

**CFA '18 LE HAVRE ■ 23-27 avril 2018**  
**14<sup>ème</sup> Congrès Français d'Acoustique**



**Correction de l'effet doppler d'une membrane de haut-parleur  
électrodynamique**

T. Lebrun<sup>a</sup> et T. Hélie<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Ircam, 1 place Igor Stravinsky, 75004 Paris, France

<sup>b</sup>Equipe S3AM, IRCAM-CNRS-Sorbonne Université, UMR9912, 1, place Igor Stravinsky, 75004 Paris,  
France  
tristan.lebrun@ircam.fr

Les haut-parleurs électrodynamiques sont des transducteurs non idéaux. De nombreux phénomènes non linéaires engendrent des distorsions audibles (couplage électro-mécanique, comportement de la suspension de la membrane, etc). L'un d'eux est dû au fait que les ondes acoustiques produites par la membrane ne sont pas émises depuis une position fixe : un effet Doppler est induit par le déplacement de la membrane.

Cet article examine cet effet (souvent considéré comme négligeable) dans le cadre simplifié d'une propagation en ondes planes et traite de sa compensation pour les signaux à large bande audio.

Un modèle de propagation linéaire unidimensionnel est adopté, excité par un piston plan en condition limite dont la position est une fonction du temps. Ce modèle physique introduit un temps de propagation variable entre le piston et un point d'observation fixe, satisfaisant une équation implicite : il s'agit donc d'un problème non linéaire.

La solution (régulière) du problème est établie sous une forme implicite, puis un algorithme de simulation explicite est obtenu en s'appuyant sur une méthode à perturbation régulière : les termes du développement exact en série entière sont des polynômes multi-variables en le déplacement du piston et ses dérivées, de degré global homogène. Ce solveur est utilisé pour quantifier la distorsion due à l'effet Doppler dans plusieurs configurations réalistes de haut-parleurs en fonctionnement.

Enfin, un algorithme de correction est calculé à partir d'une technique d'inversion qui s'appuie sur le formalisme des séries de Volterra. Sa robustesse est testée numériquement pour les mêmes configurations réalistes.

## 1 Introduction

Cet article traite la compensation d'un phénomène lié à la propagation d'une onde sonore générée par un haut-parleur : le mouvement de la membrane induit un temps de propagation variable de l'onde entre sa surface et un observateur fixe, provoquant principalement des distorsions d'intermodulation [1] [2]. Cet effet a fait l'objet de différents modèles physiques en ondes planes [3] ou sphériques [4]. Sa compensation est peu abordée dans la littérature [5] [6], Klippel [5] propose notamment un filtre appliquant un retard au signal électrique envoyé dans le haut-parleur de manière à compenser celui généré par l'effet Doppler. Les performances de cette correction ne sont cependant pas évaluées.

Le modèle unidimensionnel considéré, repris des travaux de Butterweck [3], est présenté en section 2. La solution régulière du problème posé et sa simulation pour différentes vitesses de membrane est établie en section 3. Enfin, un algorithme de correction "feed-forward" de la distorsion due au Doppler est proposé et évalué en section 4.

## 2 Description du modèle et problème posé

On considère ici un modèle proposé par Butterweck [3] : la membrane, modélisée par un piston plan, vibre dans un tube semi-infini, comme représenté Figure 1.

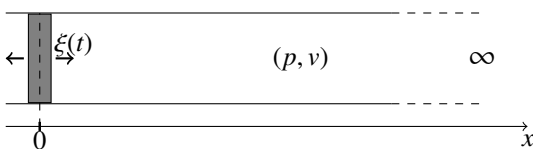


FIGURE 1 – Un piston vibre autour de  $x = 0$  dans un tube semi-infini.

Les hypothèses du modèle sont établies ci-dessous :

- (H1) propagation conservative d'ondes planes dans un gaz homogène et initialement au repos,
- (H2) pas d'onde retour,
- (H3) pas d'onde de choc,

- (H4) la position du piston est décrite par la fonction  $t \mapsto \xi(t)$  à gauche du tube, initialement au repos ( $\xi(t) = 0$  pour  $t \leq 0$ ).

