

**CFA '18 LE HAVRE ■ 23-27 avril 2018**  
**14<sup>ème</sup> Congrès Français d'Acoustique**



**Détermination Simultanée de la Vitesse de Propagation et de l'Épaisseur dans le cas de Recouvrements Partiels**

J. Bustillo<sup>a</sup>, H. Achdjian<sup>b</sup>, A. Arciniegas<sup>b</sup> et L. Blanc<sup>b</sup>

<sup>a</sup>GREMAN UMR7347 CNRS, U.Tours, INSA-CVL, GREMAN site ST, 10 rue Thales de Milet, 37100 Tours, France

<sup>b</sup>GREMAN UMR7347 CNRS, U.Tours, INSA-CVL, GREMAN, INSA-CVL 3 rue de la chocolaterie, 41000 Blois, France  
julien.bustillo@insa-cvl.fr

Les méthodes de caractérisation ultrasonores sont largement utilisées en industrie grâce à leur caractère non invasif. En effet, les variations des paramètres mécaniques dus à un endommagement et/ ou un vieillissement sont directement liés à une variation de la vitesse de propagation de l'onde ultrasonore. Cependant, le matériau étudié peut avoir une épaisseur variable (cas de la reprise hydrique par exemple) ou inconnue. Dans ce cas, une détermination simultanée de l'épaisseur et de la vitesse de propagation doit être effectuée afin d'obtenir des résultats fiables. Lorsque l'échantillon est mince devant la longueur d'onde, des recouvrements partiels apparaissent et rendent difficiles les mesures simultanées de vitesse et d'épaisseur. Les méthodes fréquentielles sont assez robustes mais demandent l'implémentation de modèles et la résolution de problèmes inverses, ce qui les rendent lentes. Les méthodes temporelles sont plus rapides mais sont limitées lors d'un recouvrement ou lorsque le signal est bruité. Ce travail présente une méthode de déconvolution permettant une détermination simultanée et rapide de la vitesse et de l'épaisseur. Cette méthode s'appuie sur l'algorithme Forward-Backward pour calculer la fonction d'excitation du signal et donc mesurer les temps de vol, même dans le cas de recouvrement partiels. Afin de valider la méthode, une simulation numérique a été effectuée sur des ondelettes de Ricker, proches des signaux ultrasonores couramment rencontrés. Cette simulation a montré que la mesure simultanée de vitesse reste sous une précision de 1% jusqu'à un recouvrement de 80% des signaux. Suite à cela, des mesures ont été effectuées sur des échantillons d'aluminium de trois épaisseurs différentes afin de voir apparaître des recouvrements allant jusqu'à 65%. Les résultats confirment la capacité de la méthode à estimer simultanément la vitesse et l'épaisseur dans le cas de recouvrement avec une erreur relative inférieure à 1%.

## 1 Introduction

Les méthodes de caractérisation ultrasonores sont largement utilisées au sein des industries car non destructives et permettant une mesure sans contact. Les applications sont très larges, incluant par exemple les capteurs [1], la microélectronique [2–4], acoustique des salles [5] ou la détection de défauts [6, 7]. Cette caractérisation peut être effectuée en utilisant des méthodes basées sur une représentation fréquentielle ou temporelle [2, 8–10].

La détermination de la vitesse de propagation des ondes au sein du matériau permet d'obtenir de nombreuses informations sur l'état de santé de l'échantillon. Par exemple, le vieillissement peut causer une variation de la vitesse de propagation due à l'apparition de fissures, ou des modifications des paramètres élastiques.

Lorsque l'épaisseur de l'échantillon est inconnue, une détermination simultanée des deux paramètres est nécessaire pour permettre une mesure correcte. Bien que les méthodes fréquentielles soient plus robustes au bruit [11], elles nécessitent le plus souvent une étape de modélisation et une étape d'inversion, ce qui rend ces méthodes assez lentes [2]. A contrario, les méthodes temporelles nécessitent de mesurer les temps d'arrivée de deux échos successifs [12], ce qui peut être rendu complexe par un niveau de bruit important ou un recouvrement de signaux. Les méthodes temporelles sont donc limitées aux applications où les signaux peuvent facilement être séparés.

Dans le cas des échantillons minces, les échos ne peuvent pas être séparés simplement pour mesurer les temps de vol. Différentes méthodes ont été proposées, basées entre autres sur l'optimisation des signaux [13], sur la modélisation des signaux [14–17] ou sur le choix du signal envoyé [8].

Dans ce papier, une méthode basée sur l'optimisation du signal d'excitation est proposée. Dans un premier temps, une présentation de la méthode utilisée pour mesurer la vitesse et l'épaisseur est présentée. La méthode d'optimisation du signal d'excitation est ensuite décrite. Cette méthode prend en compte le faible nombre d'éléments non nuls de ce signal en minimisant la norme  $l1$ . Cette méthode est validée sur des signaux synthétiques puis sur des signaux réels et les valeurs de vitesse et d'épaisseur sont présentées en fonction du recouvrement.

