

**CFA '18 LE HAVRE ■ 23-27 avril 2018**  
**14<sup>ème</sup> Congrès Français d'Acoustique**



**Energetic Wave Equation for Diffuse Sound Fields**

J.-D. Polack<sup>a</sup>, H. Dujourdy<sup>b</sup>, B. Pialot<sup>b</sup> et T. Toulemonde<sup>c</sup>

<sup>a</sup>Sorbonne Université / Institut d'Alembert, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France

<sup>b</sup>ESPCI Paris, PSL University, CNRS, Institut Langevin, 1 rue Jussieu, F-75005 Paris, France

<sup>c</sup>Impedance SA, 33, rue Godot de Mauroy, 75009 Paris, France

jean-dominique.polack@upmc.fr

L'équation de diffusion a été proposée il y a cinquante ans comme une extension heuristique du modèle de Sabine des champs diffus, et reçoit encore beaucoup d'attention. Dans une publication récente, les auteurs ont développé le modèle un cran plus loin, en utilisant le tenseur énergie-impulsion pour fournir les relations manquantes entre l'intensité acoustique et l'énergie sonore. Ceci introduit des termes supplémentaires qui, dans le cas d'espaces non sabinien (espaces étroits ou plats), peuvent être définis à l'aide des conditions limites en termes de coefficients d'absorption et de diffraction sur les parois. L'intégration de la divergence du tenseur énergie-impulsion sur les dimensions les plus petites de l'espace conduit à une équation de propagation du type télégraphe, qui peut être résolue en utilisant une méthode des différences finies dans le domaine temporel (FDTD). Nous présentons le cas à deux dimensions (bureaux paysagers) et comparons les résultats numériques à leurs approximations analytiques, en clarifiant les hypothèses sous lesquelles l'équation de diffusion est retrouvée, ainsi qu'à des mesures dans les espaces réels. La comparaison permet d'évaluer les coefficients d'absorption et de diffusion par une procédure d'ajustement. Nous précisons la gamme de valeurs prises par ces coefficients et les comparons aux coefficients plus classiques de l'acoustique du bâtiment.

## 1 Introduction

Depuis le premier traitement empirique de la réverbération par W.C.Sabine en 1894 [1], de nombreux auteurs ont noté des désaccords entre théorie et mesures. Mais bien peu d'entre eux ont remis en cause le fondement même du modèle de Sabine, à savoir l'approximation dite du champ diffus. En particulier, la norme ISO 14257 [2] recommande de mesurer la décroissance du champ sonore avec la distance, et non le temps de réverbération, pour caractériser les halls industriels.

C'est Ollendorff [3] qui, le premier, eut l'idée d'un modèle diffusif de distribution non uniforme de l'énergie sonore dans les salles disproportionnées. Son modèle échappa à l'attention avant d'être redécouvert de manière indépendante 20 ans plus tard par Picaut et al. [4].

Nous présentons ici une nouvelle approche basée sur le tenseur énergie-impulsion. Tout comme l'équation de diffusion [5], cette approche a été initiée par P.M. Morse [6]. Elle nous permet d'écrire la conservation de l'énergie sonore sous la forme d'une équation des télégraphes, que nous résolvons par une méthode de différence finie. Nous comparons alors la simulation ainsi obtenue à des mesures réelles dans un bureau paysager.

Cette approche a fait l'objet de la thèse du deuxième auteur [7], et de deux publications [8,9].

## 2 Etat de l'art

### 2.1 Le modèle de Sabine

Le modèle de Sabine considère la conservation de l'énergie sonore en tout point de l'espace :

$$\partial_t w + \vec{\nabla} \cdot \vec{I} = 0 \quad (1)$$

où  $\partial_t$  est la dérivation partielle par rapport au temps,  $\vec{\nabla}$  est l'opérateur divergence,  $w$  la densité totale instantanée d'énergie acoustique, et  $\vec{I}$  le vecteur intensité acoustique. Il y ajoute une relation heuristique entre intensité et énergie acoustique, basée sur l'hypothèse de champ diffus :

- l'énergie sonore est équi-distribuée dans l'espace ;
- elle se propage de manière isotrope dans l'espace.

