

CFA '18 LE HAVRE ■ 23-27 avril 2018
14^{ème} Congrès Français d'Acoustique



La méthode des nappes de sources : une résolution simplifiée de l'équation d'Helmholtz en acoustique architecturale

B. Goujard^a, A. El Hamidi^b et A. Sakout^b

^aEIGSI, 26 rue de Vaux de Foletier, 17041 La Rochelle Cedex 1, France

^bLaSIE - Université de la Rochelle, Pôle Sciences et Technologie, Avenue Michel Crépeau, 17042 La Rochelle Cedex 1, France
bertrand.goujard@eigsi.fr

La mise en évidence de la réversibilité de l'équation d'Helmholtz permet de suggérer le principe d'une méthode de résolution alternative aux précédentes, intitulée ici " Méthode des nappes de sources ". La démarche suivie consiste à satisfaire directement les conditions aux limites en remplaçant les frontières du domaine par une répartition spatiale de sources identifiées à travers sa représentation de Fourier. La mise en œuvre de cette méthode avec ses principaux paramètres est ensuite explicitée. Pour trois configurations bidimensionnelles typiques (la diffraction par un écran, les modes propres d'une salle rectangulaire, le tube de Kundt), les champs acoustiques obtenus par des simulations réalisées selon le procédé décrit se révèlent en très bonne adéquation avec les solutions théoriques : une large application de cette méthode semble ainsi possible. Certains aspects à préciser par des travaux ultérieurs sont aussi mis en évidence.

1 Caractéristiques de la méthode

1.1 Motivation et principe

La solution élémentaire en espace libre de l'équation d'Helmholtz vérifiée par le champ acoustique complexe p en tout point P de l'espace

$$\Delta p + k^2 p = -\delta(P), \quad (1)$$

où $\delta(P)$ est la distribution de Dirac et correspond physiquement à une source ponctuelle d'intensité complexe égale à 1 placée à l'origine O , est un champ, radial par symétrie, qui s'exprime en un point M tel que $OM = r$ respectivement sur \mathbb{R}^3 et sur \mathbb{R}^2 par

$$p(r) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \quad (2)$$

et
$$p(r) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr), \quad (3)$$

où $H_0^{(1)}(r)$ désigne la fonction de Hankel de première espèce à l'ordre 0.

Pour une distribution de n sources ponctuelles d'intensité $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ disposées dans l'espace en des points $(P_i)_{1 \leq i \leq n}$, l'équation s'écrit donc :

$$\Delta p + k^2 p = -\sum_i A_i \delta(P - P_i) \quad (4)$$

Cette formule peut être étendue à une distribution de sources non pas ponctuelles, mais réparties sur une ligne, une surface, ou un volume.

Il est essentiel alors de constater que l'équation d'Helmholtz peut se lire dans les deux sens. D'une part, une distribution arbitraire quelconque de sources $\{(A_i, P_i)\}_{1 \leq i \leq n}$ étant donnée, la pression complexe p résultante peut être calculée en tout point de l'espace P en résolvant cette équation. D'autre part, si l'on se donne inversement un champ acoustique arbitraire p dans l'espace, le calcul de la quantité $\Delta p + k^2 p$ en tout point P aboutit à évaluer la grandeur $\sum_i A_i \delta(P - P_i)$, ou son équivalent linéique,

surfaccique ou volumique, c'est-à-dire à obtenir la répartition des sources, avec leur localisation et leurs intensité complexe, susceptibles de produire le champ acoustique souhaité.

Dans le cas où l'on utilise un maillage volumique pour le calcul numérique, le calcul de ce résidu $R = \Delta p + k^2 p$ sera effectué à partir des valeurs prises sur les nœuds du maillage, en utilisant les formules usuelles pour le calcul du laplacien discrétisé.

Pour identifier cette quantité avec le second membre de l'Eq. (4), il faut interpréter le Dirac ; si l'on intègre cette équation sur le domaine élémentaire $\Delta\Omega$ centré sur une source $P_k(x_k, y_k, z_k)$ donnée, on obtient dans \mathbb{R}^3 :

$$\int_{\Delta\Omega} (\Delta p + k^2 p) dV = -A_k \simeq R(x_k, y_k, z_k) \Delta x \Delta y \Delta z \quad (5)$$

puisque $\delta(P - P_k)$ correspond à une fonction nulle partout sauf au point P_k et dont l'intégrale vaut 1.

Ainsi, à partir des valeurs $p(P)$ du champ de pression en chaque point P de l'espace tridimensionnel discrétisé, le calcul du résidu R permet de trouver la répartition et l'intensité des sources qui produisent ce champ : en chaque point P se trouve placée une source ponctuelle d'intensité : $-R(P) \Delta x \Delta y \Delta z$.

