

CFA '18 LE HAVRE ■ 23-27 avril 2018
14^{ème} Congrès Français d'Acoustique



Identification du module d'Young complexe d'une poutre courbe en utilisant une méthode inverse couplée à un opérateur éléments finis

P. Bottois, F. Ablitzer, N. Joly et C. Pézerat
LAUM - UMR CNRS 6613, Avenue Olivier Messiaen, 72085 Le Mans, France
paul.bottois@univ-lemans.fr

L'identification des propriétés élastiques et d'amortissement est un défi pour la fabrication de matériaux composites, qui peuvent avoir des formes complexes. Une nouvelle approche basée sur la Résolution Inverse Fenêtrée Filtrée a été développée pour identifier les paramètres structuraux à partir de l'équation locale du mouvement. Pour des structures dont un modèle analytique est connu. Cette méthode a déjà été validée. Ce travail présente une approche similaire pour étendre la méthode précédente à des structures qui ne peuvent pas être décrites avec un modèle analytique. La connaissance de ce modèle est alors remplacée par un opérateur élément fini (EF). Dans ce papier, l'identification du module d'Young complexe à partir d'un champ de déplacement mesuré est montrée en utilisant un modèle EF. Les problèmes venant du bruit de mesure sont traités par une approche probabiliste couplée à une minimisation de résidu. La méthode est illustrée sur une poutre courbe en utilisant des déplacements simulés numériquement.

1 Introduction

Le comportement vibroacoustique des structures en matériaux composites est difficile à appréhender numériquement, car la prise en compte des propriétés de chaque constituant du matériau impose des modèles de taille trop importante pour pouvoir être exploités. La réduction des modèles développés à partir de caractéristiques homogénéisées des matériaux est souvent prise en compte mais l'obtention de ces caractéristiques pose encore beaucoup de difficultés.

Les méthodes classiques pour identifier les paramètres structuraux peuvent être divisées en quatre catégories. La première catégorie de méthodes concerne les méthodes très basses et basses fréquences, dites aussi méthodes statiques ou quasi-statiques. Elles se basent sur la théorie élastique linéaire des matériaux, connue sous le nom de loi de Hooke [1]. Ces méthodes sont robustes, mais elles ne permettent d'évaluer la dépendance fréquentielle des propriétés. La deuxième méthode concerne les méthodes basées sur l'analyse modale [2]. Elles reposent sur l'identification des fréquences naturelles et du ratio d'amortissement modal pour estimer le module d'Young et le facteur de perte du matériau. La troisième classe de méthode est basée sur la méthode des éléments finis (EF). Le principe est de modéliser une structure et de comparer les paramètres modaux obtenus numériquement (comme les fréquences propres et les déformées modales) avec ceux mesurés sur une structure réelle. L'identification des paramètres structuraux est réalisée par la mise à jour du modèle EF jusqu'à la correspondance avec les données expérimentales [3]. La dernière famille comprend les méthodes hautes fréquences, aussi connues sous le nom des méthodes ultrasonores [4], lesquelles sont utilisées pour obtenir une cartographie spatiale des propriétés des matériaux.

La méthode RIFF (Résolution Inverse Filtrée Fenêtrée) commence à être développée dans les années 1990 par Pézerat [5]. Elle est aussi connue sous le nom anglais de Force Analysis Technique (FAT). Elle est basée sur la vérification de l'équation locale du mouvement de la structure. Par conséquent, la procédure d'identification peut être appliquée localement et ne nécessite pas la connaissance du champ de vibration à l'extérieur de la zone étudiée. A partir de la mesure du champ local de vibration, elle permet d'obtenir la distribution des efforts extérieurs présents sur la structure. Pour discrétiser l'équation locale du mouvement, la méthode RIFF est basée sur un schéma aux différences finies. Le calcul des dérivées spatiales amplifie considérablement le bruit de mesure, une régularisation est alors nécessaire. Dans ce cas, la régularisation est assurée

par un fenêtrage spatial associé à un filtre passe-bas de la distribution de force calculée. Le principal avantage de cette méthode est le peu d'information qu'elle requière : l'équation locale du mouvement et le champ local des déplacements. Originellement, la méthode fut développée seulement pour identifier les sources sur une structure, pour lesquelles une équation analytique du mouvement existe, comme les poutres [6], les plaques [7] et les coques [8].

L'extension de cette méthode pour la rendre compatible à des structures plus complexes fut développée par Renzi [9] en utilisant une formulation éléments finis (EF) du problème inverse. Cette variante de la méthode permet d'identifier les chargements nodaux sur un maillage EF à partir d'un champ de déplacements mesuré. Elle a été validée expérimentalement sur une poutre en flexion et une plaque.

Une autre variante de la méthode RIFF a pour but d'identifier les propriétés des matériaux (raideur et amortissement). Elle est basée sur la vérification de l'équation locale du mouvement dans une zone de la structure où aucune force extérieure ne s'applique. Cette méthode est indépendante des conditions limites et permet l'identification des propriétés structurelles pour une large bande de fréquence et pas seulement aux résonances. La capacité de cette méthode à fournir une cartographie des propriétés a été expérimentalement démontrée en considérant une plaque composite contenant des patches d'un matériau amortissant [10]. Wassereau [11] a étendu cette approche pour caractériser les paramètres structuraux d'une poutre épaisse utilisant le modèle de Timoshenko. Il a alors estimé le module d'Young complexe ainsi que le module de cisaillement complexe.

