

CFA '18 LE HAVRE ■ 23-27 avril 2018
14^{ème} Congrès Français d'Acoustique



**Identification des sources dans un problème inverse d'Helmholtz par
algorithme génétique**

B. Goujard^a, A. El Hamidi^b et A. Sakout^b

^aEIGSI, 26 rue de Vaux de Foletier, 17041 La Rochelle Cedex 1, France

^bLaSIE - Université de la Rochelle, Pôle Sciences et Technologie, Avenue Michel Crépeau, 17042 La
Rochelle Cedex 1, France
bertrand.goujard@eigsi.fr

On s'intéresse au problème inverse d'Helmholtz dans le cas bidimensionnel. Un certain nombre de sources acoustiques ponctuelles sont supposées disposées dans un domaine homogène entouré d'une frontière fermée. À partir de la seule donnée de la pression complexe sur la frontière, un algorithme génétique est mis en œuvre pour identifier la position et l'intensité de chacune des sources successivement grâce au produit scalaire de leur trace sur la frontière. L'algorithme est notamment testé sur un domaine carré, de côté égal à dix fois la longueur d'onde, pour des configurations aléatoires d'un nombre donné de sources d'intensités égales ou étagées. La position de l'ensemble des sources est correctement détectée pour 5 sources dans 80 % des cas. L'analyse des résultats montre toutefois que, pour un nombre de sources donné, la détection se révèle, selon les configurations, systématiquement exhaustive et correcte ou nettement plus difficile dans les conditions fixées.

1 Introduction

En acoustique, la résolution d'un problème inverse consiste à identifier les sources présentes dans une zone de l'espace, ou bien les caractéristiques particulières du milieu correspondant, au moyen de mesures effectuées en dehors de cette zone. Ce problème difficile trouve de nombreuses applications, par exemple à des fins d'exams médicaux, dans le contrôle ou l'exploration des matériaux, des structures ou de milieux particuliers, ou dans le domaine de la sécurité pour la surveillance de zone géographiques urbaines ou non.

Nous nous intéressons dans ce qui suit à l'identification de la position et de l'intensité d'un certain nombre de sources acoustiques, supposées ponctuelles et de même fréquence, disposées à l'intérieur d'un domaine homogène.

Nous cherchons à effectuer cette détection à partir des seules valeurs de la pression complexe (intensité et phase) sur une portion de surface dans le cas tridimensionnel, ou sur un segment de courbe continue dans le cas bidimensionnel ; on supposera ici qu'il s'agit de la totalité de la frontière du domaine, ce qui est le cas le plus classique, même si cela n'est pas indispensable pour appliquer la procédure présentée.

2 Principe de la détection des sources

L'équation d'Helmholtz vérifiée par le champ acoustique complexe u dans les cas de n sources ponctuelles respectivement situées en $(x_j)_{1 \leq j \leq n}$ et d'intensité $(\lambda_j)_{1 \leq j \leq n}$ s'écrit dans Ω :

$$\Delta u + k^2 u = \sum_{j=1}^n \lambda_j \delta(x_j) . \quad (1)$$

On suppose d'abord connue la valeur du champ u sur la frontière du domaine $\partial\Omega$ à travers une double condition de Dirichlet et de Neumann. On pose donc $f = \left(u_{|\partial\Omega}, \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} \right)$, qu'on appellera par la suite la trace du champ u sur $\partial\Omega$.

Appelons alors v_j le champ produit par la source unitaire situées en x_j et $\varphi_j = \left(v_{j|\partial\Omega}, \frac{\partial v_j}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} \right)$ la trace du champ v_j sur $\partial\Omega$. Nous avons ainsi

$$f = \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi_j . \quad (2)$$

Le théorème d'unicité d'Holmgren [1] permet de démontrer que les fonctions $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq n}$ sont linéairement indépendantes si les points $(x_j)_{1 \leq j \leq n}$ sont distincts.

Il en résulte directement que, pour une trace f donnée, il y a unicité de la répartition des sources qui la produisent. Il est donc théoriquement possible de déterminer la position et l'intensité des sources ponctuelles à l'intérieur du domaine à partir de la seule donnée de la trace du champ résultant sur la frontière.

De plus, les expérimentations numériques conduites dans le cadre de cette étude nous ont montré sans ambiguïté qu'en pratique, il était suffisant de disposer, pour ce qui concerne la trace f , de la seule valeur du champ à travers la condition de Dirichlet, et que l'usage de la condition de Neumann en complément n'améliorait que faiblement la qualité de la détection des sources. On posera donc simplement dans tout ce qui suit $f = u_{|\partial\Omega}$ et $\varphi_j = v_{j|\partial\Omega}$.