On cherche à trouver l'expression de la vitesse particulière  $v(x, t)$  dans le tube, pour tout  $x \geq \xi(t)$ . Compte tenu des hypothèses, on trouve que la solution régulière du problème s'écrit

$$v(x, t) = v^+(t - x/c_0), \quad (1)$$

avec pour condition limite à gauche

$$v(\xi(t), t) = \xi'(t), \quad (2)$$

imposant que la vitesse particulière à la surface du piston soit égale à la vitesse du piston.

Les problèmes posés dans cet article sont décrits ci-dessous, pour un mouvement de piston  $t \mapsto \xi(t)$ .

- (P1) (Problème direct) Existe-t-il une fonction régulière  $(x, t) \mapsto v(x, t)$  telle que  $v$  soit solution de (1-2) ?
- (P2) (Problème inverse) Existe-t-il un déplacement corrigé  $t \mapsto \hat{\xi}(t)$  à fournir au piston tel que la vitesse particulière générée par ce piston soit de la forme  $v(x, t) = \xi'(t - x/c_0)$  ?

Le problème (P1) est traité en section 3 et (P2) en section 4.

## 3 Solution régulière et développement exact en séries entières

### 3.1 Solution exacte et source eulérienne équivalente

La solution de (1) et (2) est obtenue par la méthode des caractéristiques. Les lignes  $K_\xi(x, t)$  sur la figure 2, de pente  $c_0$ , représentent la propagation d'une onde depuis la surface du piston à  $(x, t) = (\xi(t^d), t^d)$  jusqu'à un observateur fixe à  $(x, t) = (X, t^a)$ . On peut ainsi relier graphiquement les temps de départ et d'arrivée de l'onde par l'équation

$$t^a = t^d + X/c_0 - \xi(t^d)/c_0. \quad (3)$$

La propagation étant conservative et sans convection, la vitesse particulière reste constante le long de la caractéristique, telle que

$$v(X, t^a) = v(\xi(t^d), t^d) = \xi'(t^d), \quad (4)$$

d'après (2).

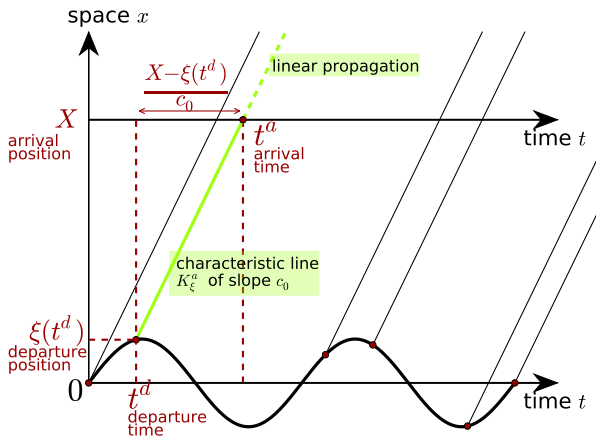


FIGURE 2 – Illustration des lignes caractéristiques  $K_\xi(x, t)$  pour un déplacement sinusoïdal du piston.

La solution de (P1) est énoncée dans le théorème ci-dessous, dont la preuve est donnée dans [7].

**Théorème 1 (Solution régulière du problème)** Soit  $t \mapsto \xi(t)$  une fonction régulière telle que

$$\xi'(t) < c_0. \quad (5)$$

La solution générale de (1-2) s'écrit

$$v(x, t) = \xi'\left(t - \frac{x}{c_0} + \epsilon(x, t)\right), \quad (6)$$

où  $t - x/c_0 + \epsilon(x, t)$  est le temps d'émission de l'onde à la surface du piston satisfaisant l'équation implicite

$$\epsilon(x, t) = \xi\left(t - \frac{x}{c_0} + \epsilon(x, t)\right)/c_0. \quad (7)$$

**Remarque 1 (Nombre de Mach)** La condition (5) assure la bijection entre le temps de d'arrivée  $t^a = t$  et le temps de départ  $t^d = t - x/c_0 + \epsilon(x, t)$  de l'onde. Pour un nombre de Mach supérieur à 1, les lignes caractéristiques tracées figure 2 se croisent et la bijection n'est plus assurée.

La fonction  $\epsilon$  dans (6-7) représente la perturbation du temps de propagation de l'onde : on retrouve la solution du problème linéaire (sans Doppler) pour  $\epsilon = 0$  dans (6).