## 2 Détermination de la vitesse et de l'épaisseur

Les mesures sont effectuées en insertion-substitution, comme décrit à la figure 1. Le principal avantage de cette méthode est que toutes les mesures sont effectuées dans le même fluide, permettant ainsi de compenser les fonctions de transfert des transducteurs.

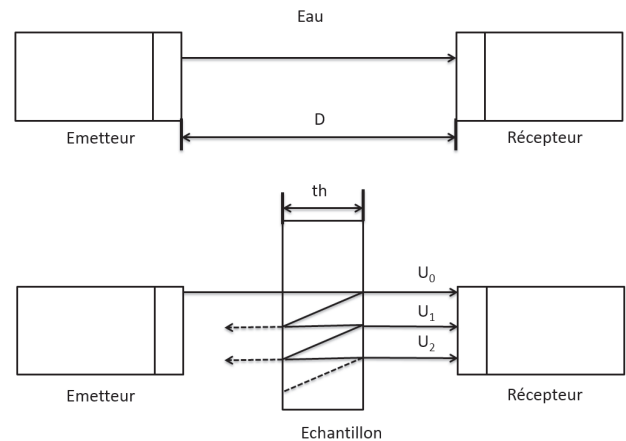


FIGURE 1 – Principes de l'insertion/substitution : mesure dans le fluide de référence (en haut) et après insertion de l'échantillon (en bas)

Le signal  $A_{ref}(t)$ , correspondant à la référence, dépend de la distance  $D$  entre les transducteurs, des fonctions de transfert des transducteurs ( $h_e(t)$  et  $h_r(t)$  pour l'émetteur et le récepteur), de l'atténuation  $\alpha_w$  des ondes dans l'eau, de la diffraction  $d_w(D)$  et de la vitesse des ondes dans l'eau  $c_w$  :

$$A_{ref}(t) = h_e(t) * h_r(t) * e^{j\frac{\omega D}{c_w}} e^{-\alpha_w D} d_w(D). \quad (1)$$

Cette équation peut être réécrite pour prendre en compte la propagation dans la couche d'eau qui correspondra à l'échantillon :

$$A_{ref}(t) = h_e(t) * h_r(t) * \left( e^{j\frac{\omega(D-th)}{c_w}} e^{j\frac{\omega th}{c_w}} \right) \left( e^{-\alpha_w(D-th)} e^{-\alpha_w(th)} \right) d_w(D), \quad (2)$$

où  $th$  est l'épaisseur de l'échantillon. Cette épaisseur est faible comparé à la distance entre les transducteurs, ce qui nous permet de négliger la diffraction due à l'échantillon.

Nous pouvons donc définir une fonction de transfert  $h_w(t)$  correspondant au système complet sans l'échantillon :

$$h_w(t) = h_e(t) * h_r(t) * e^{-\alpha_w(D-th)} e^{j\frac{\omega(D-th)}{c_w}} d_w(D). \quad (3)$$

Le signal de référence  $A_{ref}(t)$  peut alors être réécrit en utilisant cette fonction de transfert :

$$A_{ref}(t) = h_w(t) * e^{-\alpha_w th} e^{j\frac{\omega th}{c_w}}. \quad (4)$$

Lorsque l'échantillon est placé entre les transducteurs, l'onde ultrasonore va se propager au travers et le signal reçu dépendra de l'échantillon. Le signal comporte plusieurs échos  $U_i$ , correspondant aux réflexions aux interfaces, comme décrit à la figure 1. Le signal  $A_s(t)$  est donc la somme de ces échos :

$$A_s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(t). \quad (5)$$

Les amplitudes des échos ainsi que leurs retards dépend des paramètres mécaniques et géométriques de l'échantillon. Le signal peut être réécrit ainsi :

$$A_s(t) = h_w(t) * T_{w-s} e^{-\alpha_s th} e^{j\frac{\omega th}{c_s}} \left( T_{s-w} + \sum_{n=1}^{\infty} (R_{s-w} T_{s-w} e^{-\alpha_s th} e^{j\frac{\omega th}{c_s}})^n \right), \quad (6)$$

où les indices  $s$  et  $w$  sont respectivement pour l'échantillon et l'eau et  $T_{i-j}$  et  $R_{i-j}$  sont les coefficients de transmission et de réflexion entre les milieux  $i$  et  $j$  :

$$R_{i-j} = \frac{Z_i - Z_j}{Z_i + Z_j}, \quad (7)$$

$$T_{i-j} = \frac{2Z_j}{Z_i + Z_j}, \quad (8)$$

où  $Z_i$  est l'impédance acoustique du milieu  $i$ , qui est le produit de la vitesse de l'onde et de la masse volumique de l'échantillon.

