

**CFA '18 LE HAVRE ■ 23-27 avril 2018**  
**14<sup>ème</sup> Congrès Français d'Acoustique**



**Modèles simplifiés pour les films acoustiques**

M. Gaborit<sup>a</sup>, O. Dazel<sup>a</sup> et P. Göransson<sup>b</sup>

<sup>a</sup>LAUM UMR CNRS 6613 Le Mans Université, Avenue Olivier Messiaen, 72085 Le Mans Cedex 9,  
France

<sup>b</sup>MWL, KTH Royal Institute of Technology, Drottning Kristinas vägen, SE-10044 Stockholm, Suède  
gaborit@kth.se

Afin d'améliorer la performance acoustique des panneaux absorbants et les protéger dans le temps, les concepteurs ajoutent généralement des films de faible épaisseur en surface du panneau. Dans le cadre de simulations, il est nécessaire de modéliser ces films et leur caractère poreux conduit à utiliser un modèle de fluide équivalent à un matériau de Biot ou même un modèle de Biot complet. Les propriétés des films acoustiques sont particulières et difficiles à caractériser du fait de la faible épaisseur du medium et de ses propriétés mécaniques. Deux questions se posent alors : comment prendre en compte les incertitudes sur les paramètres dans le modèle simulé ; et, peut-on trouver un modèle moins sensible à ces incertitudes. Dans l'optique de répondre à terme à ces questions, il est intéressant de réfléchir à une simplification du modèle de film. L'objectif de ce travail est de réduire le nombre de paramètres nécessaires pour prendre correctement en compte l'effet du film avec un double bénéfice. D'une part, la prise en compte des incertitudes serait facilitée par la réduction du nombre de tirages aléatoires à effectuer ; d'autre part, la caractérisation d'un petit nombre de paramètres permettrait une meilleure précision et reproductibilité. Par des développements asymptotiques et une analyse de l'évolution des nombres d'ondes et ratios d'amplitude du modèle de Biot, une série de simplifications est proposée et testée. Ces simplifications sont introduites dans un modèle en matrices de transfert (TMM) et l'impact sur la contribution des différentes ondes aux différents champs est évaluée. Ce dernier point permet entre autre d'affiner les simplifications et d'identifier les pistes d'amélioration du modèle simplifié.

## 1 Introduction

Le bruit a été depuis longtemps identifié comme ayant un impact majeur sur la vie quotidienne et la santé. Au cours des dernières années, un effort important a été effectué pour développer les systèmes d'atténuation du bruit, tant par les industriels que par les universitaires. Alors que certaines équipes se concentrent sur des approches nouvelles telles que les métamatériaux [1–3], d'autres cherchent à améliorer les systèmes existants. En effet, une des conceptions les plus classiques des absorbeurs acoustiques se compose d'un empilement de couches de matériaux poroélastiques (mousse, panneaux fibreux, etc.) aux propriétés choisies. Ces systèmes multi-couches font l'objet de nombreux travaux depuis des années et aujourd'hui, la communauté poursuit deux objectifs principaux : mieux comprendre les phénomènes physiques en jeu (en particulier avec des matériaux anisotropes [4, 5]) et optimiser les paramètres des systèmes pour atteindre une performance cible.

Ce travail s'intéresse à un élément particulier des panneaux multi-couches : leurs revêtements. En effet, afin de protéger le panneau et parfois pour des raisons esthétiques, les absorbeurs multi-couches comprennent le plus souvent un film perméable fin en surface. En dépit de leur petite taille (comprise le plus souvent entre 0.1 et 1 mm), ces écrans ont un impact remarquable sur le comportement acoustique et doivent être pris en compte. Aujourd'hui, la simulation du comportement de ces films repose soit sur une approche en fluide équivalent, soit sur un modèle de Biot-Johnson-Champoux-Allard complet (Biot-JCA, [6]). La première approche tend à produire des réponses acoustiques lissées et manque certaines résonances ; la seconde requiert un modèle assez lourd, conçu pour décrire des effets de couplage complexes qui semblent peu physiques dans le cas de couches fines.

L'objectif de ce travail est de proposer un modèle plus simple, capable de représenter les effets résonants tout en réduisant le nombre de paramètres. Le modèle en question est pensé pour remplacer les approches plus élaborées dans le cadre d'une modélisation en matrices de transfert. Afin d'aboutir à ce modèle, il est proposé de linéariser les termes propagatifs en les remplaçant par leur développement au premier ordre puis d'opérer une analyse dimensionnelle pour pouvoir supprimer les termes associés aux effets les plus faibles (section 2). Cette approche est validée en section 3

au moyen de simulations numériques et utilisant comme référence un modèle de Biot-JCA complet et un grand nombre de films. Il convient enfin de noter que tout au long de cet article une convention temporelle positive ( $e^{j\omega t}$ ) est utilisée.