De plus, la propriété suivante permet de conserver uniquement la dépendance en temps en considérant le problème à  $x = 0$ .

**Propriété 1 (Source eulérienne équivalente)** La vitesse particulière  $v(x, t)$  corrompue par le Doppler se ramène à une source eulérienne équivalente  $V_0(t)$  à la position  $x = 0$ , à laquelle on applique ensuite un modèle de propagation linéaire classique (temps de propagation  $x/c_0$ ).

Ainsi, on s'intéresse dans la suite de cet article à la détermination de la source équivalente  $V_0(t)$  satisfaisant les équations

$$V_0(t) = \xi'(t + \epsilon(t)), \quad (8)$$

$$\epsilon(t) = \xi(t + \epsilon(t))/c_0, \quad (9)$$

à partir de laquelle  $v(x, t) = V_0(t - x/c_0)$  est déduit.

La section suivante présente la méthode utilisée pour résoudre l'équation implicite (9).

## 3.2 Méthode à perturbation régulière et simulation

### 3.2.1 Détermination de $\epsilon(t)$

Pour résoudre (9), on applique la méthode des perturbations régulières sur le déplacement  $\xi$  et on cherche la solution  $\epsilon$  de la forme

$$\epsilon(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n(t), \quad (10)$$

où chaque  $\epsilon_n(t)$  est un polynôme multivarié en  $(\xi, \dots, \xi^{(n)})$  de degré global homogène  $n$ , et  $\xi^{(k)}$  est la dérivée  $k$ -ième de  $\xi$ . On obtient

$$\epsilon_n(t) = \begin{cases} \xi^{(n)}(t)/c_0 & \text{si } n = 1, \\ \frac{1}{c_0} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\xi^{(k)}(t)}{k!} \sum_{i \in C_{n-1,k}} \epsilon_{i_1}(t) \dots \epsilon_{i_k}(t) & \text{sinon,} \end{cases} \quad (11)$$

où  $C_{n,k} = \{(i_1, \dots, i_k) \mid i_1 + \dots + i_k = n\}$  est l'ensemble des compositions de  $n$  en  $k$  parties. Le détail du calcul est donné dans [7].

### 3.2.2 Détermination de $V_0(t)$

On cherche également la solution de (8) sous forme d'un développement en séries

$$V_0(t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t). \quad (12)$$

Pour cela,

- (i) on développe  $\xi'$  en séries de Taylor au point  $t$  dans (8),
- (ii) on calcule les termes  $v_n(t)$  de la nouvelle série issue de la composition de  $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n(t)$  avec (i).

On trouve

$$v_n(t) = \begin{cases} \xi'(t) & \text{si } n = 1, \\ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\xi^{(k+1)}(t)}{k!} \sum_{i \in C_{n-1,k}} \epsilon_{i_1}(t) \dots \epsilon_{i_k}(t) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (13)$$

L'expression de (12) tronquée à  $N = 3$  donne

$$\widetilde{V}_0(t) = \xi'(t) + \frac{\xi(t)\xi^{(2)}(t)}{c_0} + \frac{\xi(t)\xi'(t)\xi^{(2)}(t) + \frac{\xi(t)^2\xi^{(3)}(t)}{2}}{c_0^2}. \quad (14)$$

**Remarque 2 (Représentation en série formelle de  $V_0(t)$ )**

Chaque terme  $v_n(t)$  de la série est un polynôme en  $(\xi, \dots, \xi^{(n)})$ , de degré global homogène  $n$ , pondéré par  $1/c_0^n$ . De plus, on suppose que  $\xi \in [0, \rho]$ , où  $\rho$  est le rayon de convergence de la série.

### 3.2.3 Evaluation numérique

L'algorithme de simulation de l'effet Doppler est évalué pour deux configurations réalistes de fonctionnement haut-parleur en termes de plage fréquentielle et vitesse de membrane, décrites dans le tableau 1 (les autres paramètres de simulation sont donnés en annexe) pour une vitesse de membrane de la forme

$$\xi'(t) = A \sum_{l=1}^L \sin(2\pi f_l t), \quad (15)$$

où  $[f_1, \dots, f_i, \dots, f_2]$  sont des fréquences espacées logarithmiquement. La figure 3 correspond au signal  $V_0(t)$  simulé pour l'excitation bi-harmonique définie par C1. On observe des effets de distorsion par intermodulation, mis en évidence par la présence de composantes à  $f_2 \pm pf_1$ , avec  $1 \leq p \leq 3$  pour le signal simulé avec effet Doppler. Le niveau des fréquences d'intermodulation  $f_2 \pm f_1$  est environ  $-20\text{dB}$  en dessous du niveau de la fréquence centrale  $f_2$ . Le taux<sup>1</sup> de distorsion d'intermodulation vaut  $7,4\%$ .