A partir des signaux  $A_{ref}$  et  $A_s$ , deux retards sont définis :  $\Delta t_1$ , entre l'écho de  $A_{ref}$  et le premier écho de  $A_s$ , et  $\Delta t_2$ , entre deux échos successifs de  $A_s$ , comme montré dans la figure 2.

Ces retards permettent de calculer simultanément l'épaisseur ( $th$ ) et la vitesse de l'onde ( $c_s$ ) de l'échantillon, en utilisant la vitesse de l'onde dans l'eau ( $c_w$ ) [8, 12] :

$$th = \left( \frac{\Delta t_2}{2} + \Delta t_1 \right) c_w, \quad (9)$$

$$c_s = \left( 1 + \frac{2\Delta t_1}{\Delta t_2} \right) c_w. \quad (10)$$

Lorsque les échos sont recouverts, les mesures de ces retards sont complexes. De ce fait, la détermination simultanée de l'épaisseur et de la vitesse de l'onde l'est également. Une méthode de déconvolution basée sur le fait que le signal d'excitation contient peu d'éléments non nuls est proposée dans cet article afin de s'affranchir du problème de recouvrement.

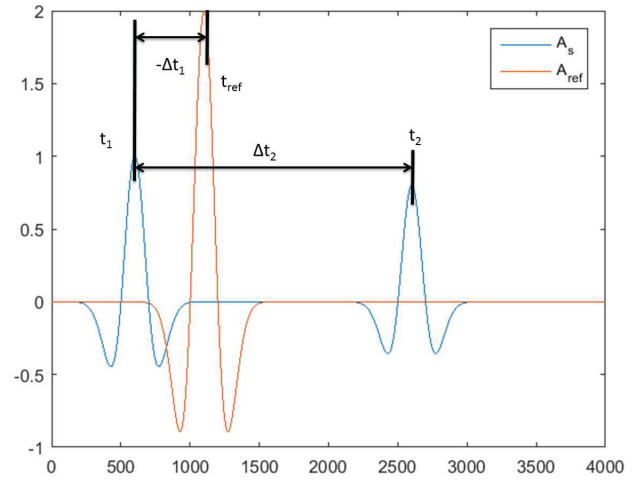


FIGURE 2 – Représentation des retards utilisés pour la détermination simultanée de l'épaisseur et de la vitesse de l'onde.

### 3 Algorithme de Forward-Backward

Si l'atténuation dans l'échantillon est faible ou comparable à celle du milieu de référence, la forme des échos est semblable. Afin de simplifier la déconvolution, il est pris comme hypothèse que les échos restent identiques au signal de référence. Le signal  $A_s(t)$  peut alors être réécrit comme une convolution entre le signal de référence  $h_w(t)$  et le signal d'excitation  $e(t)$  :

$$A_s(t) = h_w(t) * e(t) + n(t), \quad (11)$$

où le signal d'excitation  $e(t)$  est la somme des impulsions de Dirac :

$$e(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i \delta(t - \tau_i). \quad (12)$$

$\tau_i$  et  $\eta_i$  sont respectivement les retards et les amplitudes des échos de  $A_s(t)$ . Un bruit, noté  $n(t)$  est ajouté pour prendre en compte l'acquisition du signal. L'équation 11 est alors réécrite sous la forme de matrice :

$$A_s = H_w E + N. \quad (13)$$

Dans le cas de signaux ultrasonores, le signal d'excitation contient peu d'éléments non nuls. Ainsi, la norme  $l_0$  (correspondant au cardinal) est faible et peut être utilisée comme contrainte pour l'optimisation. Cependant, cela rend le problème combinatoire et complexe à résoudre [18]. La norme  $l_1$  est choisie afin de passer outre le problème combinatoire tout en conservant le fait que cette norme est faible car le cardinal est faible. Le coefficient  $\lambda$  permet d'affiner la contrainte sur le nombre d'éléments non nuls du signal d'excitation. Plus ce coefficient est élevé, plus la solution sera creuse.

$$\hat{E} = \arg \min_E \{ \|H_w E - A_s\|^2 + \lambda \|E\|_1 \}. \quad (14)$$

Nous avons donc une minimisation de deux fonctions convexes  $f_1(E)$  et  $f_2(E)$ , correspondant respectivement à  $\lambda \|E\|_1$  et  $\|H_w E - A_s\|^2$  :

$$\hat{x} = \arg \min_x \{f_1(x) + f_2(x)\}, \quad (15)$$

Ce système est optimisé en utilisant l'algorithme Forward-Backward qui a montré que l'équation 15 admet au moins une solution [19] :

$$x_{n+1} = \text{prox}_{\gamma f_1}(x_n - \gamma \nabla f_2(x_n)). \quad (16)$$

$\text{prox}_{\gamma f_1}(x)$  est le proximal de  $f_1$  [19]. Dans le cas d'une norme  $l_1$ , le proximal est une fonction seuil :

$$\text{prox}_{\gamma f_1}(x) = \begin{cases} x - \lambda\gamma, & \text{si } x > \lambda\gamma \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}. \quad (17)$$

L'algorithme choisi pour l'optimisation du Forward Backward est FISTA [20], qui est le plus rapide pour ce type d'optimisation [20, 21].