La relation qui lie alors énergie et intensité s'écrit :

$$|\vec{I}| = \frac{w}{4\pi} c \quad (2)$$

et l'énergie incidente totale sur les parois, de surface totale  $S$ , est donnée par :

$$\int_S \vec{I}_i \cdot \vec{n} dS = \frac{w}{4} c S \quad (3)$$

Tenant compte du fait que l'énergie acoustique est constante dans le volume, l'intégration de l'équation sur tout le volume  $V$  donne l'équation bien connue :

$$V \partial_t w + \frac{\bar{\alpha} S c}{4} w = 0 \quad (4)$$

dont la solution est une fonction exponentielle du temps de décrétement  $\frac{\bar{\alpha} S c}{4V}$ , où  $\bar{\alpha}$  est le coefficient moyen d'absorption sur les parois.

### 2.2 Le modèle d'Ollendorff-Picaut

Ollendorff et Picaut proposent une autre relation heuristique entre intensité et énergie acoustique en suivant une suggestion de Morse et Feshback [5] :

$$\vec{I} = -\delta \vec{\nabla} w \quad (5)$$

où l'énergie totale n'est plus équi-distribuée dans l'espace. Ici,  $\vec{\nabla}$  est l'opérateur gradient et  $\delta$  le coefficient de diffusion. Ils obtiennent alors une équation de diffusion :

$$\partial_t w_t - \delta \Delta w_t = 0 \quad (6)$$

ou en "renormalisant" l'absorption au sein du volume :

$$\partial_t w_t + \sigma w_t - \delta \Delta w_t = 0 \quad (7)$$

Cette équation admet une solution analytique dans l'espace infini :

$$w(\vec{r}, t) = \frac{1}{(4\pi\delta t)^{\frac{d}{2}}} \exp\left\{-\frac{r^2}{4\delta t} - \sigma t\right\} \quad (8)$$

où  $d$  est la dimension de l'espace. Dans les espaces plats ( $d = 2$ ) ou étroits ( $d = 1$ ), on montre que  $\sigma = \frac{\bar{\alpha} S c}{4V}$ , et la solution (8) généralise bien la décroissance exponentielle de Sabine

## 3 Le tenseur énergie-impulsion

### 3.1 Equation générale

Suivant l'exemple de Morse et Ingard [6], Dujourdy et al. [8, 9] proposent d'introduire le tenseur symétrique énergie-impulsion :

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} E & E_{tx} & E_{ty} & E_{tz} \\ E_{tx} & E_{xx} & E_{xy} & E_{xz} \\ E_{ty} & E_{xy} & E_{yy} & E_{yz} \\ E_{tz} & E_{xz} & E_{yz} & E_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & \vec{I} \\ \vec{J} & \underline{E} \end{pmatrix} \quad (9)$$

où  $\vec{J} = \frac{\vec{l}}{c}$ ,  $\underline{\underline{E}}$  est le tenseur des contraintes ondulatoires, et dont les éléments diagonaux satisfont à l'équipartition de l'énergie  $E = E_{xx} + E_{yy} + E_{zz}$ . La conservation du tenseur  $\underline{\underline{T}}$  s'exprime tout simplement par une dérivée covariante nulle :

$$\vec{\nabla}_4 \cdot \underline{\underline{T}} = 0 \quad (10)$$

où  $\vec{\nabla}_4 = (\frac{1}{c}\partial_t, \vec{\nabla})$  est l'opérateur quadri-divergence.

### 3.2 Réduction dimensionnelle

La réduction dimensionnelle du système s'obtient en intégrant sur les petites dimensions du volume. Ainsi, pour un espace plat de type bureau paysager, on intègre sur la hauteur de l'espace (coordonnée  $z$ ), en introduisant la valeur moyenne des quantités, sauf celles pour lesquelles la dérivation s'effectue selon  $z$  et qui donneront les flux entrant dans les parois. On obtient ainsi pour la conservation de l'énergie (première ligne du tenseur énergie-impulsion) :

$$\frac{1}{c}\partial_t E l_z + \partial_x J_x l_z + \partial_y J_y l_z + J_z^+ - J_z^- = 0 \quad (11)$$

où  $J_z^+$ , resp.  $-J_z^-$ , est le flux d'énergie à travers le plafond (côté +), resp. le sol (côté -), c'est-à-dire l'intensité acoustique absorbée par chacun d'eux.