Récemment, les deux variantes mentionnées précédemment ont été couplées pour tenter d'identifier les propriétés mécaniques de structures ayant une géométrie complexe, en utilisant un opérateur EF. Une preuve de concept a été présentée sur une poutre droite [12]. L'estimation du module d'Young complexe a été démontrée avec des données numériques et expérimentales. La régularisation du problème inverse est traitée par une approche probabiliste inspirée des travaux de Faure [13].

Dans ce papier, cette approche est étendue au cas de la poutre courbe, dans lequel un couplage entre les déformations de flexion et de membrane apparaît. Dans une première partie, le principe général de la méthode d'identification est présentée. Puis l'approche proposée est démontrée en utilisant un champ de déplacements simulé numériquement. Pour finir, les effets du bruit seront illustrés et une approche probabiliste est proposée pour ajuster automatiquement le niveau de régularisation.

2 Technique d'identification

Après le précédent développement de la méthode sur une poutre droite [12], le cas considéré maintenant est une poutre courbe. La différence essentielle entre ces deux cas est l'apparition d'un couplage entre les composantes de traction et de flexion du champ de déplacement. En conséquence, deux modules d'Young doivent être identifiés, l'un gouvernant la raideur de traction E_t et l'autre gouvernant la raideur de flexion E_f .

Considérons le problème dynamique d'une poutre d'Euler-Bernouilli de longueur L_g , d'épaisseur h , de largeur b , de section $S = h.b$ et de moment quadratique $I_z = b.h^3/12$. Les propriétés des matériaux sont sa masse volumique ρ , son module d'Young de traction complexe $\tilde{E}_t = E_t(1 + j \cdot \eta_t)$, où E_t le module d'Young de traction, η_t , le facteur de perte de traction et j , l'unité imaginaire; et son module d'Young de flexion $\tilde{E}_f = E_f(1 + j \cdot \eta_f)$, où E_f le module d'Young de flexion, η_f , le facteur de perte de flexion.

Une excitation harmonique à la pulsation ω est considérée. La poutre est modélisée par la Méthode des Éléments Finies (MEF). Le maillage est composé de N nœuds, correspondant à $N_{DDL} = 3N$ Degrés De Liberté (DDL) et $N_e = N - 1$ éléments. Le système général écrit sous forme matriciel est [14] :

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (1)$$

où \mathbf{M} est la matrice de masse, \mathbf{K} est la matrice de raideur, \mathbf{u} est le vecteur de réponse correspondant aux déplacements nodaux et aux rotations et \mathbf{f} est le vecteur des forces externes et des moments.

Les matrices \mathbf{M} et \mathbf{K} sont calculées à partir des matrices élémentaires \mathbf{M}^e et \mathbf{K}^e . Les matrices élémentaires sont basiquement exprimées dans le système de coordonnées locales (x, y) de chaque élément de la poutre (voir Fig. 1) comme [14] :

$$\mathbf{M}^e = \rho S L_e \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13}{35} & \frac{11L_e}{210} & 0 & \frac{9}{70} & -\frac{13L_e}{420} \\ 0 & \frac{11L_e}{210} & \frac{L_e^2}{105} & 0 & \frac{13L_e}{420} & -\frac{L_e^2}{140} \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{70} & \frac{13L_e}{420} & 0 & \frac{13}{35} & -\frac{11L_e}{210} \\ 0 & -\frac{13L_e}{420} & -\frac{L_e^2}{140} & 0 & -\frac{11L_e}{210} & \frac{L_e^2}{105} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

et

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{E}_t S}{L_e} & 0 & 0 & -\frac{\tilde{E}_t S}{L_e} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12\tilde{E}_f I_z}{L_e^3} & \frac{6\tilde{E}_f I_z}{L_e^2} & 0 & -\frac{12\tilde{E}_f I_z}{L_e^3} & \frac{6\tilde{E}_f I_z}{L_e^2} \\ 0 & \frac{6\tilde{E}_f I_z}{L_e^2} & \frac{4\tilde{E}_f I_z}{L_e} & 0 & -\frac{6\tilde{E}_f I_z}{L_e^2} & \frac{2\tilde{E}_f I_z}{L_e} \\ -\frac{\tilde{E}_t S}{L_e} & 0 & 0 & \frac{\tilde{E}_t S}{L_e} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12\tilde{E}_f I_z}{L_e^3} & -\frac{6\tilde{E}_f I_z}{L_e^2} & 0 & \frac{12\tilde{E}_f I_z}{L_e^3} & -\frac{6\tilde{E}_f I_z}{L_e^2} \\ 0 & \frac{6\tilde{E}_f I_z}{L_e^2} & \frac{2\tilde{E}_f I_z}{L_e} & 0 & -\frac{6\tilde{E}_f I_z}{L_e^2} & \frac{4\tilde{E}_f I_z}{L_e} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

où L_e est la longueur de l'élément de poutre.