## 4 Validation numérique

Afin de vérifier que cette méthode fonctionne bien dans le cas de signaux recouverts et/ou bruités, une validation sur des signaux synthétiques a été faite.

Le signal de référence ( et donc les échos ) ont été créés en utilisant une ondelette de Ricker (equation 18) [22]. Cette ondelette est proche des signaux que l'on rencontre dans la plupart des applications ultrasonores.

$$R(\sigma, t) = \frac{2 \left(1 - \frac{t^2}{\sigma^2}\right)}{\sqrt{3\sigma\pi^{\frac{1}{4}}}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}. \quad (18)$$

$\sigma$  a été fixé à 100 points afin d'obtenir une longueur d'onde de 350 points et un support de la fonction de 800 points, comme montré dans la figure 3.

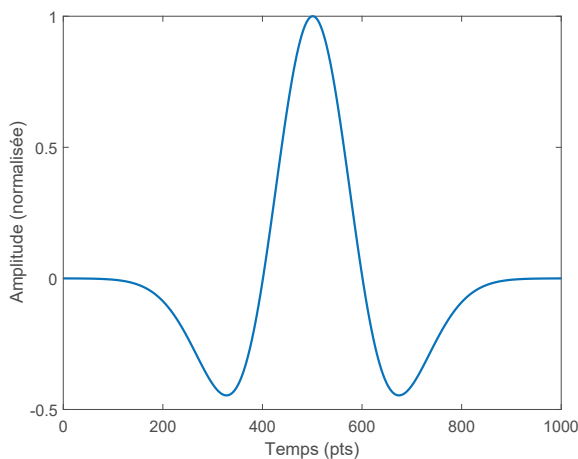


FIGURE 3 – Représentation de l'ondelette de Ricker utilisée pour les signaux synthétiques.

Le signal simulé est constitué de deux échos : un qui est toujours à la même position et un autre placé à une distance aléatoire. Pour cela, un signal d'excitation  $e(t)$  est créé et ensuite convolué avec l'ondelette de Ricker précédemment décrite. Enfin un bruit est ajouté au signal, ayant une intensité  $\alpha$  comprise entre 0 et 0,5.

$$S(t) = e(t) * R(t) + \alpha \text{rand}(t), \alpha \in [0; 0.5]. \quad (19)$$

Le premier écho a toujours un retard  $\tau_1$  de 100 points alors que le retard du second écho  $\tau_2$  est choisi aléatoirement entre 100 et 600 points. Ainsi le décalage entre les deux échos varie entre 0 et 500 points. L'amplitude  $\eta_1$  du premier écho est de 1 alors que l'amplitude du deuxième écho  $\eta_2$  est fixée à 0,8.

La figure 4 montre l'exemple d'un signal simulé avec un recouvrement de 80% et où  $\alpha$  est fixé à 0,5.

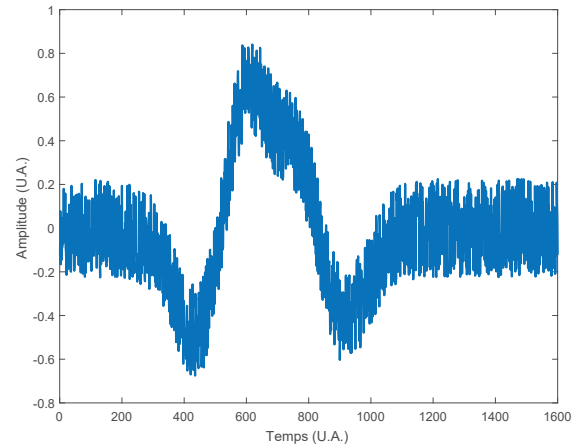


FIGURE 4 – Exemple de signal synthétique avec  $\tau_1 = 100$  points,  $\tau_2 = 258$  points et  $\alpha = 0,5$ .

L'algorithme FISTA est appliqué aux signaux  $S(t)$  en utilisant le signal de référence  $R(t)$ . Le nombre d'itérations est fixé à 5000, permettant un bon équilibre entre la convergence de la solution et le temps de calcul.  $\lambda$  est fixé à 10 afin d'obtenir une bonne résolution du signal d'excitation estimé.

Cette opération est effectuée sur 2500 signaux afin d'obtenir des données statistiques. Pour cela, 50 retards aléatoires et 50 niveaux de bruits aléatoires ont été choisis et les combinaisons possibles ont été simulées.

La figure 5 montre le signal d'excitation obtenu après optimisation pour le signal présenté à la figure 4.