On associe souvent à l'équation d'Helmholtz des conditions aux limites sur les frontières du domaine du type

$$\frac{\partial p}{\partial n} = ik\beta p \quad (6)$$

où β est l'admittance réduite, ce qui correspond à des surfaces à impédance locale. Ces conditions qui introduisent des modifications par rapport au champ libre sont ainsi équivalentes, par la réversibilité de l'équation d'Helmholtz, à des répartition de sources sur les frontières.

Prenons pour exemple le cas bidimensionnel d'un écran mince semi-infini parfaitement réfléchissant. La solution exacte de l'équation d'Helmholtz a été proposée par Sánchez-Sesma [1] (dans le cas plus général d'un dièdre infini d'angle quelconque) sous la forme d'une série.

Nous l'avons calculé numériquement pour une source unitaire de fréquence $\lambda = 3$ m dans un domaine de dimension 40 m x 40 m sur un maillage carré de 401 x 401 points (voir Figures 1 et 2). L'origine, au centre du domaine, correspond au faite de l'écran vertical, la source est placée aux coordonnées (-20, 0).

Du fait de la troncature de la série, des artefacts numériques sont visibles sur la cartographie du module de la pression le long d'un cercle de rayon centré sur l'origine et passant par la source, sous la forme de petites « bulles » sur la cartographie de la pression.

Le calcul de R et l'interprétation de l'Eq. (4) dans le domaine fait apparaître, en complément de la source principale, deux nappes de sources situées immédiatement de part et d'autre de la position de l'écran et équivalentes à sa présence. Cette double nappe de sources présente des oscillations selon la direction verticale liées aux variations du champ créé par la source principale (voir Figure 1). Si l'on calcule la transformée de Fourier de cette répartition de sources, par exemple du côté de la source principale, on met en évidence la présence de fréquences spatiales égales ou supérieures à la longueur d'onde, du fait de la

propagation oblique de l'onde par rapport à l'écran. Cette répartition de sources peut donc être représentée à l'aide d'une série de Fourier tronquée à un petit nombre de termes.

1.2 Description générale

Il apparaît donc qu'on peut considérer la résolution de l'équation d'Helmholtz avec des conditions aux limites sur une frontière comme la détermination de la répartition (surfacique dans \mathbb{R}^3 , linéique dans \mathbb{R}^2) d'une nappe de sources fictives localisée à cette frontière qui permette, compte tenu des sources réelles, de satisfaire en champ libre les conditions aux limites à l'emplacement de la frontière auxquelles cette répartition se substitue. Comme le champ produit par cette répartition est issu des solutions élémentaires citées de l'équation d'Helmholtz, celle-ci est donc vérifiée par linéarité.

Ces nappes, dont l'emplacement est connu et qui dans le cadre d'une simulation numérique seront toujours de taille finie, peuvent être considérées comme périodiques et facilement décrites par les coefficients de la série de Fourier obtenue, qui sont donc les seuls paramètres à déterminer.

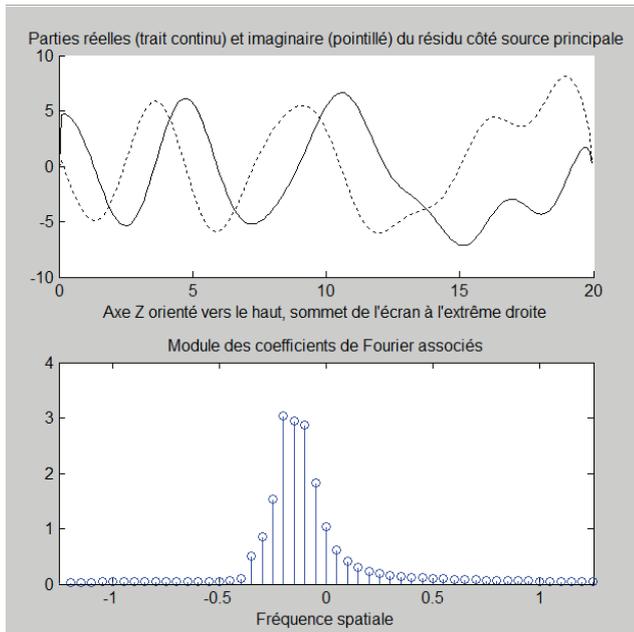


FIGURE 1 : Variation de $\Delta p + k^2 p$ le long de l'écran côté source et sa transformée de Fourier spatiale.

1.3 Application au cas bidimensionnel

Le domaine est supposé plan et sa frontière, qui peut être fermée ou non, est représentée par un ensemble de courbes fixées le long desquelles une condition aux limites est définie. On suppose qu'on peut segmenter la frontière en un certain nombre de parties supposées d'impédance locale et uniforme, ce qui permet d'en caractériser le comportement acoustique par la seule valeur de l'admittance réduite β . La longueur d'onde λ de la ou des sources réelles est évidemment la grandeur déterminante de tous les paramètres du calcul.