Nous formulons alors un produit scalaire noté $\langle f | g \rangle$ pour deux fonctions f et g quelconques définies sur la frontière de la façon suivante : puisque celle-ci est supposée de longueur finie, il est toujours possible de calculer la série de Fourier de f sur $\partial\Omega$ et de définir ainsi

ce produit scalaire par $\langle f | g \rangle = \sum_{i=1}^{+\infty} \widehat{f}_i \overline{\widehat{g}_i}$ où \widehat{f}_i est le

coefficient de Fourier d'ordre i associé à f . L'utilisation de ce produit scalaire, quoique théoriquement équivalent au produit scalaire classique $\langle f | g \rangle = \int_{\partial\Omega} f(s) \overline{g(s)} ds$, s'est en effet révélé plus discriminant à l'usage. Dans les applications numériques, les valeurs de la trace de f le long de $\partial\Omega$ sont prises en un certain nombre de points régulièrement espacés et le produit scalaire est calculé grâce à une transformée de Fourier rapide.

Un processus itératif permet alors de trouver successivement la position de chacune des sources ponctuelles. D'après l'Eq. (2), nous avons pour tout $j \in [1, n]$

$$\langle f | \varphi_j / \|\varphi_j\| \rangle = \lambda_j \|\varphi_j\| + \sum_{l \neq j} \lambda_l \langle \varphi_l | \varphi_j / \|\varphi_j\| \rangle . \quad (3)$$

Si les fonctions $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq n}$ forment un système orthogonal, nous aurions alors immédiatement pour tout $j \in [1, n]$

$$\langle f | \varphi_j / \|\varphi_j\| \rangle = |\lambda_j| \|\varphi_j\| . \quad (4)$$

Donc en considérant toutes les fonctions traces φ obtenues par des sources ponctuelles qui seraient positionnées sur l'ensemble des points x du domaine Ω pour déterminer $\max_{\varphi} \left\langle \left| f \mid \varphi / \|\varphi\| \right| \right\rangle$, la première source détectée serait positionnée en x_1 tel que la quantité $|\lambda_1| \|\varphi_1\|$ soit maximale. De cela, on tirerait immédiatement la valeur de $\lambda_1 = \left\langle f \mid \varphi_1 / \|\varphi_1\|^2 \right\rangle$. Il suffirait ensuite de poser $f_1 = f - \lambda_1 \varphi_1$ et de répéter le processus pour identifier successivement les différentes sources jusqu'à obtenir $f_n = 0$ avec la n -ième et dernière source. Les sources seraient ainsi localisées dans l'ordre décroissant de leur contribution $|\lambda_j| \|\varphi_j\|$ à la trace f .

Il est bien évident qu'en réalité, les différentes traces $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq n}$ n'ont aucune raison de former un système orthogonal, et qu'on aura toujours plutôt $\langle \varphi_j \mid \varphi_l \rangle \neq 0$ pour $j \neq l$. Toutefois, il est possible d'effectuer une procédure d'identification successive des positions des différentes sources similaire à celle qui vient d'être décrite, en s'appuyant sur le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt.

Supposons en effet que les n sources soient numérotées dans l'ordre de leur découverte. Il est alors possible d'écrire les n fonctions $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq n}$ successivement sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \theta_1 \\ \varphi_2 &= \omega_{12} \theta_1 + \theta_2 \\ \varphi_3 &= \omega_{13} \theta_1 + \omega_{23} \theta_2 + \theta_3 \\ &\dots \end{aligned}$$

soit plus généralement pour $j \in [1, n]$:

$$\varphi_j = \sum_{l=1}^j \omega_{lj} \theta_l . \quad (5)$$

avec $\forall (j, l) \in [1, n]^2 \quad j \neq l \Rightarrow \langle \theta_j \mid \theta_l \rangle = 0$ de telle sorte que les fonctions $(\theta_j)_{1 \leq j \leq n}$ constituent alors un système orthogonal. En posant $\omega_{jj} = 1$ on constate que pour $l < j$

$$\omega_{lj} = \langle \varphi_j \mid \theta_l \rangle / \|\theta_l\|^2 . \quad (6)$$

Ainsi les $(\theta_j)_{1 \leq j \leq n}$ sont successivement définies par

$$\theta_j = \varphi_j - \sum_{l=1}^{j-1} \left(\langle \varphi_j \mid \theta_l \rangle / \|\theta_l\|^2 \right) \theta_l . \quad (7)$$