La matrice de raideur élémentaire (Eq.3) peut être écrite comme :

$$\mathbf{K}^e = \tilde{E}_t \mathbf{K}_t^e + \tilde{E}_f \mathbf{K}_f^e, \quad (4)$$

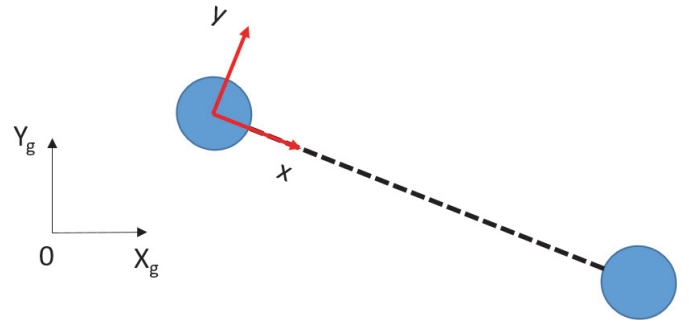


FIGURE 1 – Élément de poutre 2D selon un système d'axe arbitraire.

où

$$\mathbf{K}_t^e = S \begin{bmatrix} \frac{1}{L_e} & 0 & 0 & -\frac{1}{L_e} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L_e} & 0 & 0 & \frac{1}{L_e} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

est la matrice gouvernée par la raideur de traction de l'élément et

$$\mathbf{K}_f^e = I_z \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{L_e^3} & \frac{6}{L_e^2} & 0 & -\frac{12}{L_e^3} & \frac{6}{L_e^2} \\ 0 & \frac{6}{L_e^2} & \frac{4}{L_e} & 0 & -\frac{6}{L_e^2} & \frac{2}{L_e} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12}{L_e^3} & -\frac{6}{L_e^2} & 0 & \frac{12}{L_e^3} & -\frac{6}{L_e^2} \\ 0 & \frac{6}{L_e^2} & \frac{2}{L_e} & 0 & -\frac{6}{L_e^2} & \frac{4}{L_e} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

est la matrice gouvernée par la raideur de flexion de l'élément.

Ces deux matrices sont exprimées dans le respect du système de coordonnées locales (x, y) . Pour obtenir les matrices assemblées de masse et de raideur de l'Eq. (1), les matrices élémentaires doivent être exprimées dans le système de coordonnées globales (X_g, Y_g) . Pour se faire, une matrice de transformation T_e est introduite [14], qui permet de calculer les matrices de masse et de raideur pour chaque élément en fonction du système de coordonnées globales, comme

$$\mathbf{M}_g^e = \mathbf{T}_e^T \mathbf{M}^e \mathbf{T}_e, \quad (7)$$

et

$$\mathbf{K}_g^e = \mathbf{T}_e^T \mathbf{K}^e \mathbf{T}_e = \tilde{E}_t \mathbf{T}_e^T \mathbf{K}_t^e \mathbf{T}_e + \tilde{E}_f \mathbf{T}_e^T \mathbf{K}_f^e \mathbf{T}_e. \quad (8)$$

Comme vu précédemment, la propriété de séparabilité des matrices de raideur élémentaires avec le respect des comportements de membranes et de flexion, n'est pas altérée par le changement de coordonnées.

Puis, les matrices élémentaires exprimées dans le système de coordonnées globales sont assemblées pour créer les matrices \mathbf{K} et \mathbf{M} de l'Eq. (1). Comme ce calcul n'implique que des additions de matrices, cela ne modifie pas la séparabilité des propriétés exprimées par Eq. (4) et propagée dans l'Eq. (8).

Finalement, considérant une partie de la poutre où aucune force ou moment n'est appliquée (c'est-à-dire, où $\mathbf{f} = \mathbf{0}$), l'Eq. (1) peut être réécrite :

$$(\tilde{E}_t \mathbf{K}_t + \tilde{E}_f \mathbf{K}_f - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (9)$$

TABLEAU 1 – Propriétés géométriques et de matériaux pour la poutre simulée et caractéristiques d'excitation.

| | | |
|---------------------------------------|---|---|
| Longueur L_g (m) | Largeur b (m) | Épaisseur h (m) |
| 1 | 0.01 | 0.001 |
| Moment quadratique I (m^4) | Masse Volumique ρ (kg/m^3) | Module d'Young de traction E_t (GPa) |
| $b \cdot h^3/12$ | 2700 | 75 |
| Facteur de perte de traction η_t | Facteur de perte de flexion η_f | Module d'Young de flexion E_f (GPa) |
| 0.1 % | 0.1 % | 70 |
| Pas spatial L_e (m) | Fréquence (Hz) | Amplitude d'excitation $ F_{X_g} $ et $ F_{Y_g} $ (N) |
| 0.01 | 5000 | 1 |
| Emplacement de l'excitation x_0 (m) | Zone d'observation $[x_1; x_2]$ (m) selon l'abscisse curviligne | |
| 0.1 | [0.3 ; 0.8] | |

où \mathbf{K}_t et \mathbf{K}_f représentent respectivement les matrices assemblées gouvernées par la raideur de traction et par la raideur de flexion. Cette équation peut être réécrite sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_t \mathbf{u} & \mathbf{K}_f \mathbf{u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_t \\ \tilde{E}_f \end{bmatrix} = \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{u}. \quad (10)$$

L'Eq. (10) indique que les deux modules d'Young \tilde{E}_t et \tilde{E}_f peuvent être identifiés en utilisant une régression linéaire si les déplacements et rotations nodaux \mathbf{u} sont connus.

