

CFA '18 LE HAVRE ■ 23-27 avril 2018
14^{ème} Congrès Français d'Acoustique



**Adjoint solution to the linearized Euler equations computed from the
direct problem**

É. Spieser et C. Bailly

LMFA, École Centrale de Lyon, 36 avenue Guy de Collongue, 69134 Ecully, France
etienne.spieser@ec-lyon.fr

Les analogies acoustiques permettent en phase de conception le meilleur compromis entre précision et temps de restitution, et sont à ce titre employées par les motoristes aéronautiques pour prédire le bruit de jet. La prise en compte des effets de propagation par le calcul de la fonction de Green numérique associée au problème d'intérêt peut se faire de manière attractive par la méthode de l'adjoint. Cette technique introduite par Tam et Auriault pour les EEL repose sur l'interversion de la position source/observateur et nécessite la formulation et la résolution d'un système d'équations dédié. Le champ de la variable physique peut alors être déterminé localement à partir de la solution du problème adjoint pour un terme source quelconque. Cette étude analytique présente succinctement les fondements théoriques de la méthode et illustre sur un cas simple la manière de formuler le problème adjoint. La méthode générale d'obtention d'un problème adjoint pour un problème multivariable sera donnée. Ce travail souligne que la formulation par l'adjoint n'est pas unique et l'illustre sur le cas d'un écoulement stratifié. Aux équations adjointes classiques sont comparées les équations adjointes symétrisées et certains écueils d'interprétation sont signalés. Enfin le théorème de représentation sera employé et permettra de retrouver un résultat de la littérature.

1 Introduction

Pour un nombre croissant de secteurs de l'industrie, la maîtrise et la réduction de la pollution sonore devient un enjeu important, et répond à une demande toujours plus forte de la société. Pour un motoriste aéronautique, le bruit généré est un paramètre crucial et fait parti intégrante de la certification des moteurs. Depuis les travaux pionniers de Lighthill [18], les pratiques de conception des turbomachines ont beaucoup évoluées ; elles ont bénéficié du développement de l'outil informatique et font à présent intervenir des algorithmes d'optimisation multi-métiers. L'approche par le biais d'une analogie acoustique, telle que proposée par Lighthill, reste cependant toujours d'actualité car elle réalise dans ce cadre le meilleur compromis entre précision de la prédiction et temps de restitution. Les analogies acoustiques reposent sur une stratégie dans laquelle les sources de bruit sont modélisées par simulation numérique de l'écoulement, dans un premier temps ; le rayonnement du champ acoustique est alors calculé dans une seconde étape [12, 24]. En présence de géométries et d'écoulement complexes, les modèles de propagation analytiques ne sont pas satisfaisants et il est également nécessaire de recourir à la simulation numérique [3] comme le tir de rayons, la résolution des Équations d'Euler Linéarisées (EEL), ou encore les APE (*Acoustic Perturbation Equations*) [9]. Ces méthodes numériques sont cependant coûteuses et souvent mal adaptées pour des sources étendues et situées dans un écoulement complexe, comme cela est le cas pour caractériser les effets d'installation.

Dans ce contexte, la technique de l'adjoint compris comme un moyen de calculer une fonction de Green réciproque est attrayante, car elle permet formellement d'inverser la position des sources de bruit, nombreuses et éparses, et celle des microphones, en quantité moindre et localisés. Ce changement de point de vue se traduit en pratique par une réduction considérable du temps de calcul lors de la prise en compte des effets de propagation, le nombre d'évaluations numériques nécessaires étant réduit au seul nombre de microphones. Le principe de réciprocité [30] est utilisé depuis longtemps en propagation acoustique [6, 7], mais sa mise en oeuvre via la résolution d'un problème adjoint est beaucoup plus récente en aéroacoustique, et remonte aux travaux de Tam et Auriault [31]. Ces auteurs proposent également dans leurs travaux, une méthode analytique pour calculer la fonction de Green adjointe à l'équation de Lilley [19], définie, pour un écoulement axisymétrique cisailé à indice variable. Les auteurs

validèrent leur solution analytique par un calcul direct des équations adjointes aux EEL autour d'un écoulement moyen réaliste [31] et l'appliquèrent comme propagateur acoustique pour leur modèle stochastique de bruit de mélange turbulent [32]. Goldstein *et al.* [11] étendirent cette formulation analytique pour rendre compte de l'évasement de l'écoulement moyen du jet. La méthode de l'adjoint et la solution analytique proposée par Tam et Auriault furent largement reprises par la communauté [15, 16, 21]. Morris *et al.* [22, 26] puis Miller [20] utilisèrent des solutions asymptotiques de l'équation de Lilley dans les limites haute et basse fréquences. Pour l'étude et le développement de nouveaux modèles de sources du bruit de jet, le champ acoustique n'est souvent étudié qu'à un angle de 90° , et la solution adjointe à l'équation d'Helmholtz est considérée [23, 24]. Parallèlement à ces développements analytiques, Karabasov *et al.* développèrent un code complet 3D permettant de résoudre dans le domaine de Fourier les équations adjointes aux EEL [13, 14] et adaptèrent la formulation de l'adjoint à l'analogie de Goldstein [12, 27]. Notons également que Afsar *et al.* ont généralisé la méthode de l'adjoint pour une formulation plus générale du terme source du bruit de jet au moyen d'un théorème de représentation [2].