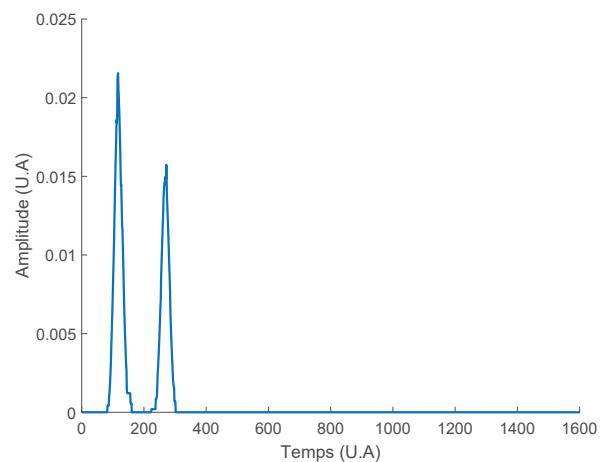


FIGURE 5 – Signal d'excitation calculé en utilisant l'algorithme FISTA.

Ces signaux présentent un niveau de bruit assez faible, même si les signaux  $S(t)$  sont fortement bruités. Les retards sont directement mesurés aux maxima des signaux d'excitation calculés. Lorsqu'un seul pic est visible, le retard

$\tau_2$  est fixé à 100 (égal à  $\tau_1$ ). La figure 6 montre la différence de temps d'arrivée entre les deux échos ( $\tau_2 - \tau_1$ ) calculés avec l'algorithme FISTA (trait bleu) comparés aux temps théorique (pointillé rouge).

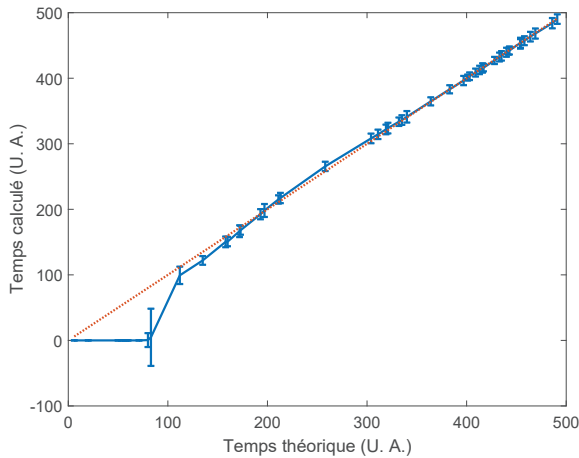


FIGURE 6 – Corrélation entre les retards estimés (trait bleu) et les retards théoriques ( $\tau_2 - \tau_1$ ) (pointillé rouge).

On peut observer que cette méthode ne semble pas fonctionner lorsque les échos sont séparés de moins de 120 points, correspondant à environ un tiers de la longueur d'onde. Cependant, les résultats sont concluants lorsque la différence de temps dépasse 150 points, avec un coefficient de régression  $R^2$  égal à 0,99. De plus, cette méthode est peu sensible au bruit, qui provoque une erreur maximale de 8 points. Ainsi cette méthode permet de séparer des écho recouverts jusqu'à un niveau de recouvrement de 80%, même dans le cas de signaux bruités.

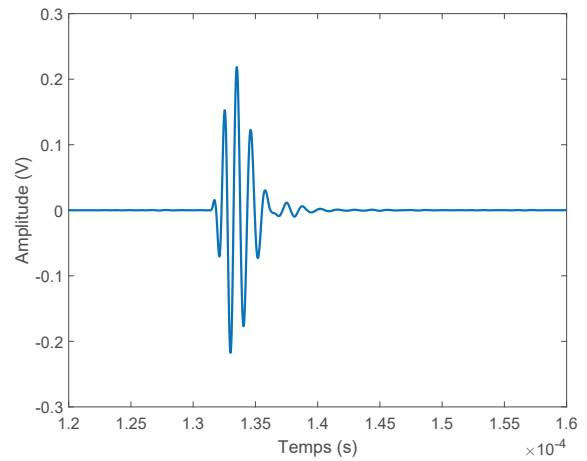
## 5 Mesures ultrasonores

Les mesures ont été effectuées sur trois plaques d'aluminium de différentes épaisseurs, afin d'obtenir différents recouvrements d'échos. Les épaisseurs ont été fixées à 25, 15 et 8,5 mm, respectivement pour les spécimens 1, 2 et 3. Ces épaisseurs permettent d'observer des recouvrements pour les échantillons 2 et 3 alors que les échos devraient être séparés dans le cas de l'échantillon 1.