3 Simulation numérique

3.1 Problème direct calculé par FEM

Dans cet paragraphe, une solution de référence est calculée en utilisant la MEF. Une poutre courbe encastrée-encastrée est considérée (Fig. 2), dont les caractéristiques sont données dans le tableau 1.

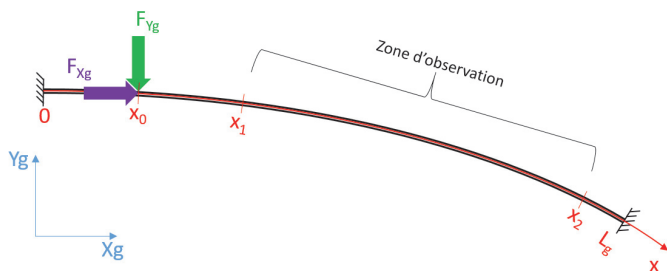


FIGURE 2 – Géométrie de la poutre utilisée pour la simulation numérique.

Le champ de déplacement \mathbf{u} (déplacements et rotations) est calculé pour une abscisse discrétisée et délimitée par $x \in [0, 3; 0, 8]$ m, dans une zone qui n'est pas excitée directement par une force ou un moment externe (voir Fig. 3).

Le champ de déplacement est ensuite détérioré avec un bruit,

$$\mathbf{u}_{bruité} = \mathbf{u} + 10^{-\frac{SNR}{20}} \boldsymbol{\alpha}, \quad (11)$$

où $\mathbf{u}_{bruité}$ est le vecteur des déplacements bruités, $\boldsymbol{\alpha}$ est une variable aléatoire Gaussienne de moyenne nulle avec une variance unitaire et un Rapport Signal sur Bruit imposé à 40 dB.

3.2 Problème inverse

L'objectif de ce problème inverse est l'identification des modules d'Young complexes \tilde{E}_t et \tilde{E}_f à partir du champ de déplacements mesuré. Dans un premier temps, la faisabilité de la méthode proposée avec les données exactes est montrée. Puis le problème venant de la mesure bruitée sera illustrée. Dans la section suivante, une procédure de régularisation permettant l'identification des modules d'Young sera proposée.

Comme vu précédemment, le problème inverse est basé sur la vérification de l'équilibre entre les termes de raideur et d'inertie de l'Eq. (1) dans une zone où aucun effort ne s'applique. Cela signifie que l'Eq. (9) est vérifiée. Un premier problème issu de l'utilisation pratique de l'Eq. (9) d'un sous-domaine de la poutre concerne l'existence d'effort aux frontières de la zone étudiée (Figure 4). Ces efforts correspondent aux forces et aux moments exercés par les éléments adjacents de chaque côté de la zone étudiée. La partie gauche de l'Eq. (9) a comme valeur calculée zéro partout, exceptée aux frontières comme montrée sur la Figure 4.

Un moyen d'éviter ces efforts résiduels est de tronquer les matrices de masse et de raideur, en retirant les trois premières et les trois dernières lignes. Cela correspond à ignorer les trois efforts externes (deux forces et un moment) à chaque extrémité. Cela assure que l'Eq. (9) est bien vérifiée (voir Figure 4). Dans la suite du document, les matrices tronquées sont simplement notées \mathbf{K}_t , \mathbf{K}_f et \mathbf{M} pour garder une bonne lisibilité.

3.3 Principe de la régularisation

Dans cette partie, une approche probabiliste est introduite pour régulariser le problème inverse quand les données bruitées sont considérées.

Prenant en compte explicitement le bruit venant des mesures, le vecteur d'observation peut être écrit comme

$$\mathbf{u}_{bruité} = \mathbf{u} + \mathbf{n}, \quad (12)$$

où \mathbf{n} désigne le vecteur de bruit. Considérant un bruit blanc, la probabilité de \mathbf{n} peut être décrit par

$$[\mathbf{n}] \sim \mathcal{N}_c(\mathbf{0}, \sigma_n^2 \cdot \mathbf{I}), \quad (13)$$

laquelle représente une distribution Gaussienne multidimensionnelle de moyenne nulle et de variance σ_n^2 . Substituant

