum_{j=0}^{Nnode} G_{mj} P_j(\omega) = 0, \quad (30)$$

où les coefficients  $G_{mj}$  sont construits tels que

$$G_{mj} = \int_0^h \varphi_m(l) H_j(l) dl. \quad (31)$$

Finalement, l'introduction de l'Eq. (9) dans l'Eq. (24) donne

$$(-k^2[M^f] + [K^f]) \mathbf{P} = [G]^T \frac{\partial \mathbf{S}^{(1)}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{s=s_1}, \quad (32)$$

où les coefficients de la matrice  $[G]$  sont construits suivant l'Eq. (31).

Par suite aux équations (25), (28), (30) et (31) l'on dispose de  $3N + Nnode$  relations entre les  $4N + Nnode$  inconnues du problème. Il est donc nécessaire d'ajouter  $N$  contraintes, permettant par exemple de raccorder le domaine  $\Omega_2$  à d'autres domaines ou de définir un champ incident arbitraire en amont. Finalement, pour la mise en œuvre numérique de la méthode, les exponentielles croissantes associées aux modes évanescents peuvent être remplacées par un changement de variable adapté.

## 3 Exemple d'application

Dans ce paragraphe, un exemple d'application de la méthode est très brièvement décrit, à valeur d'illustration. De nombreux cas pratiques sont traités dans [1] et comparés à des valeurs expérimentales. On s'intéresse donc ici à la répartition de la puissance acoustique sur les différentes sorties d'un caisson de répartition de dimensions  $0.650 \text{ m} \times 0.330 \text{ m}$ . Ce caisson comporte une entrée de largeur  $16 \text{ cm}$  et trois sorties de largeur  $8 \text{ cm}$ . Un coude est

présent en amont du caisson à une distance de 80 cm. Une onde plane vient exciter le système en amont du coude. Sur la Figure 4, on distingue le domaine coudé entouré de noir, sur lequel le champ est développé suivant la méthode de la Section 2.2. Sur le domaine entouré de rouge les champs sont discrétisés suivant la méthode des éléments finis. La dimension du problème linéaire final à résoudre est de  $12N + N_{node}$  avec  $N_{node} \approx 25\ 000$  et  $N = 15$ . Sur un ordinateur de bureau, le temps de calcul est ainsi inférieur à la seconde pour un point de fréquence.

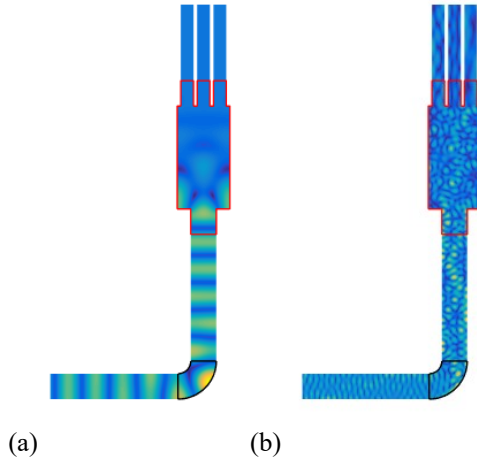


Figure 4 : Module de la pression acoustique dans un caisson de répartition précédé d'un coude avec onde plane incidente en amont. (a) Problème à 1000 Hz ; (b) Problème à 5000 Hz.

## 5 Conclusion

Dans ce travail, un modèle acoustique en deux dimensions pour des sections de réseau de ventilation est présenté. Trois typologies de géométries sont distinguées : des conduites droites, des coudes et des éléments de complexité géométrique arbitraire. Trois stratégies de modélisation distinctes y sont respectivement déployées. Le développement des champs de pression dans les sections droites ou coudées est effectué sur des bases fonctionnelles de dimension réduite adaptées aux géométries en question tandis que les sections de géométrie complexe sont traitées par éléments finis. L'association de ces approches permet ainsi de modéliser des sections complexes de réseau de ventilation pour un coût numérique nettement inférieur à une discrétisation systématique par éléments finis.

## Remerciements

Les auteurs remercient l'ADEME et les directions de la recherche du CETIAT et du CSTB pour le financement de ces travaux.

## Références

- [1] C. Guigou-Carter, C. Coguenanff, F. Bessac, and S. Bailhache, "Comparaison entre prédiction et mesure du comportement acoustique d'éléments de réseau de ventilation," in *Proceedings CFA Le Havre*, 2018.
- [2] S. Félix and V. Pagneux, "Sound propagation in rigid bends: A multimodal approach," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 110, no. 3, p. 1329, 2001.

## Annexes

Les expressions des intégrales mises en œuvre dans la méthode sont données telles que

$$\frac{1}{N_m N_n} \int_0^h \frac{(R_0 + l)}{R_0^2} \frac{\partial \varphi_n(l)}{\partial l} \varphi_m(l) dl = \begin{cases} 0, & m = n = 0 \\ \frac{h}{4}, & m = n \\ \left( \frac{(-1)^{m+n}-1}{R_0} + h \frac{(-1)^{m+n}}{R_0^2} \right) \frac{n^2}{n^2-m^2}. \end{cases} \quad (33)$$

$$\frac{1}{N_m N_n} \int_0^h \frac{(R_0 + l)^2}{R_0^2} \varphi_n(l) \varphi_m(l) dl = \begin{cases} \frac{(R_0 + h)^3 - R_0^3}{3R_0^2}, & m = n = 0 \\ \frac{1}{R_0^2} \left( \frac{(R_0 + h)^3 - R_0^3}{6} + \frac{h^3}{(n2\pi)^2} \right), & m = n \\ 2 \left( \frac{h}{\pi} \right)^2 \left( \frac{(-1)^{m+n}-1}{R_0} + h \frac{(-1)^{m+n}}{R_0^2} \right) \frac{m^2 + n^2}{(m^2-n^2)^2}. \end{cases} \quad (34)$$

$$\int_0^h \frac{(R_0 + l)}{R_0} \varphi_n(l) \varphi_m(l) dl = \begin{cases} N_m N_n \frac{(R_0 + h)^2 - R_0^2}{2R_0}, & m = n \\ N_m N_n \frac{1}{R_0} \left( \frac{h}{\pi} \right)^2 ((-1)^{m+n}-1) \frac{m^2 + n^2}{(m^2-n^2)^2}. \end{cases} \quad (35)$$