La figure 4 correspond au signal  $V_0(t)$  simulé pour l'excitation définie dans C2. Les fréquences d'excitation, réparties linéairement sur la plage  $[20\text{Hz}-1\text{kHz}]$ , permettent d'évaluer l'impact de la distorsion Doppler sur un signal audio issu d'un haut-parleur du type "woofer". On observe une corruption du signal de référence augmentant avec la fréquence. Le niveau de la distorsion d'intermodulation observé pour C1 est retrouvé autour de  $1\text{kHz}$ .

TABLEAU 1 – Description des simulations C1 et C2 pour l'excitation définie équation (15)

Nom	A	$f_1$	$f_2$	L
C1	1 m/s	20 Hz	1 kHz	2
C2				40

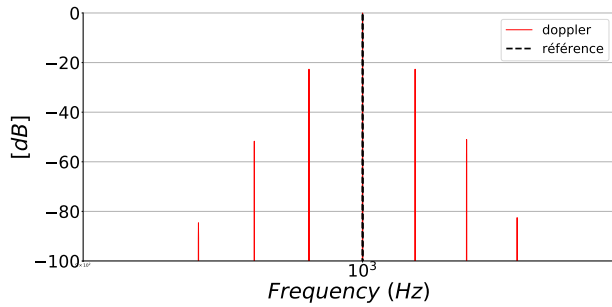


FIGURE 3 – Simulation C1 : Analyse fréquentielle de  $V_0(t)$  (niveau normalisé), avec (label "doppler") et sans (label "référence") effet Doppler. La plage fréquentielle est centrée sur  $f_2$  de manière à observer la distorsion d'intermodulation.

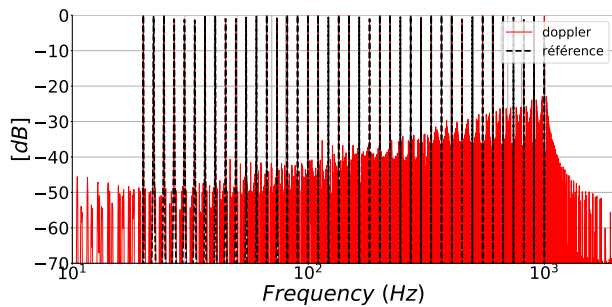


FIGURE 4 – Simulation C2 : Analyse fréquentielle de  $V_0(t)$  (niveau normalisé), avec (label "doppler") et sans (label "référence") effet Doppler.

1. Ce taux est donné par le ratio entre l'amplitude RMS aux fréquences  $f_2 \pm pf_1$  et l'amplitude RMS à la fréquence  $f_2$ .

## 4 Algorithme anti-Doppler

### 4.1 Calcul des noyaux pré-inverses en séries de Volterra

Soit  $\mathcal{D}$  le système d'entrée  $\xi(t)$  (déplacement du piston) et de sortie  $V_0(t)$  (vitesse eulérienne équivalente en  $x = 0$ , engendrée par le piston). D'après la remarque 2, les termes  $v_n(t)$  de la série (12) décrivant le phénomène sont des polynômes en  $(\xi, \dots, \xi^{(n)})$  de degré global homogène. Le système  $\mathcal{D}$  peut donc être formellement représenté par un développement en séries de Volterra (avec des distributions). Les noyaux de transfert  $D_n$  de ce système sont déduits des termes  $v_n(t)$  et donnés par l'équation (16), .

$$D_n(s) = \begin{cases} s & \text{si } n = 1, \\ \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i \in \mathcal{C}_{n-1,k}} s_n^{k+1} D_{i_1}^\epsilon(\sigma^1(s)) \dots D_{i_k}^\epsilon(\sigma^k(s)) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (16)$$

avec

$$D_n^\epsilon(s) = \begin{cases} 1/c_0 & \text{si } n = 1, \\ \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i \in \mathcal{C}_{n-1,k}} \frac{s_n^k}{c_0} D_{i_1}^\epsilon(\sigma^1(s)) \dots D_{i_k}^\epsilon(\sigma^k(s)) & \text{sinon,} \end{cases} \quad (17)$$

et  $s \in \mathbb{C}^{1 \times n}$  tel que  $\Re(s) > 0$ ,  $\sigma^a = (s_{i_1+\dots+i_{a-1}+1}, \dots, s_{i_1+\dots+i_a})$ .