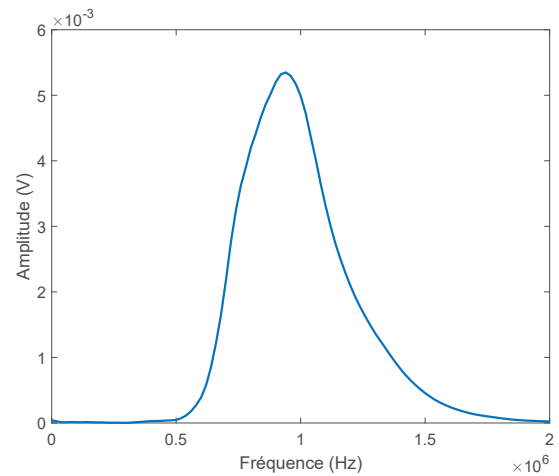
Ces mesures ont été effectuées avec des transducteurs piézoélectriques ayant une fréquence centrale de 1 MHz à température ambiante ( $\sim 20^\circ \text{C}$ ). Le signal de référence ainsi que son spectre sont présentés à la figure 7. La durée du signal de référence est plutôt longue (environ  $8 \mu\text{s}$ ), ce qui nécessite une épaisseur proche 25 mm pour éviter un recouvrement des échos.

La figure 8 montre les signaux après leurs propagations dans les échantillons 1 et 3. Le recouvrement est clairement visible pour l'échantillon 3 (Figure 8b) alors que l'échantillon 1 (Figure 8a) ne montre qu'un léger recouvrement. Dans le cadre des méthodes conventionnelles, il est possible de mesurer de façon simultanée l'épaisseur et la vitesse pour l'échantillon 1 alors que cela est complexe pour l'échantillon 3.

Le recouvrement maximal est de 65% dans le cas de l'échantillon 3, ce qui reste inférieur au recouvrement maximal validé numériquement (80%). Cependant, les



(a) Signal de référence.



(b) Spectre du signal de référence.

FIGURE 7 – Signal de référence en représentation temporelle (en haut) et fréquentielle (en bas).

signaux réels sont souvent plus complexes que les signaux créés numériquement.

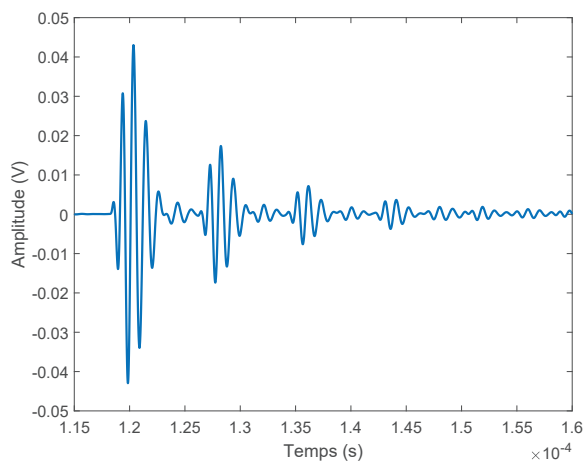
## 6 Résultats et discussion

Un écho de référence est extrait du signal de référence afin de réduire la mémoire nécessaire pour la construction de la matrice  $H_w$ , et donc le temps de calcul. Ainsi l'écho a une longueur de 1600 points comparé aux 5000 points du signal de référence.

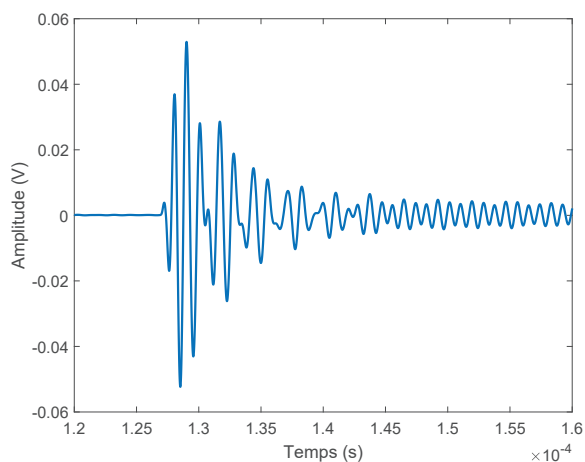
En utilisant cet écho de référence, l'algorithme FISTA a été effectué sur les signaux de référence et ceux obtenus après propagation dans les échantillons. Le nombre d'itération est fixé à 5000, afin de limiter le temps de calcul. Ce nombre d'itération a montré qu'il permettait un bon équilibre entre le temps de calcul et la précision du signal d'excitation que l'on retrouve. Les signaux d'excitation calculés sont montrés à la figure 9.

Les signaux calculés sont parcellaires et présentent donc peu d'échos, malgré l'apparition d'artefacts dus à la troncature du signal de référence.

Les signaux d'excitation des différents échantillons semblent montrer un schéma périodique. Cela est en adéquation avec la physique du phénomène de propagation, même si l'algorithme Forward-Backward n'en tient pas



(a)



(b)

FIGURE 8 – Signaux après leurs propagations au travers des échantillons 1 (a) et 3 (b).

compte.