Les paramètres de définition des frontières sont les suivants :

- **l'espacement des points de contrôle le long des segments** : le calcul du champ étant discrétisé, la vérification de la condition aux limites sur la frontière va se faire le long de ces segments en un certain nombre de « points de contrôles », suffisamment proches pour que le calcul y soit représentatif de ce qui se passe sur l'ensemble de la frontière. Quelques essais comparatifs avec des solutions exactes ont montré que la valeur maximale pour produire un champ de pression correct était de l'ordre de $\lambda/3$. On a choisi couramment $\lambda/4$.

- **le retrait des points de contrôle par rapport aux extrémités des segments** : ces essais ont également montré que les points d'extrémités des segments (par exemple le point situé sur le bord supérieur dans le cas de la diffraction par un écran) constituaient des singularités où il se révèle difficile de réaliser la condition aux limites ; si l'on tente de le faire, on perturbe l'ensemble du calcul sur les autres points. Deux raisons à cela : d'une part il est difficile de définir en ces points une normale à la surface qui ait un sens physique ; d'autre part, ils sont situés en extrémité de nappes et sont donc en porte-à-faux vis-à-vis du champ qu'elles engendrent. On remédie à cette difficulté en plaçant les points de contrôle extrémaux d'un segment donné en retrait des extrémités d'une distance qui peut descendre jusqu'à $\lambda/32$ mais qui doit être non nulle, et ceci, selon les essais effectués, sans impact apparent sur la qualité de la solution.

- **le pas de discrétisation de la nappe de sources** : les coefficients de Fourier associés à chaque segment de frontière définissent une densité linéique de sources acoustiques sur la nappe correspondante qu'il faut discrétiser en un ensemble de sources ponctuelles afin de pouvoir calculer le champ acoustique résultant. Les simulations présentées plus loin ont été effectuées avec un pas de discrétisation de $\lambda/64$.

- **le décalage des nappes vers l'intérieur du domaine** : dans les cas où les deux faces d'un segment de frontière comportent une condition aux limites, comme celui de la diffraction sur l'écran mince, les deux nappes de sources doivent être écartées l'une de l'autre, chacune vers l'intérieur du domaine en vis-à-vis. Ce très faible décalage a été pris égal à $\lambda/128$.

- **le pas de discrétisation pour le calcul de la dérivée** : la condition limite de l'Eq (6) doit être exprimée sur la frontière. La vérification de cette condition aux points de contrôle suppose d'y calculer une dérivée normale discrétisée. Pour éviter une superposition avec les sources de la nappe, une dérivée décentrée à partir de points pris à l'intérieur du domaine est utilisée. Les essais, effectués avec une dérivée d'ordre 2, semblent montrer que les résultats sont assez peu sensibles au pas de discrétisation utilisé.

Ainsi dans le cas de l'écran mince, la disposition des nappes et des points de contrôle est illustrée sur la Figure 2.

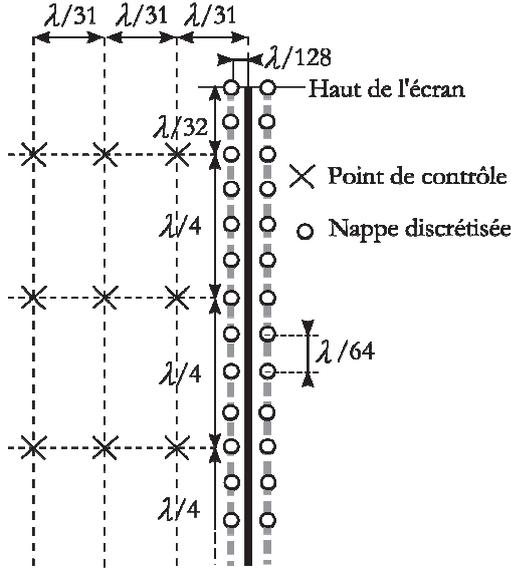


FIGURE 2 : Disposition des nappes et des points de contrôle autour de l'écran. (Les distances ne sont pas à l'échelle)

La répartition linéique de sources acoustique sur un segment de frontière de longueur finie peut être décrite sous la forme d'une série tronquée de Fourier. En effet, un champ de pression de longueur d'onde λ ne peut pas présenter le long d'une courbe arbitraire incluse dans le domaine des variations plus rapides que celles permises par cette longueur d'onde. Comme les sources fictives utilisées pour résoudre les conditions aux limites dépendent de la variation locale du champ de pression, la fréquence spatiale maximale pour la représenter est $f_{\max} = 1/\lambda$.

Ainsi, on peut poser pour la densité linéique d'intensité acoustique complexe sur un segment de frontière de longueur L :

$$q(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} I_m \cos\left(2\pi m \frac{x}{2L}\right), \quad (7)$$

on prend en compte le cas général où la densité n'est pas la même aux deux extrémités ($q(0) \neq q(L)$) et la fréquence spatiale associée à une valeur de m donnée est $f_m = m/2L$. La position d'un point sur une ligne de longueur L peut être décrite par un paramètre $\mu \in [0, 1]$ tel que $x = \mu L$ d'où $dx = Ld\mu$. On peut donc exprimer finalement la densité de sources par :

$$q(x) = \sum_{m=0}^{m_{\max}} I_m \cos\left(\pi m \frac{x}{L}\right) = \sum_{m=0}^{m_{\max}} I_m \cos(\pi m \mu) \quad (8)$$

avec $I_m \in \mathbb{C}$, $x \in [0, L]$, $m_{\max} = 2L/\lambda$.