En partant de la trace initiale du champ total sur la frontière $f = f_0$, on peut successivement à chaque rang j trouver la fonction φ_j telle que

$$\varphi_j = \max_{\varphi} \left\langle \left| f_{j-1} \mid \varphi / \|\varphi\| \right| \right\rangle \quad (8)$$

$$\text{et} \quad \tilde{\lambda}_j = \left\langle \left| f_{j-1} \mid \theta_j / \|\theta_j\|^2 \right| \right\rangle . \quad (9)$$

d'où $f_j = f_{j-1} - \tilde{\lambda}_j \theta_j$ de telle sorte que les fonctions f_j et $(\theta_l)_{1 \leq l \leq j}$ sont orthogonales. En rapprochant les deux expressions résultantes de la trace sur la frontière $f = \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi_j$ et $f = \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_j \theta_j$ on obtient $\tilde{\lambda}_j = \sum_{l=j}^n \lambda_l \omega_{lj}$.

Ce procédé permet ainsi de passer de la famille $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq n}$ linéairement indépendante à la famille orthogonale $(\theta_j)_{1 \leq j \leq n}$; dans l'hypothèse où les n sources sont correctement détectées, on aboutit à $f_n = 0$ aux erreurs près.

Une fois les positions $(x_j)_{1 \leq j \leq n}$ des n sources identifiées, les intensités $(\lambda_j)_{1 \leq j \leq n}$ peuvent simplement être recalculées directement par la résolution du système linéaire suivant :

$$\forall j \in [1, n] \quad \sum_{l=1}^n \lambda_l \langle \varphi_l \mid \varphi_j \rangle = \langle f \mid \varphi_j \rangle . \quad (10)$$

L'élément crucial dans le processus de détection est la position des sources; si celle-ci est correcte, l'intensité complexe peut alors être évaluée avec une précision satisfaisante.

Cette procédure suppose que l'on soit capable de déterminer à chaque étape j entre 1 et n la position x_j de la source ponctuelle telle que la fonction trace φ_j normée du champ résultant sur $\partial\Omega$ maximise le produit scalaire avec la trace résiduelle du champ f_j .

Du fait de son caractère harmonique dans les cas bidimensionnel et tridimensionnel, le champ acoustique complexe créé dans le domaine par plusieurs sources est très irrégulier en module comme en phase; la cartographie résultante de la quantité $\left\langle \left| f \mid \varphi / \|\varphi\| \right| \right\rangle$ à maximiser en plaçant une source ponctuelle en chaque point du domaine présente de nombreux maxima dispersés dont il faut trouver le plus grand. Nous présentons Figure 1 trois exemples de cette cartographie dans une configuration de 7 sources pour les trois dimensions de domaine expérimentées. Il s'agit là d'un problème d'optimisation non convexe, pour lequel on doit recourir à des procédés tels que les algorithmes génétiques ou le recuit simulé. Dans les deux cas, l'exploration du domaine Ω des positions possibles pour les sources repose sur un codage de leurs coordonnées qui nécessite de les rendre discrètes, avec un pas suffisamment petit pour conserver une résolution suffisante. Cette discrétisation ne rend pas plus approximative la localisation d'une source: il suffit d'utiliser la meilleure position x_j fournie par l'algorithme non convexe pour initialiser une méthode de remontée du gradient locale afin d'obtenir toute la précision voulue. Si les tests numériques qui vont être présentés ont été effectués à l'aide d'un algorithme génétique, quelques essais semblent montrer qu'une méthode de recuit simulé donne également des résultats satisfaisants.

3 Résultats expérimentaux

Les tests numériques destinés à évaluer l'efficacité du principe de la procédure proposée ont été réalisés à partir d'un domaine carré bidimensionnel et la trace du champ de pression complexe a été supposée connue sur les quatre côtés du carré, avec une discrétisation reposant sur 201 points par côté. Pour une valeur donnée des différents paramètres qui seront précisés plus loin, le programme génère 400 configurations aléatoires de sources (dites « réelles ») destinées à être identifiées (ce qui permet d'obtenir les résultats en pourcentage dans un intervalle de confiance inférieur à 5 % avec une probabilité de 95 %) et la procédure de détection est lancée pour un nombre de sources (dites « détectées ») identiques à celui des sources effectivement présentes. Aucun bruit n'a été rajouté en complément du champ acoustique produit par les sources elles-mêmes.