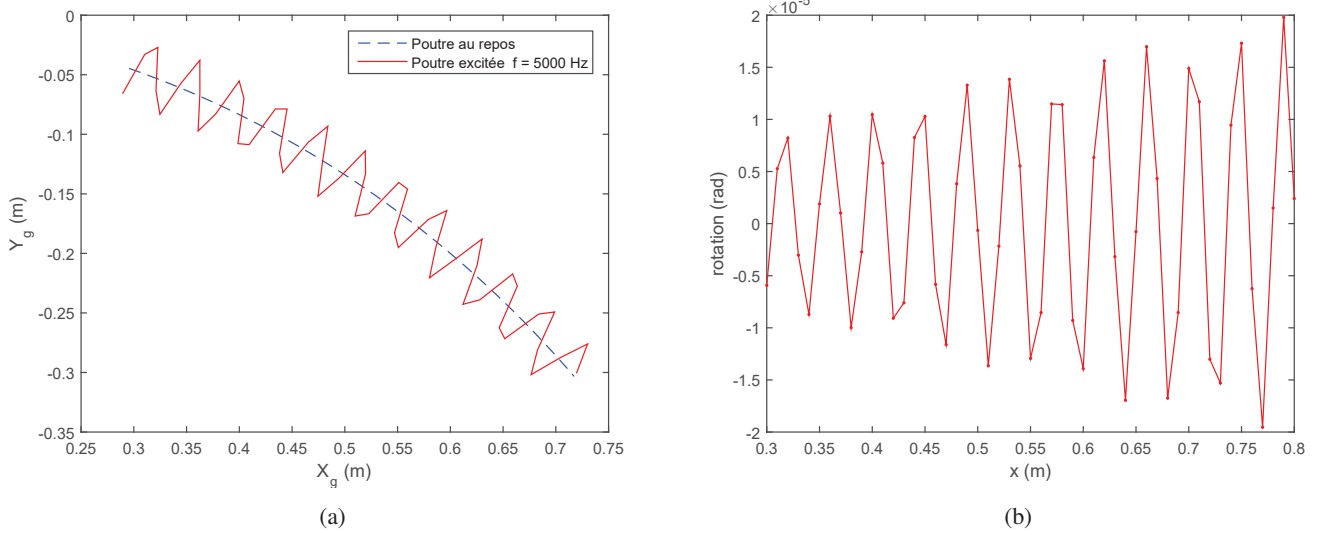


FIGURE 3 – Déplacements dans la zone d’observation : (a) Déplacement (échelle $\times 1000$) dans le système d’axe global, (b) Rotation selon le repère curviligne de la poutre.

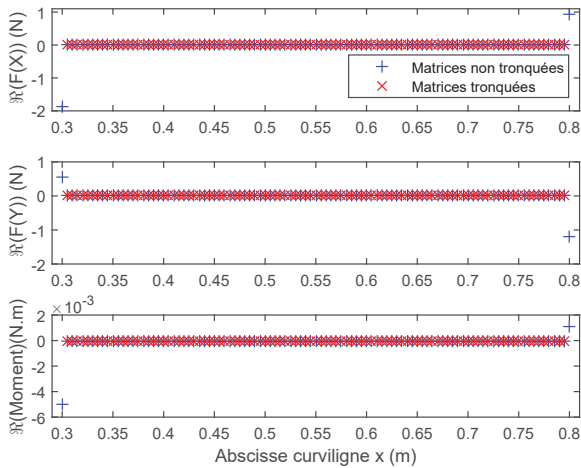


FIGURE 4 – Efforts externes sur la poutre calculés à partir de la partie gauche de l’Eq. (9), utilisant les matrices non-tronquées et tronquées.

l’Eq. (13) dans l’équation d’observation Eq. (12), cela donne la probabilité des déplacements exacts

$$[\mathbf{u}] \sim \mathcal{N}_c(\mathbf{u}_{bruité}, \sigma_n^2 \cdot \mathbf{I}), \quad (14)$$

Il a été observé que le calcul de $\mathbf{K}_t \mathbf{u}_{bruité}$ et $\mathbf{K}_f \mathbf{u}_{bruité}$ est responsable de l’instabilité du problème inverse, car ses termes amplifient drastiquement le bruit mesuré (ce résultat n’est pas montré dans ce papier par souci de concision). Pour cette raison, la procédure de régularisation consiste à estimer le terme

$$\delta = \tilde{E}_t \mathbf{K}_t \mathbf{u} + \tilde{E}_f \mathbf{K}_f \mathbf{u}. \quad (15)$$

Cela peut être fait en combinant l’information probabiliste de deux équations. La première équation correspond à l’estimation directe de δ à partir des déplacements bruités. Substituant l’Eq. (14) dans l’Eq. (15), la probabilité de δ est

$$[\delta] \sim \mathcal{N}_c(\tilde{E}_t \mathbf{K}_t \mathbf{u}_{bruité} + \tilde{E}_f \mathbf{K}_f \mathbf{u}_{bruité}, (\tilde{E}_t \mathbf{K}_t + \tilde{E}_f \mathbf{K}_f) \sigma_n^2 (\tilde{E}_t \mathbf{K}_t + \tilde{E}_f \mathbf{K}_f)^H), \quad (16)$$

où l’indice H désigne la transposée Hermitienne. Une deuxième équation est reliée à un a-priori de vérification de l’Eq. (9), soit

$$\delta = \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{u}. \quad (17)$$