Du fait de la linéarité, la pression résultante en un point P quelconque de Ω pourra s'écrire :

$$p(P) = \int_{AB} q(x) \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kd) dx(P) \quad (9)$$

avec $d = PM(\mu) = d(\mu)$ soit

$$p(P) = \sum_m I_m \frac{iL}{4} \int_0^1 \cos(\pi m \mu) H_0^{(1)}(kd(\mu)) d\mu \quad (10)$$

Le terme $\frac{\partial p}{\partial n} - ik\beta p$ qui doit être rendu égal à 0 sur

l'ensemble de la frontière du domaine, donc en particulier en chaque point de contrôle, est linéaire selon la pression ; c'est donc la somme de la contribution de la source principale en champ libre, qu'on peut écrire $\frac{\partial p_0}{\partial n} - ik\beta p_0$,

et de la contribution des différentes nappes de sources (aussi bien celle qui coïncide avec le segment de frontière concerné que celles des autres nappes) qui est une combinaison linéaire des $(I_m)_{0 \leq m \leq m_{\max}}$ sous la forme

$$\left(\frac{\partial p}{\partial n} - ik\beta p\right)(P_i) = \sum_m I_m R_{i,m} \quad (11)$$

dont les coefficients $R_{i,m}$ résultent de la combinaison du calcul du champ qui précède et du schéma discret utilisé pour la dérivée. Pour respecter la condition aux limites, on aura donc :

$$\forall i \quad \left(\frac{\partial p_0}{\partial n} - ik\beta p_0\right)(P_i) + \sum_m I_m R_{i,m} = 0 \quad (12)$$

soit sous forme matricielle : $[R_{i(source)}] + [R_{i,m}][I_m] = 0$ donc il suffit de résoudre le système linéaire de l'Eq. (13) pour déterminer les $(I_m)_{0 \leq m \leq m_{\max}}$.

$$[R_{i,m}][I_m] = -[R_{i(source)}] \quad (13)$$

Le champ global solution de l'équation d'Helmholtz est alors obtenu dans l'ensemble du domaine par le calcul de la somme des champs issus de la source réelle et des nappes de sources ainsi déterminées. Comme dans le cas d'une BEM, la méthode des nappes ne nécessite pas de maillage du domaine complet et s'accommode de frontières ouvertes, la condition de Sommerfeld à l'infini étant naturellement réalisée pour chaque source ponctuelle, donc pour leur superposition.

2 Validation de la méthode

La méthode des nappes a été appliquée à trois cas caractéristiques et comparée aux solutions exactes obtenues selon différentes formules théoriques.

2.1 Diffraction sur un écran semi-infini

La configuration précédente a été reprise ; elle permet de tester la méthode des nappes en propagation, en réflexion sur la partie visible de la source, en diffraction dans la zone d'ombre. Pour la solution approchée, la longueur de l'écran nécessairement limitée a été prise égale à 200 mètres.

Le champ obtenu (voir Figures 3 et 4) est très sensiblement identique dans les deux cas, si l'on excepte le phénomène de « bulles » artificiellement produites par la solution exacte et quelques écarts ponctuels dans la zone des interférences causées par l'écran du côté visible de la source, où les fluctuations de pression sont particulièrement importantes. L'écart en intensité entre la solution exacte et la solution approchée par la méthode des nappes est inférieure à 1 dB sur la quasi-totalité du domaine considéré.