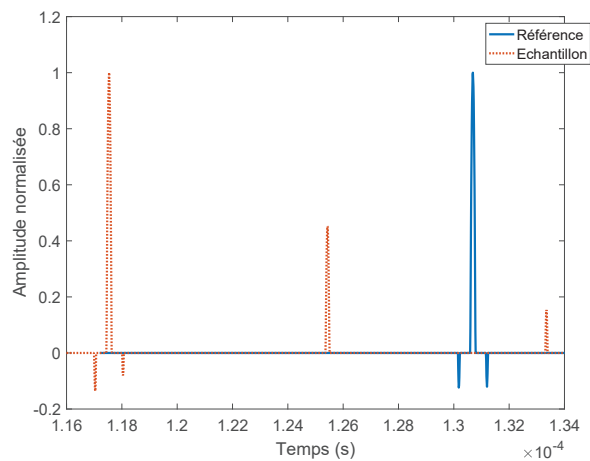
Les temps d'arrivée des échos sont mesurés sur les maxima des signaux d'excitation. Il sont alors utilisés pour calculer les valeurs des retards  $\Delta t_1$  et  $\Delta t_2$ , permettant alors de déterminer l'épaisseur ainsi que la vitesse de l'onde dans l'échantillon en utilisant les équations 9 et 10. Toutes ces valeurs sont présentées dans le tableau 1.

TABLEAU 1 – Retards mesurés sur les signaux d'excitation ainsi que les épaisseurs et vitesses calculées.

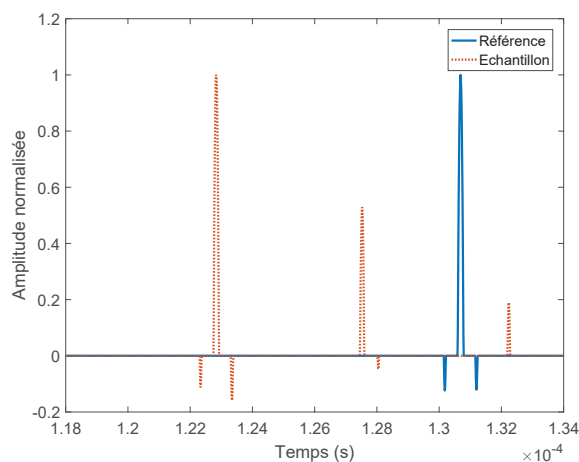
Echantillon	$\Delta t_1$ ( $\mu s$ )	$\Delta t_2$ ( $\mu s$ )	Epaisseur estimée (mm)	Vitesse estimée (m/s)
1	13.15	7.99	25.3	6332
2	7.83	4.70	15.0	6391
3	4.48	2.68	8.6	6409

Une très bonne adéquation est observée entre les valeurs théoriques des épaisseurs (pour rappel 25, 15 et 8,5 mm) et les valeurs estimées. En effet, l'incertitude sur l'épaisseur est d'environ de 1,2% et peut être attribué à une erreur de positionnement ou de mesure de la température de l'eau. La même incertitude est observée sur les vitesses de propagation, dont la valeur théorique est de 6380 m/s [2].

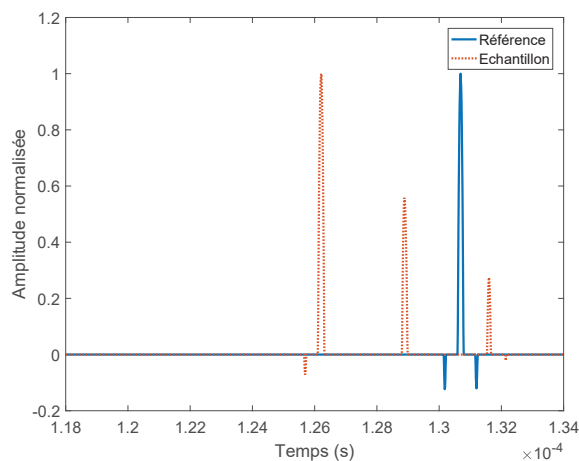
Ainsi cette méthode permet la détermination simultanée



(a)



(b)



(c)

FIGURE 9 – Signaux d'excitation calculés en utilisant l'algorithme de Forward Backward sur le signal de référence (bleu) et sur les signaux ayant traversé les échantillons (rouge), pour les échantillons 1 (a), 2 (b) et 3 (c).

et fiable de la vitesse de l'onde et de l'épaisseur de l'échantillon, même dans le cas de signaux fortement recouverts.

## 7 Conclusion

Ce papier présente une méthode de déconvolution afin de déterminer de façon simultanée l'épaisseur et la vitesse de l'onde longitudinale d'un échantillon, même en cas de signaux recouverts. Pour cela, l'algorithme Forward-Backward est présenté puis adapté pour les signaux ultrasonores. Une étape de validation numérique a montré que cette méthode est fiable dans le cadre de signaux fortement bruités et fortement recouverts (jusqu'à 80%). Enfin une campagne de mesure expérimentale a permis de tester cette méthode avec des échantillons de différentes épaisseurs afin de créer des signaux recouverts. L'épaisseur et la vitesse de l'onde longitudinale ont été retrouvées avec une incertitude de l'ordre de 1%, et cela même dans le cas de signaux fortement recouverts (jusqu'à 65%).