Définissons maintenant un système  $\mathcal{D}^*$ , appelé système pré-inverse, dont la cascade avec  $\mathcal{D}$  vaut l'identité, comme décrit figure 5. Alors  $\mathcal{D}^*$  admet une écriture en séries de Volterra et ses noyaux  $D_n^*$  sont calculables récursivement (voir [8]) à partir des noyaux  $D_n$ .

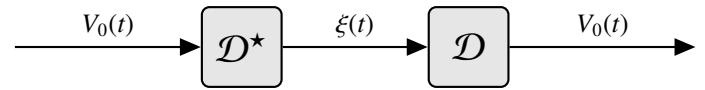


FIGURE 5 – Description du système pré-inverse  $\mathcal{D}^*$ , défini par les noyaux de transfert  $D_n^*$ . La cascade de  $\mathcal{D}^*$  avec  $\mathcal{D}$  vaut l'identité.

Les noyaux de transfert  $D_n^*$  sont donnés par les équations (18-19-20) ci-dessous, jusqu'à  $n = 3$ .

$$D_1^*(s_1) = 1/s_1, \quad (18)$$

$$D_2^*(s_1, s_2) = -\frac{s_1}{c_0 s_2 (s_1 + s_2)}, \quad (19)$$

$$D_3^*(s_1, s_2, s_3) = \frac{1}{c_0^2 (s_1 + s_2 + s_3)} \left( \frac{s_1 s_2}{s_3 (s_2 + s_3)} + \frac{s_1^2}{2 s_2 s_3} \right). \quad (20)$$

**Remarque 3** Le système étant au repos avant  $t = 0$ , l'intégrateur  $1/s_1$  dans (18) est à comprendre comme un intégrateur causal  $\int_0^t$ , idem pour les noyaux suivants.

Ainsi, le système  $\mathcal{D}^*$  fournit le déplacement  $\xi(t)$  correspondant à une vitesse eulérienne cible  $V_0(t)$ . Le problème (P2) énoncé en section 2 peut donc être résolu en définissant pour cible  $V_0(t) = \xi'(t)$  :  $\mathcal{D}^*$  générera le déplacement corrigé  $\hat{\xi}(t)$  correspondant à cette vitesse cible.

### 4.2 Réalisation du correcteur

La structure de réalisation du correcteur, présentée en figure 6, est calculée à partir des lois d'interconnexion

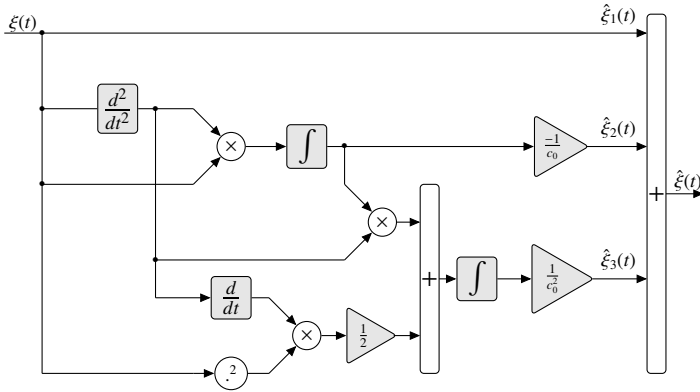


FIGURE 6 – Schéma fonctionnel de l'algorithme de correction à temps continu de l'effet Doppler issu des noyaux de transfert  $D_1^*$ ,  $D_2^*$ ,  $D_3^*$ .

des séries de Volterra [9]. Cette structure est composée uniquement de filtres linéaires, sommes et produits de signaux.