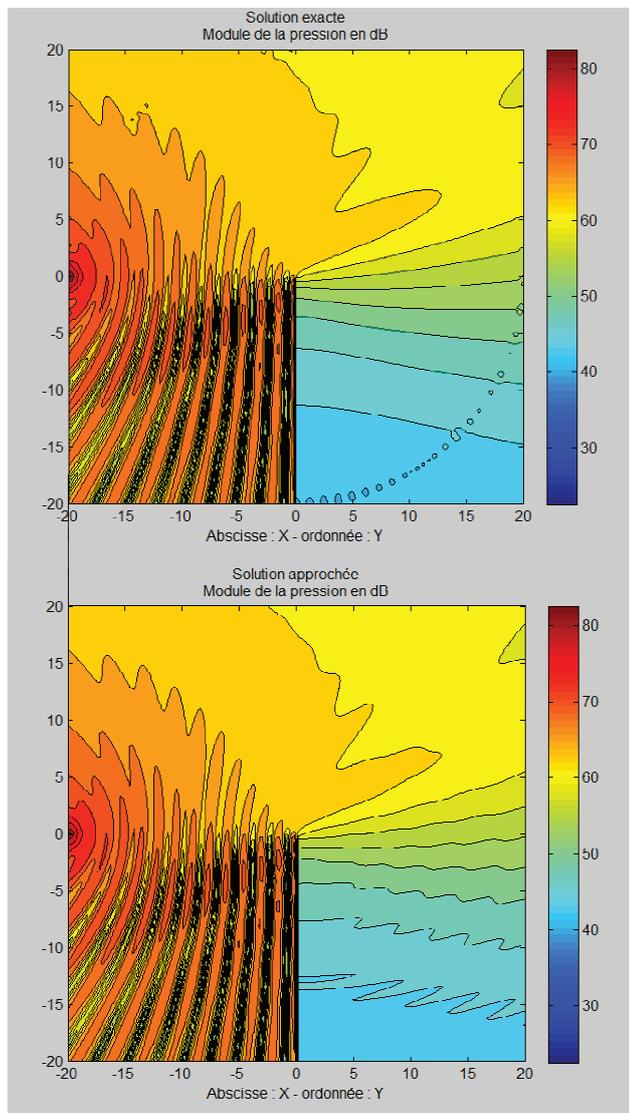


FIGURE 3 : Cas de l'écran semi-infini. Cartographie du module de la pression pour la solution exacte (en haut) et la solution calculée (en bas).

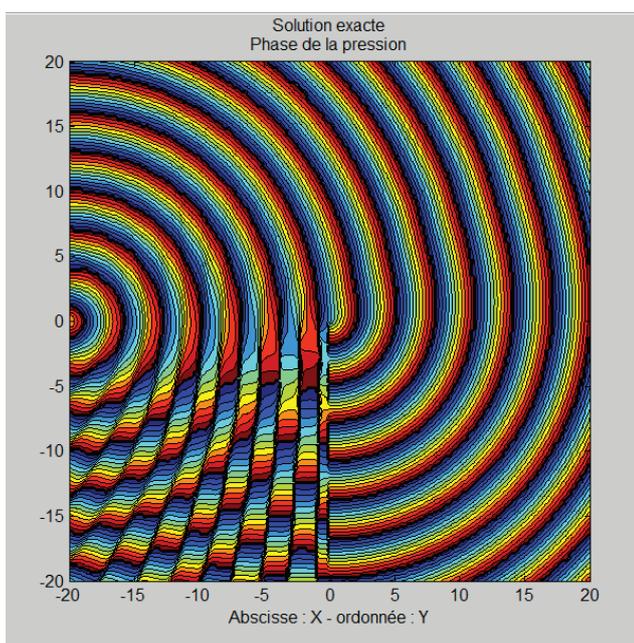


FIGURE 4 : Cas de l'écran semi-infini. Cartographie de la phase de la pression pour les solutions exacte et calculée.

Les cartographies de phase sont indiscernables entre les deux solutions. Dans la zone d'ombre, les vaguelettes qui apparaissent sur les lignes de niveaux dans la solution approchée ne sont pas des erreurs de calcul, mais traduisent au contraire le phénomène physique de diffraction de l'onde sur l'extrémité basse de l'écran.

2.2 Modes propres d'une salle

En acoustique des salles, la résolution de l'équation d'Helmholtz est particulièrement utile pour détecter, en particulier dans le bas du spectre sonore, les fréquences et configurations spatiales des modes propres des salles ([3], chapitre 3).

En supposant les parois de la salle parfaitement réfléchissantes, dans le cas bidimensionnel pour une cavité de dimension $L_x \times L_y$, chaque mode est identifié par un couple (m, n) , où les entiers m et n correspondent au

nombre de minima du module de la pression à la résonance du mode respectivement selon la longueur L_x et la largeur L_y . La fréquence correspondante est donnée par

la formule $f = (a/2) \sqrt{(m/L_x)^2 + (n/L_y)^2}$, a désignant la vitesse du son.

Une salle rectangulaire de 8 mètres x 5 mètres a été choisie. Pour chaque longueur d'onde λ , on a disposé la source dans le coin de coordonnées (0,0) à une distance égale à $\lambda/32$ des deux parois, et on a calculé la pression dans les trois autres coins à la même distance des parois.

Aux basses fréquences, comme les valeurs par défaut conduisaient en effet à une discrétisation trop sommaire de la géométrie, des valeurs minimales ont été définies.

Dans un premier temps, un balayage en fréquence a été effectué entre 20 Hz et 500 Hz avec un pas de 0,1 Hz afin d'obtenir la fonction de transfert entre la source et les trois « microphones ». Les pics d'amplitudes des trois courbes obtenues ont été identifiés par programme et comparés aux modes propres théoriques.

Dans un second temps, le champ acoustique dans la salle a été calculé et visualisé pour les fréquences de résonance obtenues ; une transformée de Fourier inverse bidimensionnelle effectuée sur l'amplitude des champs obtenus a permis de mettre en évidence les modes propres (m, n) correspondant à chaque résonance, et de vérifier leur concordance avec la théorie.