Remarquons que les équations adjointes aux équations d'Euler ont été formulées en premier pour de la résolution optimale d'un problème à grand nombre de degré de liberté [1]. Bewley *et al.* donnèrent le système adjoint aux EEL complet écrit à l'aide des variables conservatives dans une étude fondamentale sur le contrôle de la turbulence [4]. Cette utilisation de l'adjoint a connu d'autres applications dans le contrôle des structures responsables du bruit de jet [29, 33].

De nombreuses questions restent ouvertes quant à l'utilisation de l'adjoint pour le calcul des fonctions de Green réciproques. Ces lacunes restreignent le potentiel de l'utilisation de la méthode qui pourrait, entre autre, aisément être étendue à l'étude du phénomène d'effet d'installation pour rendre compte de configurations réelles. La première section rappelle le lien théorique entre fonctions adjointes et la relation de réciprocité, une formulation générale du théorème de représentation sera alors donnée. Un cas simple de construction de l'adjoint est alors détaillé en considérant l'équation d'advection. La suite de l'étude s'intéressera à l'équation d'Helmholtz à indice variable et aux équations linéarisées pour un écoulement stratifié.

2 Opérateur adjoint

Cette section a pour but de présenter le cadre théorique dans lequel est établi la méthode de l'adjoint. Après avoir rappelé sa définition, la relation l'unissant aux fonctions de Green sera établie. Nous terminerons cette section avec le théorème de représentativité [2] permettant la mise en œuvre pratique de la méthode.

L'adjoint est un qualificatif associé à une équation différentielle aux dérivées partielles ou à sa solution qui caractérise sa relation vis-à-vis d'une autre équation qui sera qualifiée de *direct*. Cette relation est sujette à la définition préalable d'une forme bilinéaire symétrique définie. Par commodité et sans perdre de généralité sur ce qui va être présenté, nous associerons, le caractère défini positif aux formes considérées de sorte à pouvoir parler de produit scalaire. Bien que l'adjoint soit défini dans le cadre de la théorie des opérateurs linéaires, il peut arriver que l'on parle abusivement de l'adjoint d'un opérateur non-linéaire, mais il s'agit bien de sa forme linéarisée à laquelle se rattache le terme adjoint.

Définissons pour notre étude, un opérateur linéaire \mathcal{Q}' forcé par un terme source s' régissant l'évolution d'une variable d'état q' . Le problème direct est défini par la relation suivante :

$$\mathcal{Q}'q' = s' \quad (1)$$

Nous n'explicitons pas ici les conditions limites nécessaires au problème (1) pour qu'il soit bien posé. Ces dernières alourdissent les calculs et ne posent pas de difficultés théoriques particulières. De manière cohérente, nous considérerons de plus comme nuls les termes de bords spatiaux-temporels. L'adjoint \mathcal{Q}^\dagger associé à \mathcal{Q}' est défini de manière unique [17] pour le produit scalaire \langle, \rangle par la relation suivante, connue sous le nom de troisième identité de Green :

$$\langle q^\dagger, \mathcal{Q}'q' \rangle = \langle \mathcal{Q}^\dagger q^\dagger, q' \rangle \quad (2)$$

où q^\dagger est la variable adjointe. À nouveau, il est possible de généraliser cette relation de sorte à pouvoir prendre en compte d'éventuels termes de bords ; on pourra se référer aux paragraphes §4.12 de [17] ou §7.5 de [25]. Il est possible de conserver la relation (2) en l'état en choisissant une définition du produit scalaire généralisée aux termes de bords tel que donnée, par exemple, par Giles *et al.* [10]. Une fois \mathcal{Q}^\dagger précisé, il est commode de définir le problème adjoint à (1) en définissant un terme source adjoint s^\dagger tel que :

$$\mathcal{Q}^\dagger q^\dagger = s^\dagger \quad (3)$$

Il est possible de retrouver simplement le principe de réciprocité à partir de ce formalisme. En notant par $\delta_{\vec{x}_s, (i)}$ (resp. $\delta_{\vec{x}_o, (j)}$), la distribution de Dirac associée à la variable i (resp. j) au point \vec{x}_s (resp. \vec{x}_o) de l'espace, on peut définir les fonctions de Green des problèmes direct et adjoint par :