**Remarque 4** La réalisation à l'ordre 2 du correcteur a pour expression, dans le domaine temporel,

$$\begin{aligned}\hat{\xi}_2(t) &= -\frac{1}{c_0} \int_0^t \xi(\tau) \xi^{(2)}(\tau) d\tau \\ &= -\frac{1}{c_0} \xi^{(2)}(t) \xi(t) + \frac{1}{c_0} \int_0^t (\xi'(\tau))^2 d\tau.\end{aligned}\quad (21)$$

Le second terme de (21) diverge, ce sera donc également le cas pour le déplacement corrigé  $\hat{\xi}(t)$ . On en déduit que pour pouvoir compenser parfaitement l'effet Doppler, le piston doit avoir une position moyenne qui dérive. Ceci a une explication physique. En effet, l'anti-Doppler dissymétrise l'amplitude des vitesses  $\xi'$  positives et celles négatives. Ainsi, une vitesse  $V_0$  centrée va amener le piston à devoir se déplacer avec une dérive cumulée. Il n'existe donc pas de signal corrigé  $\hat{\xi}(t)$  **centré sur 0** d'après la réalisation de  $\mathcal{D}^*$ .

Pour pallier le problème énoncé dans la remarque 4, on propose de substituer au système  $\mathcal{D}^*$  le système  $\mathcal{D}_a^*$ , où les intégrateurs  $1/s$  deviennent  $1/(s+a)$ , avec  $a = 2\pi f_c$  et  $f_c \in [0\text{Hz}-10\text{Hz}]$ .

On évalue l'influence de cette substitution en calculant la cascade de  $\mathcal{D}_a^*$  dans  $\mathcal{D}$ , notée  $\mathcal{D}_a^* \circ \mathcal{D}$ . Les noyaux obtenus pour l'ordre 1 et 2 sont présentés équations (22-23).

- On retrouve le système identité (1 pour  $n = 1$ , 0  $\forall n > 1$ ) pour  $a = 0$ .
- La combinaison  $\mathcal{D}_{a,1}^* \circ \mathcal{D}_1$  se comporte bien comme un gain de 1 pour les fréquences supérieures à  $f_c$ .
- La structure de réalisation de  $\mathcal{D}_{a,2}^* \circ \mathcal{D}_2$  est le produit de deux filtres de type  $s/(s+a)$ , cascades avec un intégrateur  $1/(s+a)$  et un gain de  $-a$ . Le résultat de cette combinaison sera donc très proche de 0 pour les fréquences supérieures à  $f_c$ , et d'amplitude d'autant plus faible que  $f_c = a/2\pi$  est faible.

$$D_{a,1}^* \circ D_1(s_1) = \frac{s_1}{(s_1 + a)} \quad (22)$$

$$D_{a,2}^* \circ D_2(s_1, s_2) = -\frac{s_2 s_1 a}{(s_1 + a)(s_2 + a)(s_1 + s_2 + a)} \quad (23)$$

Le nouveau système  $\mathcal{D}_a^*$ , dont la sortie  $\hat{\xi}(t)$  est centrée en 0, constitue donc un anti-Doppler efficace sur le plan théorique.

### 4.3 Evaluation numérique du correcteur

Le correcteur  $\mathcal{D}_a$  est évalué pour les configurations **C1** et **C2** définies précédemment.

Les résultats de la correction pour le signal bi-harmonique sont illustrés en figure 7. On note une réduction de 40 dB pour les composantes à  $f_2 \pm f_1$ , conduisant à un taux de distorsion d'intermodulation de 0.1%. On observe également que les composantes d'intermodulation à  $f_2 \pm 3f_1$  ne sont pas corrigées. Cela est dû à la troncature à  $N = 3$  de  $\mathcal{D}_a^*$ . En conclusion, la correction permet de restaurer une dynamique d'environ 60 dB au signal, contre environ 20 dB pour le signal corrompu par le Doppler.