Lorsque l'on met en correspondance les fréquences des résonances des coins et celles des modes propres associés, on observe sur l'ensemble de la plage de fréquences étudiée un écart généralement de l'ordre de 0,1 à 0,2 Hz et qui dépasse rarement 0,5 Hz. Le Tableau 1 montre, à titre d'exemple, entre 280 Hz et 300 Hz, la correspondance entre la fréquence théorique des modes propres et les fréquences des résonances obtenues dans chacun des coins par le calcul.

On remarque que jusqu'au mode propre de 163,3 Hz ($m = 6, n = 3$), les résonances correspondant à un mode propre donné sont observées dans les trois coins avec la même amplitude, et c'est également le cas pour la plus grande partie des modes supérieurs. Par ailleurs, une seule résonance peut être observée pour plusieurs modes propres théoriques, lorsque ceux-ci sont proches en fréquence, ce

qui correspond évidemment à ce qui pourrait être observé expérimentalement dans une salle réelle.

La cartographie du champ de pression fournie par la méthode des nappes pour chacune des résonances observée confirme donc à la fois la validité de la détection des modes propres théoriques et la conformité avec ce qu'on pourrait attendre d'une étude expérimentale dans les mêmes conditions.

TABLEAU 1 – Résonances entre 205 Hz et 225 Hz

| Fréq. Propres calculées (Hz) | | | Modes propres théoriques | | |
|------------------------------|------------|------------|--------------------------|----|---|
| Coin (8,0) | Coin (8,5) | Coin (0,5) | Fréq. (Hz) | m | n |
| 205 | 205 | 205 | 205,1 | 1 | 6 |
| 208,1 | 208,2 | 208,3 | 208,4 | 2 | 6 |
| 212,5 | 212,2 | 212,3 | 212,5 | 6 | 5 |
| | | | 212,5 | 10 | 0 |
| 213,4 | 213,6 | 213,7 | 213,7 | 3 | 6 |
| 215 | 215,2 | 214,9 | 215,2 | 10 | 1 |
| 217,3 | 216,3 | 216,8 | 216,7 | 9 | 3 |
| | 217,4 | | 217,7 | 8 | 4 |
| 220,9 | 220,8 | 220,8 | 221 | 4 | 6 |
| 223 | 222,9 | 223 | 223,1 | 10 | 2 |

En particulier, lorsqu'un mode propre est suffisamment espacé des autres en fréquence, le champ obtenu par le calcul est tout à fait conforme à la cartographie théorique du mode ; c'est par exemple le cas (Figure 5) de la fréquence 220,8 Hz pour un mode propre théorique ($m = 4$, $n = 6$) à 221 Hz. Lorsque, au contraire, plusieurs modes propres sont rapprochés en fréquence, la transformée de Fourier spatiale bidimensionnelle inverse du champ met en évidence la présence effective des modes concernés dans le champ calculé, qui n'en est que la superposition ; c'est l'exemple de la Figure 6 : à la fréquence 215,2 Hz, les deux modes voisins ($m = 3$, $n = 6$) et ($m = 9$, $n = 3$) respectivement de fréquences théoriques 213,7 Hz et 216,7 Hz se superposent au mode ($m = 10$, $n = 1$) prépondérant.

Au-delà de la concordance des modes propres en fréquence, la simulation fournit toutefois des résultats en amplitude qui posent problème. En effet, si les parois sont parfaitement réfléchissantes, l'amplitude du champ est théoriquement infinie puisque l'énergie fournie par la source ne peut pas s'évacuer hors de la salle. Au contraire, dans la résolution par la méthode des nappes, on substitue aux frontières du domaine une répartition de sources, placées en champ libre comme la source réelle. Donc le champ résultant ne peut devenir infini dans aucun ouvert du domaine en dehors des singularités liées aux sources. Par contre, il y a bien alors une fuite d'énergie acoustique vers l'infini de l'ensemble des sources, que l'on peut considérer comme équivalente à une dissipation à l'intérieur du domaine, un point qu'il conviendra d'élucider.

3.3 Simulation d'un tube de Kundt

Dans les cas précédemment testés, on a toujours supposé les parois parfaitement réfléchissantes, avec la valeur de l'admittance β supposée nulle. Toutefois, dans le cadre