Substituant l’Eq. (14) dans l’Eq. (17), il vient

$$[\delta] \sim \mathcal{N}_c(\omega^2 \mathbf{M} \mathbf{u}_{bruité}, (\omega^2 \mathbf{M}) \sigma_n^2 (\omega^2 \mathbf{M})^H). \quad (18)$$

Une estimation régularisée de δ peut alors être obtenue à partir de l’intersection de ces deux probabilités, soit le produit de deux distribution Gaussienne des Eqs. (16) et (18),

$$[\delta] \propto \mathcal{N}_c(\mu_{\delta_1}, \Sigma_{\delta_1}) \cdot \mathcal{N}_c(\mu_{\delta_2}, \Sigma_{\delta_2}), \quad (19)$$

où

$$\begin{cases} \mu_{\delta_1} = \tilde{E}_t \mathbf{K}_t \mathbf{u}_{bruité} + \tilde{E}_f \mathbf{K}_f \mathbf{u}_{bruité} \\ \Sigma_{\delta_1} = (\tilde{E}_t \mathbf{K}_t + \tilde{E}_f \mathbf{K}_f) \sigma_n^2 (\tilde{E}_t \mathbf{K}_t + \tilde{E}_f \mathbf{K}_f)^H \\ \mu_{\delta_2} = \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{u}_{bruité} \\ \Sigma_{\delta_2} = (\omega^2 \mathbf{M}) \sigma_n^2 (\omega^2 \mathbf{M})^H. \end{cases} \quad (20)$$

Le résultat suit lui-même une distribution Gaussienne,

$$[\delta] \propto \mathcal{N}_c(\delta | \mu_\delta, \Sigma_\delta), \quad (21)$$

où le vecteur de moyennes et la matrice de covariance sont donnés par

$$\begin{cases} \Sigma_\delta = (\Sigma_{\delta_1}^{-1} + \Sigma_{\delta_2}^{-1})^{-1} \\ \mu_\delta = \Sigma_\delta (\Sigma_{\delta_1}^{-1} \mu_{\delta_1} + \Sigma_{\delta_2}^{-1} \mu_{\delta_2}). \end{cases} \quad (22)$$

Par la suite, l’estimation du MAP (Maximun A Posteriori) de δ , soit μ_δ , est utilisée. Les Eqs (20) et (22) montre que μ_δ ne dépend finalement pas de σ_n^2 . Par conséquent, aucun a priori sur le niveau de bruit n’est nécessaire pour effectuer la régularisation.

3.4 Résultats régularisés sur des données bruitées

Dans la partie précédente, une estimation régularisée du terme de gauche de l’Eq. (10) a été obtenue. En revanche,

il a été montré dans un précédent papier [12], que le terme $\mathbf{Mu}_{bruité}$ n'est pas très sensible au bruit de mesure. Pour cette raison, une régularisation de ce terme n'est pas recherchée.

Suivant cela et l'Eq. (10), le résultat de $\mu_\delta - \mathbf{Mu}_{bruité}$ devrait être nul, quand les modules d'Young \tilde{E}_t et \tilde{E}_f sont proches de leurs valeurs théoriques. Pour arriver à identifier ces deux modules, une fonction de coût est introduite

$$f(\tilde{E}_t, \tilde{E}_f) = \sum |\mu_\delta - \omega^2 \mathbf{Mu}_{bruité}|^2, \quad (23)$$

où la dépendance de \tilde{E}_t et \tilde{E}_f est portée par le terme μ_δ (voir Eqs (20) et (22)). Le résultat de la fonction de coût peut être interprété comme une indication des efforts résiduels dans la partie droite de l'Eq. (9).

Figure 5 (a) montre le résidu pour différentes valeurs des modules d'Young. Sur cette figure, le déplacement simulé est exact. Un minimum de résidu est clairement obtenu et la courbe atteint un minimum pour la valeur théorique des modules d'Young. Les modules d'Young peuvent alors être correctement identifiés.

Quand du bruit est ajouté aux déplacements, la Figure 5 (a) devient la Figure 5 (b). Les modules d'Young ne peuvent plus être identifiés.

Après la régularisation du terme $\mathbf{K}_t \mathbf{u}_{bruité} + \mathbf{K}_f \mathbf{u}_{bruité}$, la Figure 5 (c) semble présenter une bonne identification pour le module d'Young de flexion \tilde{E}_f , mais pas pour le module d'Young de traction \tilde{E}_t . Cependant, si une recherche de minimum est effectuée, le module d'Young de traction est lui aussi clairement identifié.

La nouvelle méthode développée avec cette régularisation est appliquée sur une large bande fréquentielle, entre 100 Hz et 10000 Hz. La Figure 6 (a) et (b) donne le résultat de l'identification des paramètres structuraux.