La correction pour la configuration **C2** est présentée en figure 8. On observe une diminution notable de la corruption due au Doppler. La dégradation visible à faible niveau sur la plage [500Hz-1kHz] est également due à l'erreur de troncature de la série inverse. Une dernière simulation est

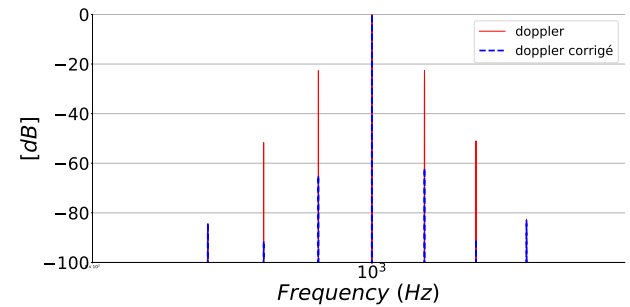


FIGURE 7 – Simulation **C1** : Analyse fréquentielle de  $V_0(t)$  (niveau normalisé), avec correction (label "doppler corrigé") et sans correction (label "doppler") du signal en entrée. La plage fréquentielle est centrée sur  $f_2$  de manière à observer la distorsion d'intermodulation.

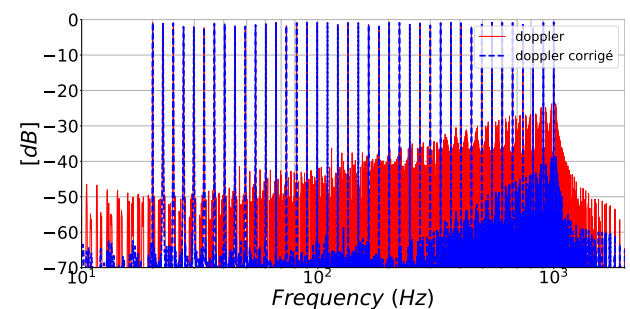


FIGURE 8 – Simulation **C2** : Analyse fréquentielle de  $V_0(t)$  (niveau normalisé), avec correction (label "doppler corrigé") et sans correction (label "doppler") du signal en entrée.

effectuée pour une vitesse de membrane  $\xi'(t)$  plus complexe, composée d'un chirp linéaire montant de 50Hz à 3kHz, un chirp descendant de 3kHz à 50Hz et une sinusoïde de fréquence 1kHz. Chaque composante a pour amplitude  $A = 0.3$  m/s. Les spectrogrammes de cette simulation sont visibles en figure 9. On observe une nette diminution de la distorsion d'intermodulation entre la figure 9b (simulation de  $V_0(t)$ ) et 9c (simulation de  $V_0(t)$  corrigée).