Pour chacune des 400 configurations, on détermine le nombre de sources correctement localisées en comparant les positions entre les différentes sources réelles et les sources détectées selon un critère de distance maximale admissible (prise généralement égale à $\lambda/4$) : la détection de la source réelle est supposée correcte si sa distance avec la source détectée la plus proche (c'est-à-dire l'erreur faite sur sa position) est inférieure à cette distance admissible, sachant que chaque source détectée ne peut être associée qu'à une seule source réelle et inversement ; le taux de réussite dépend directement de ce critère.

Il est possible de la sorte de calculer globalement, pour un nombre l donné de sources (inférieur ou égal au nombre n de sources réelles) le taux moyen de succès dans la détection, c'est-à-dire la probabilité de localiser correctement grâce à la procédure au moins l sources parmi les n sources réelles.

Les paramètres des différentes simulations sont :

- la taille du domaine : le côté du carré est pris égal à λ , 10λ ou 100λ ;
- le nombre de sources réelles disposées dans le domaine : des configurations à 3, 5 et 7 sources ont été testées ;
- l'intensité des sources réelles : l'intensité complexe des différentes sources a été prise soit identique pour toutes les sources, soit échelonnée en module avec un écart de 3 dB d'une source à l'autre.

Comme il est difficile, quelle que soit la méthode utilisée, de distinguer le cas de deux sources très proches (relativement à la longueur d'onde) de celui d'une source unique, une distance minimale de $\lambda/8$ a été imposée au départ entre les sources réelles pour toutes les configurations testées.

L'origine étant placée au centre du domaine, chacune des coordonnées dans les deux dimensions a été discrétisée et codée sur 8 bits (pour les domaines de côté λ ou 10λ) ou 12 bits (pour le domaine de côté 100λ). Une « population » initiale de 1024 sources unitaires a été générée à partir d'un tirage aléatoire de ces 16 ou 24 bits dont chaque exemplaire est considéré comme le « chromosome » de la source correspondante.