## 8 Références

### Références

- [1] I. Gammoudi, L. Blanc, F. Moroté, C. Grauby-Heywang, C. Boissière, R. Kalfat, D. Rebière, T. Cohen-Bouhacina, C. Dejous, High sensitive mesoporous TiO<sub>2</sub>-coated love wave device for heavy metal detection., *Biosensors & bioelectronics* 57 (2014) 162–70.
- [2] J. Bustillo, J. Fortineau, G. Gautier, M. Lethiecq, Ultrasonic characterization of porous silicon using a genetic algorithm to solve the inverse problem, *NDT & E International*.
- [3] J. Bustillo, J. Fortineau, G. Gautier, M. Lethiecq, Ultrasonic characterization of electrochemically etched porous silicon, *Japanese Journal of Applied Physics* 53 (6) (2014) 060308.
- [4] J. Bustillo, L. Blanc, C. Brosseau, C. Boissiere, Ultrasonic characterization of mesoporous thin films, in : *IEEE International Ultrasonics Symposium, IUS*, Vol. 2016-Novem, 2016.
- [5] H. Achdjian, J. Bustillo, L. Blanc, A. Arciniegas, N. Doumit, M. Lethiecq, Phase transition characterization based on acoustic reverberation time, in : *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 142, 2017, pp. 2575–2575.
- [6] N. Li, J. Sun, J. Jiao, B. Wu, C. He, Quantitative evaluation of micro-cracks using nonlinear ultrasonic modulation method, *NDT & E International* 79 (2016) 63–72.
- [7] A. Arciniegas, H. Achdjian, J. Bustillo, F. Vander Meulen, J. Fortineau, Experimental Simultaneous Measurement of Ultrasonic Properties and Thickness for Defect Detection in Curved Polymer Samples, *Journal of Nondestructive Evaluation* 36 (3) (2017) 46.
- [8] M. Loosvelt, P. Lasaygues, A Wavelet-Based Processing method for simultaneously determining ultrasonic velocity and material thickness, *Ultrasonics* 51 (3) (2011) 325–339.
- [9] A. I. Lavrentyev, Ultrasonic spectroscopy of imperfect contact interfaces between a layer and two solids, *The Journal of the Acoustical Society of America* 103 (2) (1998) 657.
- [10] T. Pialucha, P. Cawley, The detection of thin embedded layers using normal incidence ultrasound, *Ultrasonics* 32 (6) (1994) 431–440.
- [11] V. K. Kinra, V. R. Iyer, Ultrasonic measurement of the thickness, phase velocity, density or attenuation of a thin-viscoelastic plate. Part I : the forward problem, *Ultrasonics* 33 (2) (1995) 95–109.
- [12] I. Y. Kuo, B. Hete, K. K. Shung, A novel method for the measurement of acoustic speed, *The Journal of the Acoustical Society of America* 88 (4).
- [13] Y. Pati, R. Rezaifar, P. Krishnaprasad, Orthogonal matching pursuit : recursive function approximation with applications to wavelet decomposition, in : *Proceedings of 27th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, IEEE Comput. Soc. Press, pp. 40–44.
- [14] F. Häggglund, J. Martinsson, J. E. Carlson, Model-based estimation of thin multi-layered media using ultrasonic measurements., *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control* 56 (8) (2009) 1689–702.
- [15] J. Martinsson, F. Häggglund, J. E. Carlson, Complete post-separation of overlapping ultrasonic signals by combining hard and soft modeling., *Ultrasonics* 48 (5) (2008) 427–443.
- [16] R. Demirli, J. Saniie, Model-based estimation of ultrasonic echoes. Part I : Analysis and algorithms, *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control* 48 (3) (2001) 787–802.
- [17] J. Bustillo, H. Achdjian, A. Arciniegas, L. Blanc, Simultaneous determination of wave velocity and thickness on overlapped signals using Forward Backward algorithm, *NDT & E International* 86 (2017) 100–105.
- [18] B. K. Natarajan, Sparse Approximate Solutions to Linear Systems, *SIAM J. Comput.* 24 (2) (1995) 227–234.
- [19] P. L. Combettes, V. R. Wajs, Signal Recovery by Proximal Forward-Backward Splitting, *Multiscale Modeling & Simulation* 4 (4) (2005) 1168–1200.
- [20] A. Beck, M. Teboulle, A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems, *SIAM journal on imaging sciences* 2 (1) (2009) 183–202.
- [21] Y. Nesterov, A method of solving a convex programming problem with convergence rate  $O(1/k^2)$ , in : *Soviet Mathematics Doklady*, Vol. 27, 1983, pp. 372–376.
- [22] N. Ricker, The form and laws of propagation of seismic wavelets, *Geophysics* 18 (1) (1953) 10–40.