## 2 Obtention du modèle simplifié

L'approche proposée repose sur une modélisation en matrice de transfert qui décrit l'évolution des champs physiques dans la profondeur de la couche de poroélastique. Le calcul de la matrice de transfert pour la couche commence en considérant les deux équations du mouvement et deux équations constitutives d'un modèle de Biot [7, 8]. Dans le cas présent, les équations du modèle  $\{\mathbf{u}^s, \mathbf{u}^t\}$  sont utilisées [9] sous l'hypothèse d'un problème harmonique :

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{ij,j} &= -\omega^2 \tilde{\rho}_s u_i^s - \omega^2 \tilde{\rho}_{eq} \tilde{\gamma} u_i^t, \\ -p_{,i} &= -\omega^2 \tilde{\rho}_{eq} \tilde{\gamma} u_i^s - \omega^2 \tilde{\rho}_{eq} u_i^t, \\ \hat{\sigma}_{ij} &= \hat{A} \nabla \cdot \mathbf{u}^s \delta_{ij} + 2N \varepsilon_{ij}, \\ p &= -\tilde{K}_{eq} \nabla \cdot \mathbf{u}^t.\end{aligned}\quad (1)$$

Dans ces équations,  $\mathbf{u}^s$  et  $\mathbf{u}^t$  sont respectivement les déplacements de la phase solide et total,  $p$  représente la pression interstitielle,  $\hat{\sigma}$  et  $\varepsilon$  les tenseurs de contraintes *in vacuo* et déformations et  $\delta_{ij}$  le symbole de Kronecker. Les autres coefficients de l'équation (1) sont des paramètres physiques :  $\tilde{\rho}_{eq,s}$  sont des densités,  $\tilde{K}_{eq}$  une compressibilité,  $\hat{A}$  et  $N$  les coefficients de Lamé et  $\tilde{\gamma}$  un terme de couplage entre les phases solide et fluide. Une présentation plus détaillée de ces quantités est disponible dans la Ref. [9].

Considérant une couche infinie dans le plan  $(x, y)$  et d'épaisseur  $d$  excitée par une onde plane se propageant vers les  $z$  positifs, la matrice de transfert est déduite en utilisant le formalisme de Stroh [4, 10, 11]. Cette approche permet ainsi de déterminer l'évolution des champs dans la direction  $z$  en utilisant un ensemble d'équations aux dérivées partielles en  $z$  du premier ordre sur le vecteur d'état  $s$  :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{s}(z)}{\partial z} &= \alpha \mathbf{s}(z) \\ \mathbf{s}(z) &= \left\{ \hat{\sigma}_{xz}(z), u_z^s(z), u_z^t(z), \hat{\sigma}_{zz}(z), p(z), u_x^s(z) \right\}^T.\end{aligned}\quad (2)$$

Une remarque importante est que tous les champs physiques ne sont pas inclus dans le vecteur d'état. C'est par exemple le cas de  $u_x^t$  et  $\hat{\sigma}_{xx}$  qui sont absents mais peuvent être déduits par combinaison linéaire des autres composantes.

La matrice  $\alpha$  (aussi appelée matrice d'état) est au centre de cette approche et plusieurs méthodes pour la calculer

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & jk_x \frac{\hat{A}}{\hat{P}} & jk_x \tilde{\gamma} & -\frac{\hat{A}^2 - \hat{P}^2}{\hat{P}} k_x^2 - \tilde{\rho} \omega^2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\hat{P}} & 0 & jk_x \frac{\hat{A}}{\hat{P}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\hat{K}_{eq}} + \frac{k_x^2}{\tilde{\rho}_{eq} \omega^2} & -jk_x \tilde{\gamma} \\ jk_x & -\rho_s \omega^2 & -\tilde{\rho}_{eq} \tilde{\gamma} \omega^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\rho}_{eq} \tilde{\gamma} \omega^2 & \tilde{\rho}_{eq} \omega^2 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{N} & jk_x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Comme le matériau de la couche est homogène, il est possible de calculer la matrice de transfert  $T(d)$  entre les deux faces en résolvant l'équation (2), ce qui donne :