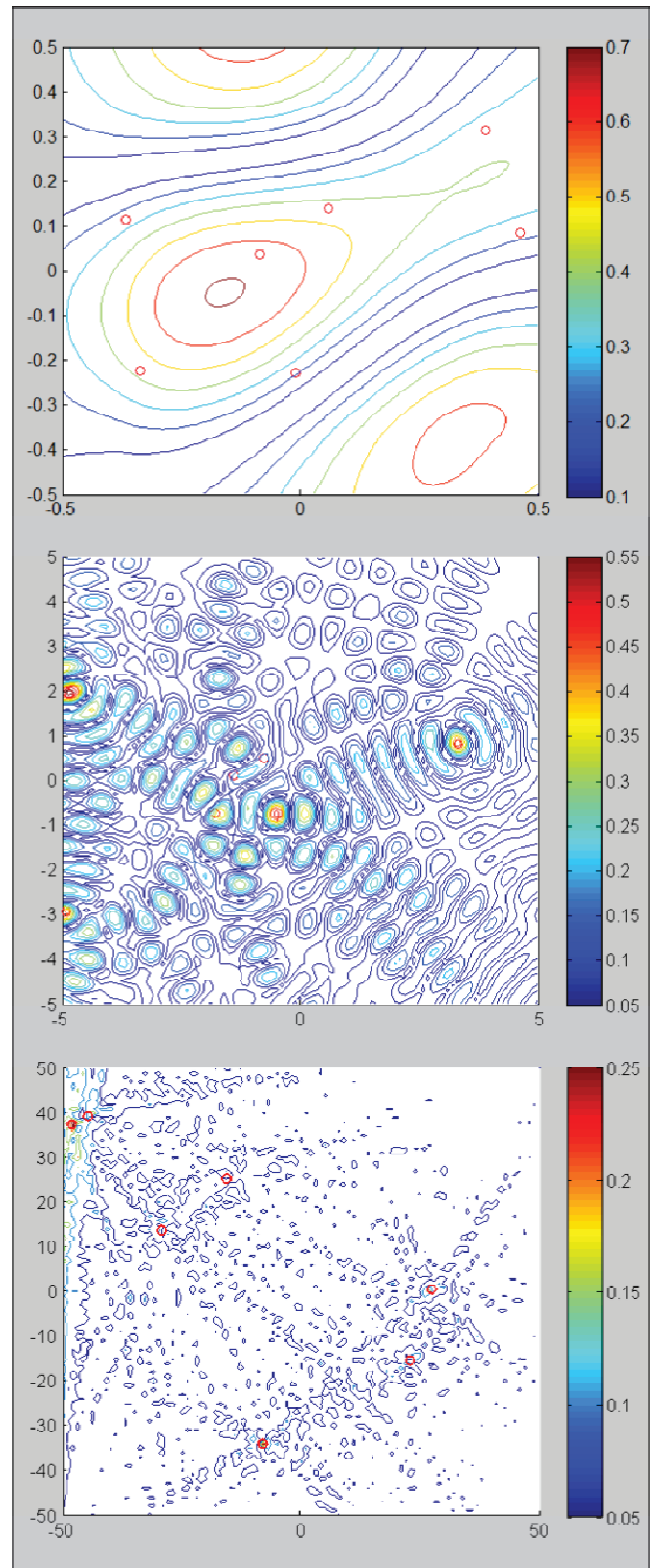


FIGURE 1 – Trois cartographies de $\left| \frac{f}{\varphi} / \left| \varphi \right| \right|$ pour des domaines de côtés égaux respectivement de bas en haut à λ , 10λ et 100λ dans le cas d'une configuration de 7 sources (repérées par un rond rouge). Dans le premier cas, contrairement aux deux autres, le maximum de la fonction ne correspond pas à la position d'une source, ce qui explique l'échec de la procédure.

Pour chacune de ces sources, la quantité $\left\langle f \mid \varphi / \|\varphi\| \right\rangle$ à maximiser est calculée. Les chromosomes des sources pour lesquelles les plus grandes valeurs ont été atteintes sont alors utilisés de façon préférentielle (en les combinant et en introduisant un petit nombre de variations aléatoires appelées « mutations ») pour générer une nouvelle population à partir de la précédente. Le processus est itéré jusqu'à observer une stagnation de la valeur maximale de $\left\langle f \mid \varphi / \|\varphi\| \right\rangle$ atteinte au sein de la population : cette valeur est alors retenue comme solution du problème d'optimisation.

Sous réserve de s'appuyer sur une discrétisation du domaine assez fine (ce qui a nécessité pour améliorer les résultats de passer à 12 bits pour le domaine de côté 100λ) et une population assez nombreuse, un tel procédé s'est révélé rapide et fiable : l'algorithme génétique permet le plus souvent de repérer l'optimum aussi bien qu'une exploration cartographique exhaustive du domaine. Lorsque ce n'est pas le cas, on constate le plus souvent que le point identifié correspond à la position d'une source, et que la procédure va permettre tout de même de localiser correctement les autres sources. Il n'est donc pas nécessaire que l'algorithme génétique soit infaillible.

Soulignons à cet égard que le processus d'optimisation convexe est absolument non déterministe par nature, du fait aussi bien du caractère aléatoire de la population initiale que des combinaisons ultérieures entre chromosomes. On constate ainsi, par exemple, que plusieurs recherches successives menées à partir d'une même configuration de sources peuvent conduire à une localisation plus ou moins précise des différentes sources, que les sources correctement localisées ne sont pas toujours les mêmes d'un essai à l'autre, et qu'une erreur au cours d'un essai dans la localisation d'une source n'empêche pas nécessairement de localiser correctement certaines des suivantes (voir Figure 3). Même en cas de détection correcte répétée de la totalité des sources présentes, l'ordre dans lequel elles sont identifiées n'est pas non plus nécessairement identique lors des différentes tentatives (voir Figure 2) ! De ce point de vue, l'algorithme présente une certaine robustesse.

Les Tableaux 1, 2 et 3 montrent les résultats obtenus dans les différentes configurations testées. Bien évidemment, ces taux de détection correcte sont à juger en fonction du type d'application recherchée. Résumons les points essentiels.

Dans le cas du domaine de côté 10λ , le taux de détection des 5 sources identiques présentes dans la configuration atteint 80 % avec une précision de $\lambda/4$. Pour une configuration de 7 sources de même intensité, avec la même précision, le taux de détection des 7 sources est de 41 %, d'au moins 6 sources de 55 %. Ces deux taux montent respectivement à 62 % et 78 % si l'on s'autorise une erreur de position inférieure à la longueur d'onde. Dans le cas de 7 sources d'intensités échelonnées de 3 dB, avec ainsi 18 dB d'écart entre la plus faible et la plus intense, le taux de détection de la totalité des sources est de 20 %, d'au moins 6 sources de 67 %, d'au moins 5 sources de 90 %.

Pour le domaine de côté égal à la longueur d'onde λ , le taux de détection moyen d'une configuration de 3 sources n'est que de l'ordre de 47 %.