$$\begin{cases} \mathcal{Q}'G'_{\vec{x}_s, (i)} = \delta_{\vec{x}_s, (i)} \\ \mathcal{Q}^\dagger G^\dagger_{\vec{x}_o, (j)} = \delta_{\vec{x}_o, (j)} \end{cases} \quad (4)$$

où $G'_{\vec{x}_s, (i)}$ est la réponse du problème direct à une excitation sur la i -ème variable au point \vec{x}_s et où $G^\dagger_{\vec{x}_o, (j)}$ est la réponse du problème adjoint à une excitation sur la j -ème composante au point \vec{x}_o . La figure 1 illustre le principe de la méthode. En

injectant ces relations dans l'identité de Green (2), on obtient [5] :

$$\langle \delta_{\vec{x}_o, (j)}, G'_{\vec{x}_s, (i)} \rangle = \langle G^\dagger_{\vec{x}_o, (j)}, \delta_{\vec{x}_s, (i)} \rangle \quad (5)$$

Cette relation est l'écriture générale du principe de réciprocité qui établit l'égalité entre l'impact à la position \vec{x}_o sur la j -ème composante du problème direct d'une excitation sur la i -ème composante à la position \vec{x}_s et l'influence à la position \vec{x}_s sur la i -ème composante du problème adjoint d'une excitation sur la j -ème composante à la position \vec{x}_o . Pour une équation scalaire, la relation (5) s'écrit simplement [17, 25] :

$$G'_{\vec{x}_s}(\vec{x}_o) = G^\dagger_{\vec{x}_o}(\vec{x}_s) \quad (6)$$

Dans le cas particulier pour lequel, le problème considéré est auto-adjoint ou symétrique, *i.e.* lorsque $\mathcal{Q}^\dagger = \mathcal{Q}' = \mathcal{Q}$, on obtient la relation de réciprocité classique suivante [7, 8] :

$$G_{\vec{x}_s}(\vec{x}_o) = G_{\vec{x}_o}(\vec{x}_s) \quad (7)$$

Fort de ces résultats, on remarque qu'il est possible avec l'identité de Green (2) de venir écouter en un point \vec{x}_o donné, la j -ème composante du vecteur d'état physique à partir de la connaissance de la fonction de Green adjointe $G^\dagger_{\vec{x}_o, (j)}$ obtenue pour une excitation pour cette j -ème variable et à ce même point \vec{x}_o . Cette relation a été donnée pour certaines configurations particulières dans la littérature [2] et est connue sous le nom de théorème de représentation :

$$\langle \delta_{\vec{x}_o, (j)}, q' \rangle = \langle G^\dagger_{\vec{x}_o, (j)}, s' \rangle \quad (8)$$

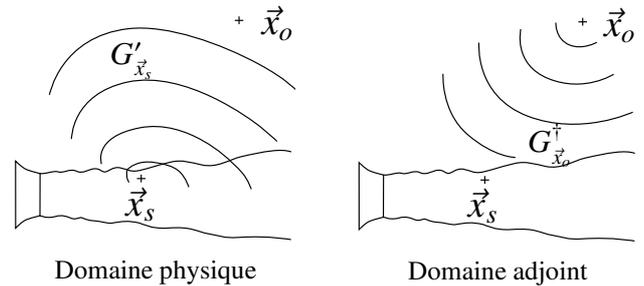


FIGURE 1 – Dans l'espace adjoint, la position de la source et de l'observateur sont échangées. L'écoulement de base reste identique, mais les équations qui gouvernent l'évolution des variables s'en trouvent modifiées.

3 Outils et conventions utilisées

En pratique l'équation adjointe s'obtient en projetant, au moyen d'un produit scalaire, l'équation d'intérêt sur une fonction test qui deviendra la variable adjointe. L'adjoint est alors obtenu en libérant, par des manipulations mathématiques, la variable du problème direct de son opérateur de dérivation. L'application du théorème de Green - Ostrogradsky et la définition de conditions limites pour le problème adjoint permet d'annuler d'éventuels termes de bord et de se ramener à l'identité de Green qui par unicité de l'adjoint définit sans équivoque ce dernier. Cette section présente les outils mathématiques requis pour le calcul de l'adjoint ainsi que les conventions retenues.