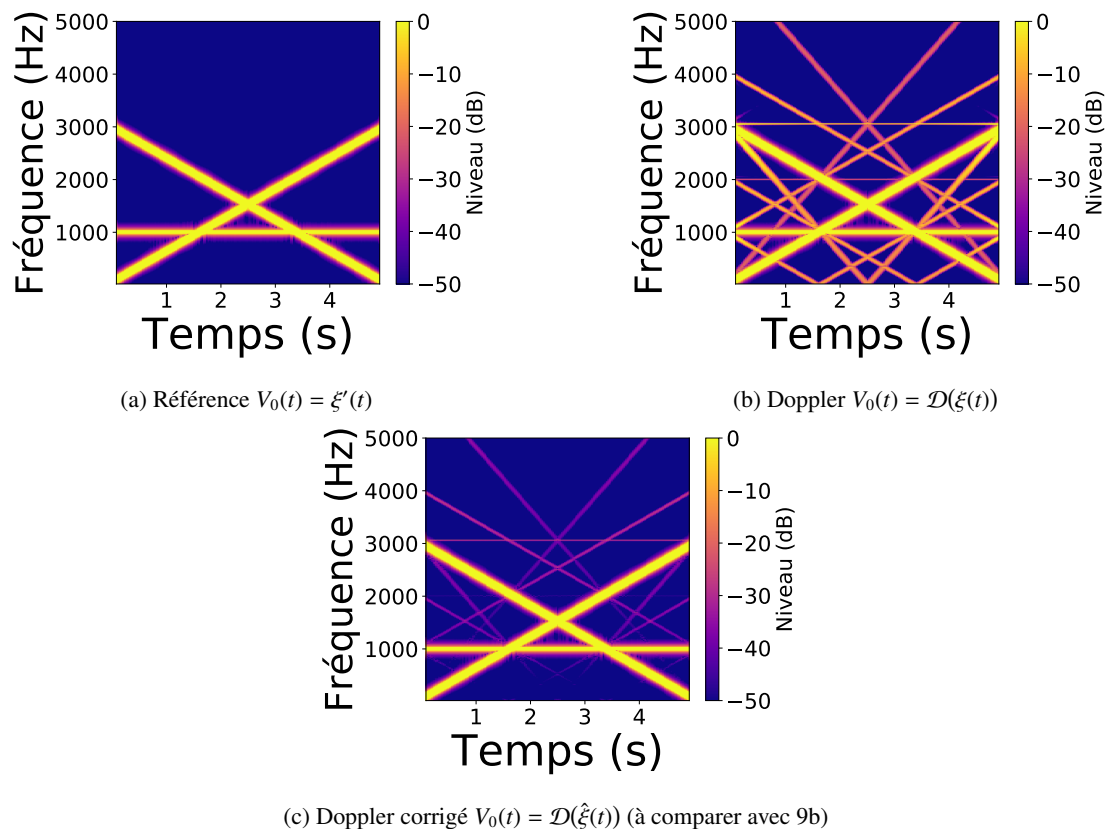


FIGURE 9 – Evaluation de la distorsion Doppler  $\mathcal{D}$  et de l’algorithme anti-Doppler pour une vitesse de membrane représentée en 9a. La nouvelle vitesse eulérienne  $V_0(t)$  simulée est présentée en figure 9b, et celle corrigée par l’algorithme anti-Doppler en 9c. Les artefacts présents sur la figure 9c se situent sous le seuil des  $-30$ dB, contre  $-5$ dB pour la figure 9b.

## 5 Conclusion

La simulation et la correction de l’effet Doppler d’une membrane de haut-parleur est traitée dans cet article, dans le cadre simplifié des ondes planes. Les simulations présentent des niveaux de distorsions d’intermodulation non négligeables pour des haut-parleurs à large bande audio. Des expériences numériques ont montré l’efficacité de l’algorithme de correction en feed-forward élaboré, permettant de réduire significativement la distorsion engendrée par l’effet Doppler.

De prochains travaux porteront sur (1) l’amélioration du modèle en incluant le phénomène de convection; (2) la quantification de l’erreur due à la troncature des séries de Volterra  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}^*$  et la recherche de leurs rayons de convergence; (3) la validation expérimentale du modèle et de l’algorithme de correction.

## Annexe

TABLEAU 2 – Paramètres de simulation de C1 et C2

Paramètres de simulation	
Fréquence d’échantillonnage	Temps de simulation
44100 Hz	20 s
$N$ (troncature de $V_0$ )	$f_c$
5	1 Hz

## Références

- [1] G.L. Beers, H. Belar, Frequency Modulation Distorsion in Loudspeakers, *J. Soc. Motion Picture Eng.*, vol. 40, 207-221 (1943).
- [2] G. Lemarquand, M. Bruneau, Nonlinear Intermodulation of Two Coherent Acoustic Progressive Waves Emitted by a Wide-Bandwidth Loudspeaker, *J. Audio Eng. Soc.*, vol. 56, 207-221 (2008).
- [3] H.J. Butterweck, About the Doppler Effect in Acoustic Radiation from Loudspeakers, *Acustica*, vol. 63, 77-79 (1987).
- [4] D.W. van Wulfften Palthe, Doppler effect in Loudspeakers, *Acustica*, vol. 28, 5-11 (1973).
- [5] W. Klippel, The Mirror Filter-A New Basis for Reducing Nonlinear Distortion and Equalizing Response in Woofer Systems, *J. Audio Eng. Soc.*, vol. 40, 675-691 (1992).
- [6] B. Zoltogorski, Moving Bounday Conditions and Nonlinear Propagation as Sources of Nonlinear Distortions in Loudspeakers, *J. Audio Eng. Soc.*, vol. 41, 691-700 (1993).
- [7] T. Lebrun, T. Hélie, Doppler effect of a planar vibrating piston : strong solution, series expansion and simulation, *Conference on Digital Audio Effects*, (2017).
- [8] M. Schetzen, Theory of pth-order inverses of nonlinear systems, *Circuits and System, IEEE Transactions*, 285-291, (1976)
- [9] T. Hélie, Volterra series and state transformation for real-time simulations of audio circuits including saturations : Application to the Moog ladder filter, *IEEE transactions on audio, speech, and language processing*, 747-759 (2010).