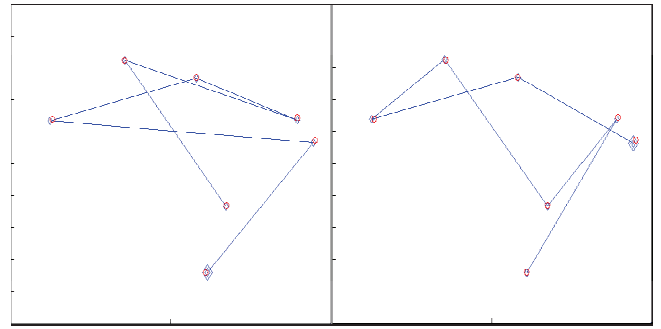


FIGURE 2 – Deux recherches réussies à partir de la même configuration de 7 sources. Les sources réelles sont indiquées par un rond rouge, les sources détectées par un losange bleu. À partir du double losange bleu qui indique la première source détectée, on passe d'une source à l'autre dans l'ordre de la détection. On constate que l'ordre de la détection est complètement différent d'un essai à l'autre. (Le côté du domaine est ici de dix fois la longueur d'onde, l'intensité des sources identique.)

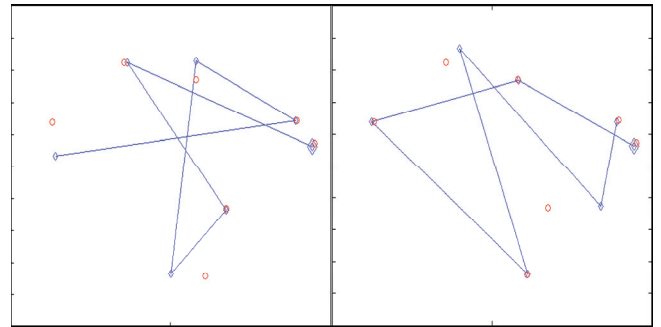


FIGURE 3 – Deux recherches comportant des erreurs à partir de la même configuration de 7 sources, dans les mêmes conditions que la Figure 2. Les sources mal localisées diffèrent dans les deux essais. La détection erronée d'une source au cours de la recherche (la 4^{ème} à gauche, la 5^{ème} et la 6^{ème} à droite) n'empêche pas de localiser correctement par la suite certaines sources (la 5^{ème} et surtout la 6^{ème} à gauche, la 7^{ème} et dernière à droite).

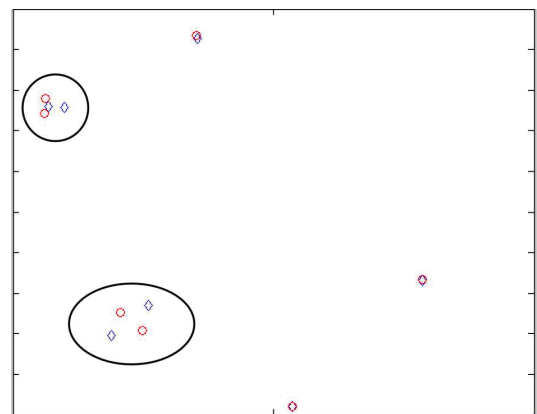


Figure 4 – Dans les mêmes conditions que les Figures 2 et 3, trois sources sont correctement détectées. Pour chacune des deux paires, la disposition trouvée est erronée : le segment qui joindrait les deux sources détectées est perpendiculaire à celui qui joindrait les deux sources réelles. Ce phénomène peut se produire à différentes échelles relativement à la longueur d'onde.

TABLEAU 1 – Résultats expérimentaux pour un domaine de côté 10λ . Pour l'intensité : I : sources identiques. V : Sources d'intensité croissant régulièrement de +3 dB

Nbre de sources réelles	Intensité (I/V)	Nbre de sources détectées	Pourcentage associé	Erreur max. admise
3	I	3	96%	1/4
3		3	100%	1
5	I	5	80%	1/4
5		4 ou 5	86%	1/4
5		5	92%	1
5		4 ou 5	96%	1
7	I	7	42%	1/4
7		6 ou 7	55%	1/4
7		5 à 7	69%	1/4
7		4 à 7	83%	1/4
7		7	62%	1
7		6 ou 7	79%	1
7		5 à 7	93%	1
7		4 à 7	98%	1
7	V	7	20%	1/4
7		6 ou 7	67%	1/4
7		5 à 7	91%	1/4
7		4 à 7	97%	1/4
7		7	36%	1
7		6 ou 7	86%	1
7		5 à 7	98%	1
7		4 à 7	99%	1

TABLEAU 2 – Résultats expérimentaux pour un domaine de côté λ .