De même, pour les deux lignes suivantes du tenseur énergie-impulsion, on obtient les relations de conservation suivantes :

$$\frac{1}{c}\partial_t J_x l_z + \partial_x E_{xx} l_z + \partial_y E_{xy} l_z + E_{xz}^+ - E_{xz}^- = 0 \quad (12)$$

$$\frac{1}{c}\partial_t J_y l_z + \partial_x E_{yx} l_z + \partial_y E_{yy} l_z + E_{yz}^+ - E_{yz}^- = 0 \quad (13)$$

où  $E_{xz}^+$  et  $E_{yz}^+$ , resp.  $-E_{xz}^-$  et  $-E_{yz}^-$ , sont les contraintes ondulatoires qui s'exercent sur le plafond (côté +), resp. sur le sol (côté -). Il est à noter que la dernière ligne du tenseur énergie-impulsion n'apporte pas d'information supplémentaire.

La réduction dimensionnelle s'accompagne également d'une simplification du tenseur résiduel des contraintes ondulatoires  $\underline{\underline{E}}$ , qui reste symétrique. Nous postulons :

$$E_{xx} = E_{yy} = \frac{E}{2} \quad (14)$$

$$E_{xy} = 0 \quad (15)$$

c'est-à-dire une distribution isotrope de l'énergie dans l'espace bi-dimensionnel.

### 3.3 Conditions limites

Il ne reste plus qu'à écrire les bilans d'énergie sur le plafond et le sol de l'espace, et plus généralement sur les parois. Pour ce faire, nous introduisons la fonction de répartition de l'énergie  $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ , qui donne la probabilité qu'une onde localisée à la position  $\vec{r}$  se dirige dans la direction de la célérité  $\vec{v}$  à l'instant  $t$ . Suivant l'exemple de [4, 5], nous définissons  $f$  par :

$$f(\vec{r}, \vec{v}, t) = \frac{E}{4\pi} + \frac{3\vec{J}}{4\pi} \cdot \frac{\vec{v}}{c} \quad (16)$$

L'énergie incidente sur une paroi s'obtient par intégration sur l'angle solide  $\Omega = (\theta, \phi)$  avec  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\phi \in [0, 2\pi]$ ,

et l'énergie réfléchie par intégration sur l'angle solide  $\Omega' = (\theta, \phi)$  avec  $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ ,  $\phi \in [0, 2\pi]$ . Tous calculs faits, nous obtenons :

$$J_{z,inc} = \frac{E}{4} + \frac{J_z}{2} \quad J_{z,ref} = \frac{E}{4} - \frac{J_z}{2} \quad (17)$$

et nous retrouvons la définition du coefficient d'absorption  $A$  de Jing et Xiang [10] :

$$J_{z,inc} - J_{z,ref} = J_{z,abs} = \alpha J_{z,inc} = \frac{\alpha}{2(2-\alpha)} E = \frac{A}{4} E \quad (18)$$

Pour l'équilibre des contraintes sur les parois, il faut ajouter un terme à la fonction de répartition de l'énergie :

$$f(\vec{r}, \vec{v}, t) = \frac{E}{4\pi} + \frac{3\vec{J}}{4\pi} \cdot \frac{\vec{v}}{c} + \frac{15}{4\pi} \{E_{xz} \cos \theta \sin \theta \cos \phi + E_{yz} \cos \theta \sin \theta \sin \phi\} \quad (19)$$

On obtient alors pour la deuxième ligne du tenseur énergie-impulsion les contraintes entrantes et sortantes par intégration sous la forme :

$$M_{xz,in} = \frac{3}{16} J_x + \frac{1}{2} E_{xz} \quad M_{xz,out} = \frac{3}{16} J_x - \frac{1}{2} E_{xz} \quad (20)$$

ce qui permet d'introduire un coefficient de diffraction  $D$  :

$$M_{xz,in} - M_{xz,out} = M_{xz,scat} = \beta M_{xz,in} = \frac{3}{4} \frac{\beta}{2(2-\beta)} J_x = \frac{D}{4} J_x \quad (21)$$