$$s(0) = T(d)s(d), \quad T(d) = \exp(-d\alpha). \quad (4)$$

La fin de cette section se concentre sur la simplification de  $T(d)$  au moyen d'une série d'hypothèses. La plus importante d'entre elles est que les revêtements sont presque toujours très fins ( $d \ll 1$ ), en particulier devant les longueurs d'onde en jeu ( $kd \ll 1$ , avec  $k$  le nombre d'onde dans l'air ou le poroélastique). Cette hypothèse permet d'approximer l'exponentielle de matrice de l'équation (4) par son développement de Taylor au premier ordre :

$$T(d) \approx I - d\alpha + O(d^2) \quad (5)$$

où  $I$  est la matrice identité. Une remarque importante est que cette approximation au premier ordre réduit le caractère propagatif à un saut des valeurs des champs entre les deux faces du film. En effet, l'équation (5) indique que tous les champs sont transférés et altérés par une combinaison des autres champs contrôlée par la matrice d'état  $\alpha$ .

L'objectif suivant est d'identifier les contributions les plus importantes dans  $T(d)$  et de supprimer les autres. Dans cet objectif, une seconde approximation est proposée concernant les deuxième et dernière lignes de  $T(d)$  :

$$T(d) \approx I - d\alpha' \approx I - d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\hat{A}^2 - \hat{P}^2}{\hat{P}} k_x^2 - \tilde{\rho} \omega^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\hat{K}_{eq}} + \frac{k_x^2}{\tilde{\rho}_{eq} \omega^2} & 0 \\ 0 & -\tilde{\rho}_s \omega^2 & -\tilde{\rho}_{eq} \tilde{\gamma} \omega^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\rho}_{eq} \tilde{\gamma} \omega^2 & \tilde{\rho}_{eq} \omega^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Ces simplifications ne réduisent toutefois pas le nombre de paramètres et il est proposé d'y remédier en simplifiant les paramètres du modèle de fluide équivalent  $\tilde{\rho}_{eq}$  et  $\hat{K}_{eq}$ . Considérant que la couche est fine, il semble naturel de négliger les effets de tortuosité en prenant  $\alpha_\infty \approx 1$ . En utilisant ce dernier ansatz et une approximation basse fréquence, les approximations suivantes sont proposées pour  $\tilde{\rho}_{eq}$  et  $\hat{K}_{eq}$  :

$$\tilde{\rho}_{eq} \approx \frac{\rho_0}{\phi} + \frac{\sigma}{j\omega}, \quad \hat{K}_{eq} \approx \frac{\gamma_0 P_0}{\phi} \quad (9)$$

sont disponibles dans la littérature (par exemple dans la Ref. [10] pour ce cas spécifique ou les Ref. [11, 12] pour une discussion plus générale). Dans cet article, le calcul de  $\alpha$  est omis pour des raisons de concision et l'expression proposée dans l'annexe A.1 de la Ref. [9] rappelée en équation (3) est utilisée (avec  $\hat{P} = \hat{A} + 2N$ ).

$$\begin{cases} u_x^s(0) = u_x^s(d) + \frac{d}{N} \hat{\sigma}_{xz}(d) + jk_x d u_z^s(d) \\ u_z^s(0) = u_z^s(d) + \frac{d}{\hat{P}} \hat{\sigma}_{zz}(d) + jk_x d \frac{\hat{A}}{\hat{P}} u_x^s(d) \end{cases} \quad (6)$$

Les lois constitutives exposées dans l'équation (1) permettent d'écrire les approximations suivantes pour  $\hat{\sigma}_{xz}$  et  $\hat{\sigma}_{zz}$  :

$$\hat{\sigma}_{zz} \approx \hat{P} jk_s u_z^s, \quad \hat{\sigma}_{xz} \approx \hat{N} j(k_x u_z^s + k_s u_x^s). \quad (7)$$

où  $k_s$  correspond au nombre d'onde de l'onde principale dans la phase solide. Cette quantité est assez petite pour considérer  $k_s d \ll 1$  et, avec  $k_x d \ll 1$ , le saut de déplacement pour la phase solide est négligeable, ainsi :  $u^s(0) \approx u^s(d)$ .

Une autre approximation proposée consiste à négliger le couplage entre les contraintes en compression et en cisaillement, ce qui conduit à annuler les termes  $T_{14}$  et  $T_{41}$  de  $T(d)$ .