Nbre de sources réelles	Intensité (I/V)	Nbre de sources détectées	Pourcentage associé	Erreur max. admise
3	I	3	47%	1/4
5	I	5	17%	1/4
5		4 ou 5	39%	1/4

Pour ce qui concerne le domaine de dimension 100λ pour lequel le codage d'une coordonnée est fait sur 12 bits, avec une population testée de 1024 sources, la taille importante de l'espace de recherche augmente nettement le temps nécessaire à l'algorithme génétique pour trouver l'optimum ; de ce point de vue, il pourrait être intéressant d'augmenter la population.

Dans une configuration à 5 sources, 60 % sont correctement localisées avec une précision de $\lambda/4$; si l'on s'autorise, eu égard à la taille du domaine, à augmenter l'erreur admise pour la localisation jusqu'à la longueur d'onde, ce taux passe à 82 %. Dans une configuration à 7 sources, les pourcentages correspondants sont de 38 % et 65 % respectivement.

On constate immédiatement d'une part qu'une taille minimale du domaine de recherche relativement à la longueur d'onde est nécessaire pour que le principe de la méthode fondée sur le produit scalaire puisse être appliquée ; d'autre part, en supposant cette dernière condition remplie, que la difficulté de localisation des sources augmente avec la taille du domaine, ce qui n'a rien de surprenant.

TABLEAU 3 – Résultats expérimentaux pour un domaine de côté 100λ .

Nbre de sources réelles	Intensité (I/V)	Nbre de sources détectées	Pourcentage associé	Erreur max. admise
3	I	3	76%	1/4
3		3	76%	1/2
3		3	93%	1
5	I	5	60%	1/4
5		4 ou 5	93%	1/4
5		5	82%	1
5		4 ou 5	99%	1
7	I	7	38%	1/4
7		6 ou 7	79%	1/4
7		5 à 7	97%	1/4
7		4 à 7	100%	1/4
7	I	7	66%	1
7		6 ou 7	96%	1
7		5 à 7	100%	1
7		4 à 7	100%	1
7	V	7	21%	1/4
7		6 ou 7	65%	1/4
7		5 à 7	84%	1/4
7		4 à 7	94%	1/4
7		7	33%	1
7		6 ou 7	76%	1
7		5 à 7	96%	1
7		4 à 7	100%	1

4 Discussion

Les résultats obtenus nous permettent de constater la capacité réelle du processus décrit à détecter l'emplacement de plusieurs sources dans une configuration bidimensionnelle avec un taux parfois relativement élevé de succès et un volume de calcul très modéré. Ceci démontre le bien-fondé de l'utilisation du produit scalaire de la trace des champs acoustiques sur la frontière pour résoudre le problème inverse dans le cas de sources ponctuelles. Soulignons que ceci est obtenu uniquement avec la condition aux limites de Dirichlet, c'est-à-dire en pratique par la mesure aux différents points de la frontière de la seule pression acoustique au moyen de microphones ordinaires, ce qui recèle un avantage important par la simplicité de la mise en œuvre.

De plus le caractère itératif, source après source, du processus limite la complexité et le volume des calculs à mener. Un autre élément de simplicité est la détection de la position de chaque source de façon totalement indépendante de son intensité.

Dans le cas de sources d'intensité décroissante, et par conséquent en présence parmi les sources réelles d'ordres de grandeur très différents en intensité, on peut constater que même les sources les plus faibles sont susceptibles d'être correctement positionnées par la procédure. Bien entendu, les sources les plus intenses étant détectées les premières, il n'est pas possible en fin de processus de distinguer entre une source réelle faible et l'erreur résiduelle, mais cette difficulté est susceptible de se rencontrer dans n'importe quel procédé de résolution de l'équation inverse.

La procédure testée ici en deux dimensions est immédiatement transposable en trois dimensions ; il s'ensuivra alors inévitablement un accroissement du volume de calcul à mener, qui restera néanmoins modéré, essentiellement au niveau de l'algorithme génétique : il faudra typiquement, à cause du passage de la taille des chromosomes de 16 à 24 bits (trois coordonnées) quadrupler la population support de la recherche pour avoir la certitude de trouver le maximum.