De même, la troisième ligne du tenseur énergie-impulsion devient :

$$M_{yz,in} - M_{yz,out} = M_{yz,scat} = \frac{3}{4} \frac{\beta}{2(2-\beta)} J_y = \frac{D}{4} J_y \quad (22)$$

## 4 Solution

La substitution des relations (18), (22) et (22) dans les équations (11) à (13), jointe à l'introduction du libre parcours moyen ( $\lambda = 2l_z$  dans un espace à 2 dimensions), permet d'obtenir le système d'équation :

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}\partial_t E + \partial_x J_x + \partial_y J_y + \frac{A}{\lambda} E &= 0 \\ \frac{1}{c}\partial_t J_x l_z + \partial_x E_{xx} l_z + \partial_y E_{xy} l_z + D \frac{J_x}{2} &= 0 \\ \frac{1}{c}\partial_t J_y l_z + \partial_x E_{yx} l_z + \partial_y E_{yy} l_z + D \frac{J_y}{2} &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

qui se réduit à l'équation des télégraphes :

$$\frac{1}{c^2}\partial_{tt} E - \Delta \frac{E}{2} + \frac{A+D}{\lambda c}\partial_t E + \frac{AD}{\lambda^2} E = 0 \quad (24)$$

### 4.1 Différences finies dans le domaine temporel (FDTD)

Nous choisissons de résoudre numériquement l'équation précédente (24) par une méthode numérique de différences finies dans le domaine temporel (FDTD). Pour cela, nous

choisissons une grille non décalée et un schéma centré en temps et en espace. Les dérivées sont approchées par :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \Big|_{x,y}^t &= \frac{E_{i,j}^{n+1} - 2E_{i,j}^n + E_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} + O(\Delta t)^2 \\
 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \Big|_{x,y}^t &= \frac{E_{i+1,j}^n - 2E_{i,j}^n + E_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x)^2 \\
 \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} \Big|_{x,y}^t &= \frac{E_{i,j+1}^n - 2E_{i,j}^n + E_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} + O(\Delta y)^2 \\
 \frac{\partial E}{\partial t} \Big|_{x,y}^t &= \frac{E_{i,j}^{n+1} - E_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} + O(\Delta t)^2 \\
 \frac{\partial E}{\partial x} \Big|_{x,y}^t &= \frac{E_{i+1,j}^n - E_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + O(\Delta x) \\
 \frac{\partial E}{\partial y} \Big|_{x,y}^t &= \frac{E_{i,j+1}^n - E_{i,j-1}^n}{2\Delta y} + O(\Delta y)
 \end{aligned} \tag{25}$$

où  $O(\cdot)$  est l'erreur de troncature et les  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  et  $\Delta t$  les pas d'échantillonnage en espace et en temps. L'équation discrète prend alors la forme :

$$\begin{aligned}
 E_{i,j}^{n+1}(a+1) &= E_{i,j}^{n-1}(a-1) + E_{i,j}^n(2 - C_{rx}^2 - C_{ry}^2 - b) \\
 &+ \frac{1}{2}C_{rx}^2(E_{i+1,j}^n + E_{i-1,j}^n) + \frac{1}{2}C_{ry}^2(E_{i,j+1}^n + E_{i,j-1}^n) \\
 &+ O[(\Delta t)^2, (\Delta x)^2, (\Delta y)^2]
 \end{aligned} \tag{26}$$

complétée par 4 équations aux limites sur les 4 parois latérales de l'espace [9].  $C_{rx} = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$  et  $C_{ry} = \frac{c\Delta t}{\Delta y}$  sont les coefficients de Courant-Friedrichs-Lewy pour chaque dimension, et  $a = (A + D)\frac{c\Delta t}{2\lambda}$ ,  $b = AD(\frac{c\Delta t}{\lambda})^2$ . Le schéma est explicite, et la précision est du deuxième ordre en temps et en espace.