Enfin, il est proposé de négliger la contribution de la pression interstitielle au saut de contrainte de cisaillement, conduisant ainsi à annuler  $T_{15}$ . Ces approximations permettent finalement d'aboutir à une matrice  $T(d)$  beaucoup plus creuse, présentée en (8).

Cette dernière simplification abaisse à six le nombre de paramètres du modèle : 3 paramètres mécaniques ( $\hat{A}$ ,  $N$  et le facteur de perte  $\eta$ ), la résistance au passage de l'air, la porosité  $\phi$  et la masse volumique  $\rho_1$ .

### 3 Validation du modèle simplifié

Un grand nombre de configurations ont été considérées pour valider l'approche proposée. En particulier, une grande attention a été portée aux différentes conditions de fond

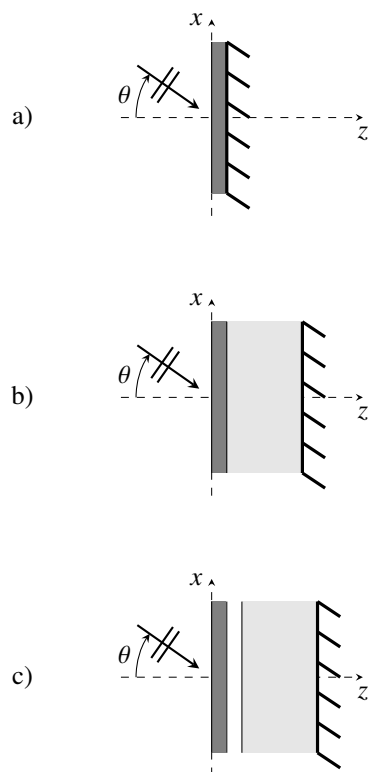


FIGURE 1 – Configuration utilisées pour les tests au cours du développement.

et différents angles d'incidence afin de s'assurer de la robustesse du modèle simplifié. Les trois types de systèmes utilisés pendant le développement sont présentés sur la figure 1. Il a été constaté que la condition de fond avec une couche d'air (Figure 1.c) donne des résultats très similaires à ceux de celle avec la couche de poroélastique seule (Figure 1.b) tandis que la configuration sur fond rigide (Figure 1.a) se comporte différemment.

Les valeurs numériques pour les paramètres des films utilisés sont tirées de la littérature [13]. Pour les figures présentées dans cet article, un film tissé et un intissé sont utilisés. Les paramètres de la mousse placée entre le film et le fond rigide sont les suivants :  $\phi = 0.994$ ,  $\sigma = 9045 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-4}$ ,  $\alpha_\infty = 1.02$ ,  $\Lambda' = 197 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ ,  $\Lambda = 103 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ ,  $\rho_1 = 8.43 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  pour les paramètres du modèle JCA,  $\nu = 0.42$  pour le coefficient de Poisson,  $E = 194 \cdot 10^3 \text{ Pa}$  pour le module de Young et  $\eta = 0.05$  pour le facteur de perte. Dans les simulations, les propriétés suivantes sont utilisées pour l'air :  $\rho_0 = 1.213 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $\text{Pr} = 0.71$ ,  $\eta_0 = 1.839 \cdot 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ,  $P_0 = 1.01325 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ ,  $\gamma_0 = 1.4$ .

Sur la figure 2, l'accord entre le modèle simplifié proposé et un modèle Biot-JCA complet est testé et ce pour deux films et deux angles ( $0^\circ$  et  $50^\circ$ ) dans la configuration présentée en figure 1.b). Les résultats du modèle simplifié sont proches de ceux de référence. L'accord est même parfait en basses fréquences et seules de petits écarts sont observés dans la partie haute du spectre.

Des essais plus approfondis sur la sensibilité du modèle aux différentes simplifications ont permis d'identifier que les erreurs observées en hautes fréquences sont liés aux simplifications de  $\tilde{\rho}_{eq}$ . Il est néanmoins proposé de conserver ce modèle approché afin de pouvoir retirer  $\tilde{\alpha}_\infty$  des paramètres.