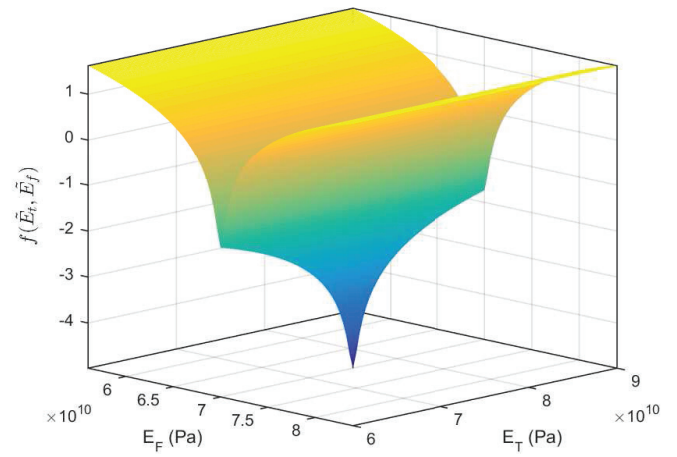
Il peut être observé que le module d'Young de flexion est correctement identifié sur la plage de fréquence excepté pour quelques fréquences singulières, pour lesquelles la structure est excitée sur un point nodale. Pour le module d'Young de membrane, l'identification semble plus compliquée, surtout dans le domaine des basses fréquences. Pour ce qui est du facteur de perte, la Figure 6 (b) montre les difficultés à obtenir un résultats probants.

4 Conclusion

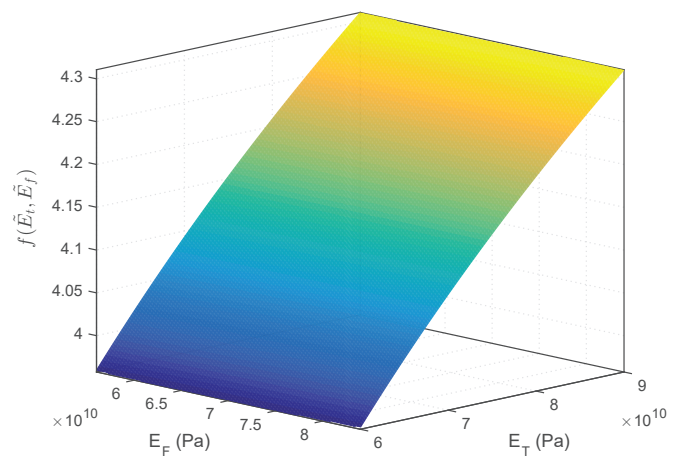
Poursuivant les précédents travaux pour l'identification des propriétés sur une poutre droite, ce papier présentait une extension de cette même méthode pour une poutre courbe, où l'identification des modules d'Young de traction et de flexion était proposée. La méthode développée est basée sur la méthode RIFF couplée à un opérateur FE. L'utilisation de cette méthode est conditionnée par les connaissances de la géométrie de la structure, pour construire les matrices de masse et de raideur, par l'assurance qu'aucune force ne s'applique sur la zone étudiée et par l'obtention du champ de déplacements. Pour surmonter les problèmes dus au bruit, une approche probabiliste couplée à une minimisation de résidu était proposée.

Cette méthode a été validée numériquement sur une poutre pour une large bande de fréquences. Cela a permis d'identifier les modules d'Young de traction et de flexion.

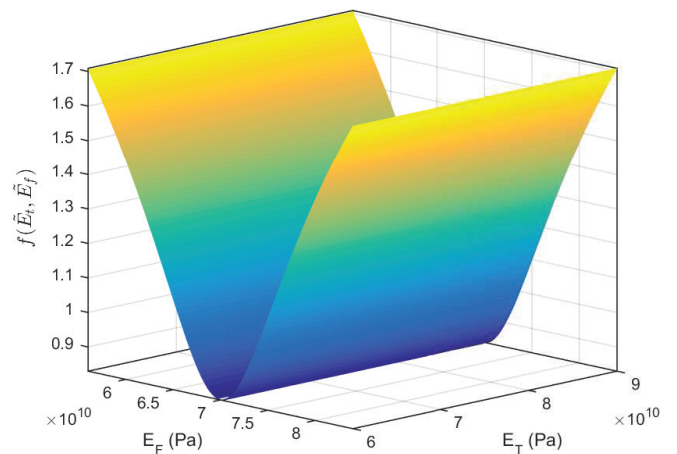
Finalement, les effets de courbures sur les deux modules d'Young équivalents seront étudiés pour proposer un



(a)



(b)



(c)

FIGURE 5 – Représentation des efforts résiduels en fonction des modules d'Youngs pour une fréquence d'excitation de 5000 Hz : (a) Données exactes, (b) Données bruitées non régularisées, (c) Données bruitées régularisées.

opérateur EF simple pour modéliser des structures en matériaux composites.