## 4.2 Stabilité

Nous étudions la stabilité du schéma par la procédure de Von Neumann, qui consiste à chercher une solution de l'équation (26) sous la forme  $E_{i,j}^n = Z^n e^{j(\theta i + \omega j)}$ . Tous calculs faits, on obtient les deux conditions de stabilités [9] :

$$C_{rx}^2(1 + AD(\frac{\Delta x}{2\lambda})^2) < 1 \quad C_{ry}^2(1 + AD(\frac{\Delta y}{2\lambda})^2) < 1 \tag{27}$$

## 5 Résultats

L'équation discrète (26) a été appliquée à un espace bi-dimensionnel quasi-infini de 200 m par 200 m. La source est située au centre de l'espace. Les coefficients d'absorption et de diffraction varient de  $\alpha = 0.01$  à  $\alpha = 0.8$  et de  $\beta = 0.01$  à  $\beta = 1.5$ . Le libre parcours moyen vaut  $\lambda = 5.4$  m, et les pas d'échantillonnage sont fixés à  $\Delta x = \Delta y = 1$  m et  $\Delta t = 1.10^{-3}$  s. La célérité du son est  $c = 344$  m/s.

### 5.1 Décroissance spatiale

La Figure 1 présente la décroissance spatiale du son, et la compare à la solution analytique en régime permanent :

$$E = E_0 \frac{\exp(-\frac{\sqrt{2AD}}{\lambda}r)}{\sqrt{r}} \tag{28}$$

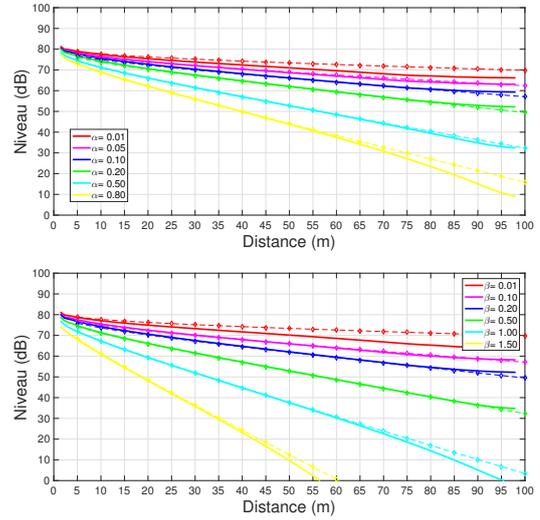


FIGURE 1 – Décroissance spatiale pour différents  $\alpha$  (en haut, avec  $\beta = 0.2$ ) et  $\beta$  (en bas, avec  $\alpha = 0.2$ ). Les losanges correspondent à solution analytique en régime permanent, avec  $E_0 = 74$  dB

pour les grandes valeurs de  $r$ . Il est clair que la solution numérique correspond à la solution analytique, sauf pour les très faibles valeurs des coefficients, ou près des parois où la réflexion sur ces dernières exerce une influence.

### 5.2 Décroissance temporelle

La Figure 2 présente la décroissance temporelle du son à 15 m de la source, et la compare aux deux approximations analytiques correspondant respectivement à une grande valeur de l'un des coefficients, et à des coefficients égaux. Dans le premier cas, l'équation (24) se réduit à une équation de diffusion, de solution :

$$E = E_0 \frac{e^{(-\frac{(A+D)r^2}{2\lambda ct} - \frac{ADc}{(A+D)\lambda}t)}}{t} \tag{29}$$

Dans le deuxième ( $A = D$ ), la solution est un paquet d'onde en déplacement [11] :

$$E^+ = E_0 e^{(-\frac{A}{\lambda}ct)} \frac{U(\frac{c}{\sqrt{2}}t - r)}{2\pi \sqrt{(\frac{c}{\sqrt{2}}t)^2 - r^2}} \tag{30}$$

où  $U(\cdot)$  est la fonction de Heaviside. Il est clair que la solution numérique correspond aux solutions analytiques, surtout pour les grandes valeurs de  $t$  quand l'algorithme s'est stabilisé. Des résultats similaires sont obtenus aux autres distances.