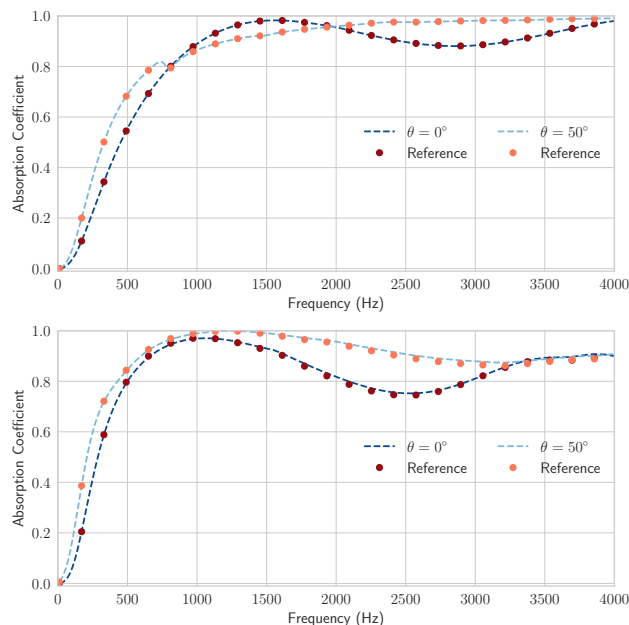


FIGURE 2 – Coefficient d'absorption pour deux matériaux, et deux angles dans la configuration de la figure 1.b). Les résultats avec le modèle de référence sont tracés avec des points et ceux du modèle simplifiés en lignes.

## 4 Conclusion

Dans le cas présent, un modèle simplifié est proposé pour la modélisation des films acoustiques en utilisant une matrice de transfert. Il est montré que quelques approximations sous-tendues par des hypothèses physiques permettent d'aboutir à un modèle plus simple pour la propagation (avec notamment le développement de l'exponentielle de matrice) et une réduction du nombre de paramètres. Ces simplifications sont valides pour de fines couches de poroélastique et, s'il est acceptable quel que soit le type de condition de fond, le modèle se comporte mieux lorsque le film est placé sur une couche de poroélastique ou d'air. La solution proposée, lorsque le film est placé sur un fond rigide, montre quelques faiblesses à incidence rasante ou proche qui s'expliquent par le fait que des contributions en cisaillement sont négligées. Malgré ces aspects, l'erreur commise reste faible et le modèle se comporte bien.

## Références

- [1] C. Lagarrigue, J. P. Groby, V. Tournat, O. Dazel, and O. Umnova. Absorption of sound by porous layers with embedded periodic arrays of resonant inclusions. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 134(6):4670–4680, 2013.
- [2] N. Jiménez, V. Romero-Garcia, V. Pagneux, and J.-P. Groby. Quasiperfect absorption by subwavelength acoustic panels in transmission using accumulation of resonances due to slow sound. *Physical Review B*, 95(1), 2017.
- [3] J. Yang, J. S. Lee, and Y. Y. Kim. Metaporous layer to overcome the thickness constraint for broadband sound absorption. *Journal of Applied Physics*, 117(17):174903, 2015.

- [4] J. P. Parra Martinez, O. Dazel, P. Göransson, and J. Cuenca. Acoustic analysis of anisotropic poroelastic multilayered systems. *Journal of Applied Physics*, 119(8) :084907, February 2016.
- [5] L. Jaouen, F. Chevillotte, and F.-X. Bécot. Improving perforated plate modeling with porous media theory. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 141(5) :3797–3797, May 2017.
- [6] J.-F. Allard and N. Atalla. *Propagation of sound in porous media : modelling sound absorbing materials*. Wiley, Hoboken, N.J, 2nd ed edition, 2009.
- [7] M. A. Biot. Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 28(2) :168, 1956.
- [8] M. A. Biot and D. Willis. The Elastic Coefficients of the Theory of Consolidation. 1957.
- [9] O. Dazel, B. Brouard, C. Depollier, and S. Griffiths. An alternative Biot’s displacement formulation for porous materials. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 121(6) :3509, 2007.
- [10] O. Dazel, J.-P. Groby, B. Brouard, and C. Potel. A stable method to model the acoustic response of multilayered structures. *Journal of Applied Physics*, 113(8) :083506, 2013.
- [11] Q. Serra, M. N. Ichchou, and J.-F. Deü. On the Use of Transfer Approaches to Predict the Vibroacoustic Response of Poroelastic Media. *Journal of Computational Acoustics*, 24(02) :1550020, June 2016.
- [12] J. P. Parra Martinez, O. Dazel, P. Göransson, and J. Cuenca. Derivation of the state matrix for dynamic analysis of linear homogeneous media. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 140(2) :EL218–EL220, August 2016.
- [13] L. Jaouen and F.-X. Bécot. Acoustical characterization of perforated facings. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 129(3) :1400–1406, 2011.