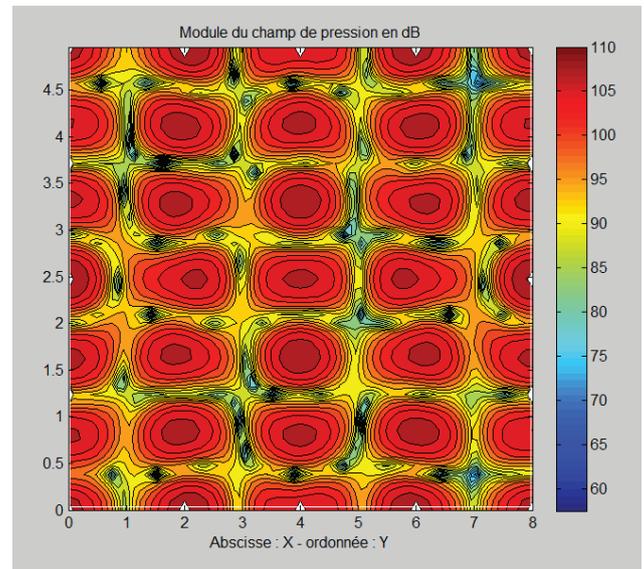


FIGURE 5 : Mode propre à 220,8 Hz. Cartographie du module du champ, montrant le mode (4,6).

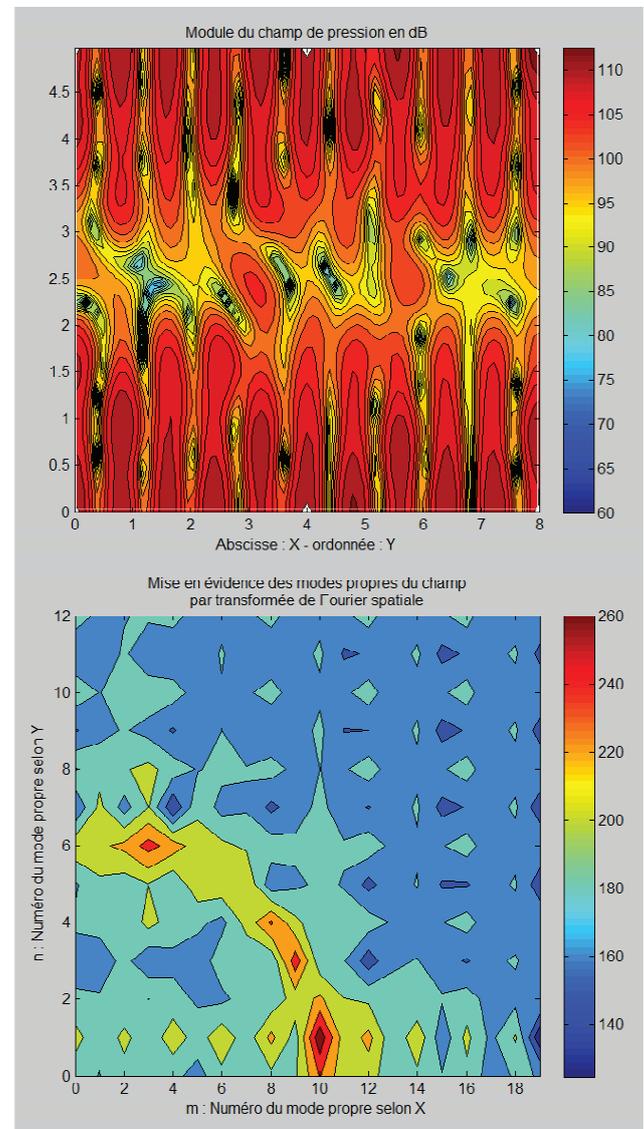


FIGURE 6 : Mode propre à 215,2 Hz. En haut, la cartographie du module du champ montre le mode (10,1) identifiable mais fortement perturbé. En bas, le module de la transformée de Fourier spatiale fait apparaître les autres modes (3,6) et (9,3).

de l'acoustique architecturale, il est important de pouvoir simuler des coefficients d'absorption énergétiques de parois α jusqu'à des valeurs qui peuvent dépasser 0,8, donc des valeurs d'admittance complexe de module compris au moins dans l'intervalle $[0,1]$.

Afin de déterminer si le champ acoustique calculé par la méthode des nappes pouvait être représentatif du champ réel en présence de parois absorbantes, le champ acoustique à l'intérieur d'un tube de Kundt a été simulé en supposant la présence d'un échantillon à mesurer d'impédance complexe supposée inconnue mais donnée. On a ensuite reproduit pour chaque fréquence la méthode classique ([4], chapitre 7) de mesure du coefficient de réflexion sous incidence normale qui consiste à déplacer un microphone à l'intérieur du tube afin de repérer les maximum et minimum de pression efficace les plus proches de l'échantillon, ainsi que la position de ce dernier ; on en déduit la valeur de l'impédance complexe identifiée β_{ident} , ce qui permet de la comparer en amplitude et en phase avec la valeur à identifier β_{inc} .

Dans cette simulation bidimensionnelle, on a pris l'équivalent d'un tube sous la forme d'une cavité de section $L \times D$; les limitations en fréquence dues à ces dimensions sont identiques à celle d'un tube classique. L'échantillon étant placé à une extrémité, on suppose simplement la cavité ouverte à l'autre extrémité et la source disposée à cet endroit. On a adopté pour la simulation des dimensions typiques d'un tube de Kundt : $L = 1 \text{ m}$ et $D = 10 \text{ cm}$, la plage de fréquences adaptées étant alors d'environ 85 Hz à 1700 Hz.