### 5.3 Mesures

Nous avons pu conduire des mesures dans 3 bureaux paysagers de Paris. Nous présentons ici des résultats obtenus à Ovalie (Figure 3), un espace de bureau de 75 m de long par 35 m de large, de forme ovale avec un îlot central. La surface est de 1260 m<sup>2</sup>, et la hauteur 2.7 m, ce qui donne un libre parcours moyen de 5.4 m. L'espace était meublé de bureaux, chaises et ordinateurs lors des mesures, mais sans présence des utilisateurs.

La Figure 4 présente la décroissance spatiale dans Ovalie

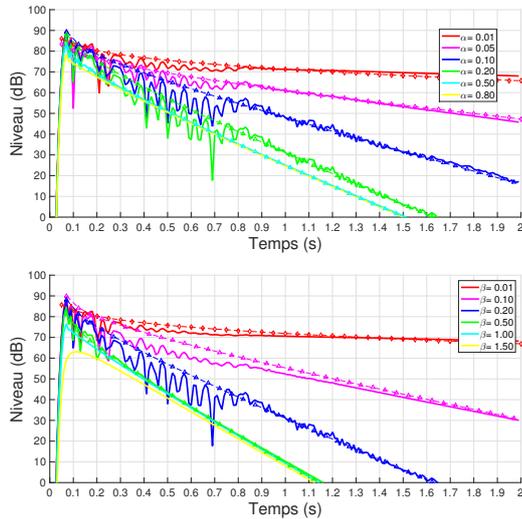


FIGURE 2 – Décroissance temporelle à 15 m de la source pour différents  $\alpha$  (en haut, avec  $\beta = 0.2$ ) et  $\beta$  (en bas, avec  $\alpha = 0.2$ ). Les losanges correspondent à la solution (29), avec  $E_0 = 74$  dB ; et les triangles à la solution (30) avec  $E_0 = 101$  dB sauf pour les grandes valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$ .

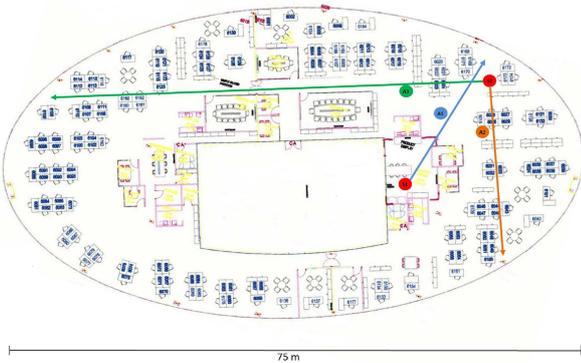


FIGURE 3 – Plan d'Ovalie. Les mesures utilisent la source S3 et suivent l'axe vert.

selon l'axe vert et la décroissance temporelle à 10 m de la source S3, et les compare aux décroissances calculées après ajustement des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ . La fréquence de mesure est l'octave 1 kHz, et les valeurs optimales de  $\alpha$  et  $\beta$  sont respectivement 0.21 et 0.7. Les mêmes valeurs optimales sont obtenues aux autres distances.

Sur la Figure 4, les niveaux de la décroissance temporelle sont légèrement surestimés, une observation qui se généralise à toutes les mesures analysées.

#### 5.4 Procédure d'ajustement

Les coefficients d'absorption et de diffraction sont obtenus par comparaison avec les mesures. Or nous voyons sur la Figure 4 que c'est la plus petite des valeurs  $\alpha$  ou  $\beta$  qui pilote la décroissance temporelle. En d'autres termes, la décroissance temporelle permet de fixer le plus petit des coefficients, en général  $\alpha$ , et le deuxième coefficient s'obtient grâce à la décroissance spatiale. Ainsi une procédure itérative a été utilisée pour estimer  $\alpha$  et  $\beta$ , en supposant d'abord  $\beta$  grand pour une première estimation du