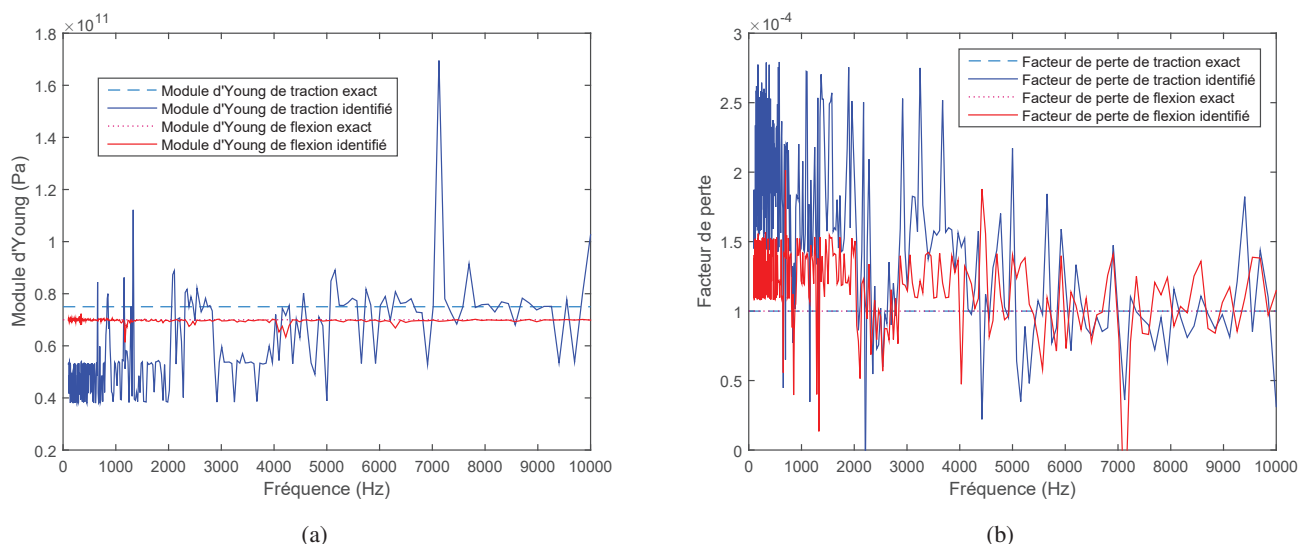


FIGURE 6 – Identification des modules d'Young complexes sur une poutre courbe pour une large bande de fréquences : (a) Modules d'Young en traction et en flexion, (b) Facteur de perte en traction et flexion.

Remerciements

Cette étude a été réalisée dans le cadre du projet RICTUS. Les auteurs tiennent à remercier les membres industriels et académiques de ce projet porté par l'IRT Jules Verne, respectivement le CETIM, Safran Composites et Valeo ainsi que l'Etat français pour les aides d'Etat dont le projet a bénéficié au titre du Programme d'Investissements d'Avenir portant la référence ANR-10-AIRT-02.

Références

- [1] K. P. Menard. *Dynamic Mechanical Analysis : A Practical Introduction*. CRC Press, 2nd edition, 2008.
- [2] D. J. Ewins. *Modal Testing : Theory, Practice and Application*. Research Studies Press, 2nd edition, 2000.
- [3] P. Blaschke and T. Schneider. *Reactionless Test to Identify Dynamic Young's Modulus and Damping of Isotropic Plastic Materials*, pages 511–516. Springer New York, New York, NY, 2014.
- [4] C. Potel, T. Chotard, J-F. de Belleval, and M. Benzeggagh. Characterization of composite materials by ultrasonic methods : modelization and application to impact damage. *Composites Part B : Engineering*, 29(2) :159 – 169, 1998. High Temperature Composites and Interfaces : Analysis, Processing and Characterization.
- [5] C. Pezerat. *Method of identification of forces applied on a vibrating structure, by resolution and regularization of the inverse problem*. Theses, INSA de Lyon, December 1996.
- [6] C. Pézerat and J.-L. Guyader. Two inverse methods for localization of external sources exciting a beam. In *Acta Acustica*, volume 3, pages 1–10, 1995.
- [7] C. Pézerat and J.L. Guyader. Force analysis technique : reconstruction of force distribution on plates. *Acta Acust.*, 86(2) :322–332, 2000.
- [8] M.C. Djamaa, N. Ouelaa, C. Pezerat, and J.L. Guyader. Reconstruction of a distributed force applied on a thin cylindrical shell by an inverse method and spatial filtering. *Journal of Sound and Vibration*, 301(3) :560 – 575, 2007.
- [9] C. Renzi. *Identification expérimentale de sources vibratoires par résolution du problème inverse modélisé par un opérateur éléments finis local*. Theses, INSA de Lyon, December 2011.
- [10] F. Ablitzer, C. Pézerat, J-M. Génevaux, and J. Bégué. Identification of stiffness and damping properties of plates by using the local equation of motion. *Journal of Sound and Vibration*, 333(9) :2454 – 2468, 2014.
- [11] T. Wassereau. *Caractérisation de matériaux composites par problème inverse vibratoire*. phdthesis, Université du Maine, October 2016.
- [12] P. Bottois, N. Joly, C. Pézerat, and F. Ablitzer. Identification of local young's modulus and loss factor of curved beam by using an inverse method and a finite element operator. *INTER-NOISE and NOISE-CON Congress and Conference Proceedings*, 255(5) :2165–2174, 2017.
- [13] C. Faure. *Approches bayésiennes appliqués à l'identification d'efforts vibratoire par la méthode de Résolution Inverse*. PhD thesis, Le Mans Université, 2017.
- [14] M. Géradin and D. Rixen. *Théorie des vibrations, Application à la dynamique des structures*. MASSON, 2è edition, 1996.