La procédure décrite pourrait être étendue sans difficulté particulière (si ce n'est qu'alors l'unicité de la configuration recherchée pourrait n'être plus assurée) à un domaine qui comporterait des obstacles ou à l'intérieur duquel les paramètres de propagation de l'onde sonore (vitesse du son, etc.) serait variable, à la condition que ces caractéristiques soient précisément connues afin de permettre de calculer la trace des sources ponctuelles sur la frontière du domaine : au prix évidemment d'un volume de calcul important, puisque le champ acoustique doit être calculé pour chaque position potentielle de source à partir de l'équation d'Helmholtz. Ceci ouvre la voie à de nombreuses applications, sous réserve que le nombre de sources reste très limité. Dans le cas de sources impulsionnelles simultanément actives (par exemple de tirs ou d'explosion dans une zone urbaine), une détection à différentes fréquences choisies pourrait permettre d'améliorer le taux de détection correcte. Il faut également mentionner qu'il n'est pas nécessaire dans le principe que la ligne sur laquelle le trace du champ est connue inclue la totalité de la frontière du domaine ; quelques essais supplémentaires ont montré que la détection est possible selon la même procédure en se fondant sur des enregistrements le long d'une partie de la frontière ou même d'une ligne quelconque située dans le domaine, même si l'on peut s'attendre alors à une fiabilité moindre.

Le processus décrit précédemment présente toutefois un certain nombre de faiblesses. Il n'est jamais infaillible. Il se révèle très fiable pour un petit nombre de sources, mais à partir de 5 à 7 sources, même en l'absence de bruit supplémentaire, il ne permet pas systématiquement la détection correcte de toutes ces sources, mais seulement d'une partie d'entre elles.

En particulier, on observe des configurations particulières dont l'identification est intrinsèquement difficile du fait des positionnements des sources ; par exemple, dans le cas de deux sources réelles assez rapprochées formant ainsi une paire, l'algorithme a parfois tendance à détecter plutôt une autre paire, de même centre mais de direction perpendiculaire à la première (voir Figure

4). Dans de tels cas, le caractère aléatoire de l'algorithme devient flagrant lorsque les sources correctement détectées ne sont pas les mêmes d'une tentative à l'autre. Il n'a malheureusement pas été possible jusqu'ici de mettre en évidence un critère qui permettrait, par exemple, d'évaluer le degré de confiance à accorder à la détection de telle source particulière, si bien qu'au final on ne sait pas distinguer, parmi les sources détectées au cours du processus, les sources bien positionnées des autres.

Ces difficultés s'accroissent lorsque les dimensions du domaine se réduisent relativement à la longueur d'onde. Les résultats des essais tentés avec un domaine de côté pris égal à la longueur d'onde se sont révélés désastreux ; la procédure décrite ici semble ainsi inadaptée pour localiser des sources à l'intérieur d'un domaine dont les dimensions sont de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde. Ceci est dû, comme le montre la Figure 1, au fait que les maxima de $\left\langle f \mid \varphi / \|\varphi\| \right\rangle$ ne correspondent pas à la position d'une source. Par contre la détection dans un grand domaine, testée ici en prenant le côté égal à 100 fois la longueur d'onde, ne pose pas de problème de principe, mais nécessite de diminuer le pas relativement à la longueur du côté pour discrétiser les coordonnées des positions, et éventuellement aussi, par conséquent, la population sur laquelle travaille l'algorithme génétique : ceci contribue donc à augmenter le volume de calcul nécessaire à la détection. Soulignons qu'une telle conséquence semble difficilement évitable quelle que soit la méthode de résolution du problème inverse choisie.

5 Conclusion

Nous avons présenté dans cet article une approche de la résolution du problème d'Helmholtz inverse dans le cas particulier de sources harmoniques ponctuelles dispersées dans un domaine et par la seule utilisation des valeurs du champ acoustique complexe sur la frontière. Les sources sont identifiées l'une après l'autre. Pour cela, un procédé d'optimisation non convexe (par algorithme génétique) permet d'identifier à chaque fois la position de la source ponctuelle dont le champ normé maximise le produit scalaire avec la trace du champ global résiduel sur la frontière.

Les tests numériques menés en champ libre sur un domaine bidimensionnel carré ont montré, sous réserve que les dimensions en soient nettement supérieures à la longueur d'onde, l'aptitude de la procédure proposée à localiser correctement et rapidement une bonne partie des sources aléatoirement disposées dans le domaine. Cette procédure pourrait donc être utilisée en complément d'autres méthodes dans des applications pratiques de localisation des sources en champ libre, voire dans des configurations spatiales complexes.

Références

[1] A. El Badia, T. Nara, An inverse source problem for Helmholtz's equation from the Cauchy data with a single wave number, *Inverse problems* **27**, 105001 (15 pp) (2001).