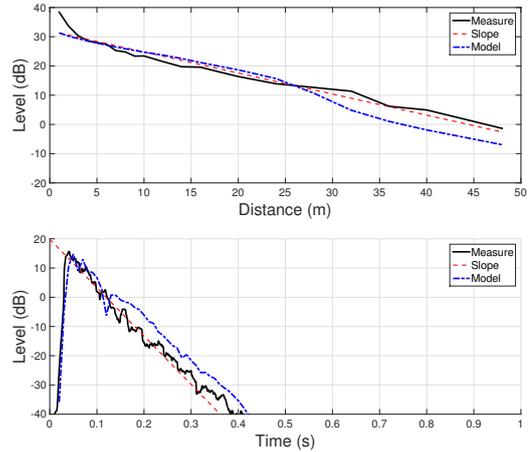


FIGURE 4 – Ajustement du modèle par comparaison avec les décroissances spatiales (en haut) et temporelles à 10 m de la source (en bas) mesurées à Ovalie. Source 3, axe vert,  $\alpha = 0.21$  et  $\beta = 0.7$ .

coefficient d'absorption par l'Eq. (29), qui se réduit à :

$$E \approx E_0 \frac{e^{-\left(\frac{D_0 r^2}{2\lambda c t} - \frac{A_c}{\lambda} t\right)}}{t} \quad (31)$$

puis  $\beta$  se déduit de la décroissance spatiale par l'Eq. (28). La procédure exagère cependant les pentes des deux décroissances, si bien que les coefficients sont légèrement ajustés à la marge pour un meilleur accord avec la mesure.

## 6 Conclusion

Nous avons montré que la conservation de l'énergie se décompose en deux équations : la conservation de l'énergie totale ; et la conservation de l'intensité acoustique. Les deux équations se combinent en une seule équation tensorielle, la conservation du tenseur énergie-impulsion.

La résolution de ces équations fait intervenir deux coefficients sur les parois : un coefficient d'absorption et un coefficient de diffraction. Le plus petit de ces deux coefficients, habituellement le coefficient d'absorption, pilote la décroissance temporelle, et le second coefficient est alors obtenu à l'aide de la décroissance spatiale. Cette procédure d'ajustement a été validée dans des cas réels de bureaux paysagers.

## Remerciements

Ce travail a été réalisé dans le cadre d'une convention CIFRE (n° 2012/1184) entre Impedance S.A.S. et l'Université Pierre et Marie Curie. Les auteurs remercient Impedance pour la mise à disposition des bureaux paysagers des mesures.

## Références

- [1] W. C. Sabine, *Collected papers on acoustics*, Peninsula Publishing (1993).
- [2] Acoustics - Measurement and parametric description of spatial sound distribution curves in workrooms

- for evaluation of their acoustical performance, ISO Standard 14257 (2001).
- [3] F. Ollendorff, Statistical room acoustics as a problem of diffusion : a proposal, *Acustica* **21**, 236-245 (1969).
- [4] J. Picaut, L. Simon, J.D. Polack, A mathematical model of diffuse sound field based on a diffusion equation, *Acta Acust united Ac* **83**, 614-621 (1997).
- [5] P. M. Morse, H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill (1953).
- [6] P. M. Morse, K. U. Ingard, *Theoretical Acoustics*, McGraw-Hill (1968).
- [7] H. Dujourdy, *Diffusion acoustique sur les lieux de travail*, Thèse de Doctorat, UPMC (2016). Disponible sur <http://www.lam.jussieu.fr/Publications/Theses/these-hugo-dujourdy.pdf>.
- [8] H. Dujourdy, B. Pialot, T. Toulemonde, J.D. Polack, An energetic wave equation for modelling diffuse sound fields - application to corridors, *Acta Acust united Ac* **103**, 480-491 (2017).
- [9] H. Dujourdy, B. Pialot, T. Toulemonde, J.D. Polack, An energetic wave equation for modelling diffuse sound fields - application to open offices, submitted to *Wave Motion* (2018).
- [10] Y. Jing, N. Xiang, On boundary conditions for the diffusion equation in room acoustic prediction : theory, simulation, and experiments, *J. Acoust. Soc. Am.* **123**, 145-153 (2008).
- [11] M. Bruneau, *Introduction aux théories de l'acoustique*, Université du Maine (1983).