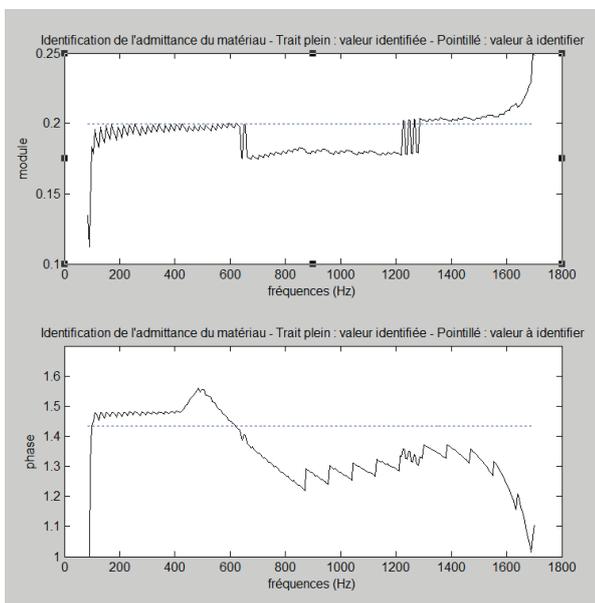


FIGURE 7: Comparaison pour un échantillon entre l'admittance à identifier (pointillé) et l'admittance identifiée (trait plein) obtenue à partir du champ calculé en module et en phase. Ici $|\beta_{inc}| = 0,2$.

Compte tenu des dimensions réduites du tube, il a fallu ajuster la méthode pour la paroi supposée représenter l'échantillon, afin de représenter la condition aux limites cruciale dans cette expérience numérique. 5 points de contrôle ont été régulièrement espacés entre eux et avec les parois latérales de 0,033 m environ, les autres paramètres étant pris identiques aux autres parois. Le pas des points de

calcul de la pression le long du tube a été fixé à $\lambda/256$ pris au milieu de la cavité, La plage de fréquences [85 Hz ; 1700 Hz] est balayée avec un pas de 5 Hz ; le programme tire au départ aléatoirement une valeur β_{inc} de l'impédance complexe supposée de l'échantillon dont on peut toutefois imposer le module.

Plusieurs essais ont été ainsi effectués. On observe que la précision obtenue avec la méthode des nappes est variable selon la valeur de β_{inc} ; un exemple typique est donné sur la Figure 7. Les valeurs estimées par le programme sont correctes en module sur l'ensemble de la plage de fréquences avec des écarts inférieurs à 0,1 ; la phase est également proche de la valeur cible. L'adéquation est très bonne jusqu'à 600 Hz environ pour le module, 400 Hz pour la phase ; une dérive tend à se produire au dessus de ces fréquences. Ces petits écarts peuvent être dus à l'imprécision dans la détection des minima en valeur et en position, malgré la finesse du pas de calcul du champ utilisé. Il est également possible que la limitation à 5 du nombre de points de contrôle sur la face de l'échantillon entraîne un peu d'imprécision à haute fréquence.

4 Conclusion

Les principes d'une nouvelle méthode désignée ici par « méthode des nappes de sources » ont été établis ; elle prend en compte localement les conditions aux limites de frontière par le biais d'une répartition surfacique de sources dans l'espace. Après avoir détaillé la procédure et les paramètres pertinents pour appliquer cette méthode, trois cas typiques de champs acoustiques bidimensionnels qui relèvent directement de l'équation d'Helmholtz ont été examinés : l'écran semi-infini, les modes propres d'une cavité bidimensionnelle, le tube de Kundt. Ces trois cas constituent des exemples classiques des phénomènes fondamentaux de l'acoustique : la propagation, la réflexion sur une paroi d'admittance quelconque, et la diffraction.

Ces simulations ont montré que la méthode des nappes était effectivement susceptible, sans précautions particulières, de représenter avec précision les caractéristiques du champ acoustique en module et en phase sur une large plage de fréquences, ce qui en valide le principe pour des applications en acoustique environnementale.

Au-delà de cette étude exploratoire, il conviendra de vérifier la possibilité d'adapter la méthode des cas tridimensionnels, très exigeants en volume de calcul.

Références

- [1] U. Iturrarán-Viveros, R. Vai, F.J. Sánchez-Sesma, *Diffraction of SH cylindrical waves by a finite crack : an analytical solution*, Geophys. J. Int **181**, 1634-1642 (2010).
- [2] F. Mechel, *Room Acoustical Fields*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (2013).
- [3] H. Kuttruff, *Room Acoustics*, 5^{ème} édition, Spon Press, Abingdon (2009).
- [4] S. Léwy, *Acoustique industrielle et aéroacoustique*, Hermès Science Publications, Paris (2001).