La transformée de Fourier \mathcal{F} et sa transformation réciproque \mathcal{F}^{-1} sont définies comme :

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t} dt = \mathcal{F}(f, \omega) \quad (9)$$

$$\underline{f}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = \mathcal{F}^{-1}(f, t) \quad (10)$$

Pour les équations scalaires que nous traitons, nous considérerons les produits scalaires usuels de l'espace des fonctions de carré intégrable, définis sur l'espace Ω de l'étude et à valeur dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Nous notons par f^* le conjugué de f .

$$\forall f, g \in \Omega \times \mathbb{C} \quad \langle f, g \rangle_{\mathbb{C}} = \int_{\Omega} f^* g \, d\Omega \quad (11)$$

$$\forall \underline{f}, \underline{g} \in \Omega \times \mathbb{R} \quad \langle \underline{f}, \underline{g} \rangle_{\mathbb{R}} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega} \underline{f} \underline{g} \, d\Omega \, dt \quad (12)$$

Les équations multivariées de dimension n que nous présentons ici sont définies dans l'espace de Fourier. Pour toute matrice \mathbf{H} hermitienne définie positive, nous définissons, le produit scalaire induit par \mathbf{H} comme :

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in \Omega \times \mathbb{C}^n \quad \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_{\mathbf{H}} = \int_{\Omega} \vec{u}^{\mathbf{H}} \mathbf{H} \vec{v} \, d\Omega \quad (13)$$

En définissant par q' le vecteur d'état du problème direct, un système linéaire d'ordre un \mathcal{Q}' s'écrit de manière générique comme :

$$\mathcal{Q}' q' = -i\omega q' + \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{B}_i q') + \mathbf{C} q' \quad (14)$$

On peut montrer que l'adjoint $\mathcal{Q}'_{\mathbf{H}}$ qui lui est associé par le produit scalaire induit par \mathbf{H} s'écrit pour un vecteur d'état adjoint q^{\dagger} comme :

$$\mathcal{Q}'_{\mathbf{H}} q^{\dagger} = i\omega q^{\dagger} - \mathbf{H}^{-1} \mathbf{B}_i^{\mathbf{H}} \mathbf{H} \frac{\partial q^{\dagger}}{\partial x_i} + \left(\mathbf{H}^{-1} \mathbf{C}^{\mathbf{H}} \mathbf{H} - \mathbf{H}^{-1} \mathbf{B}_i^{\mathbf{H}} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_i} \right) q^{\dagger} \quad (15)$$

4 L'équation d'advection

Illustrons ici simplement comment les différentes notions définies plus haut s'agencent entre elles dans le cas de la convection d'un scalaire passif \underline{f} . En notant \vec{u}_0 , la vitesse de convection, l'équation dans le domaine temporel dont \underline{f} est solution s'écrit comme :

$$\frac{D_{\vec{u}_0}}{Dt}(\underline{f}) = \frac{\partial \underline{f}}{\partial t} + \vec{u}_0 \cdot \nabla \underline{f} \quad (16)$$

En appliquant la définition de la transformée de Fourier (9), on peut écrire le problème harmonique dont f est solution :

$$D_{\vec{u}_0}(f) = -i\omega f + \vec{u}_0 \cdot \nabla f \quad (17)$$

4.1 Analyse dans le domaine temporel

Le membre de gauche de l'identité de Green (2) pour l'équation d'advection pris dans le domaine temporel s'écrit comme :

$$\langle \underline{f}^{\dagger}, \frac{D_{\vec{u}_0}}{Dt}(\underline{f}) \rangle_{\mathbb{R}} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega} \underline{f}^{\dagger} \left(\frac{\partial \underline{f}}{\partial t} + \vec{u}_0 \cdot \nabla \underline{f} \right) \, d\Omega \, dt \quad (18)$$

Par intégration par partie et en appliquant le théorème de Green-Ostrogradsky, il est possible de reformuler l'équation précédente :

$$\begin{aligned} \langle \underline{f}^{\dagger}, \frac{D_{\vec{u}_0}}{Dt}(\underline{f}) \rangle_{\mathbb{R}} &= - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \underline{f}^{\dagger}}{\partial t} + \vec{u}_0 \cdot \nabla \underline{f}^{\dagger} \right) \underline{f} \, d\Omega \, dt \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\partial\Omega} \underline{f}^{\dagger} \underline{f} \vec{u}_0 \cdot \vec{n} \, \partial\Omega \, dt + \int_{\Omega} [\underline{f}^{\dagger} \underline{f}]_{t=-\infty}^{\infty} \, d\Omega \end{aligned} \quad (19)$$

En définissant des conditions limites et des conditions initiales appropriées pour la variable adjointe \underline{f}^{\dagger} , il est possible d'annuler les termes de bord et de se ramener à la relation :

$$\begin{aligned} \langle \underline{f}^{\dagger}, \frac{D_{\vec{u}_0}}{Dt}(\underline{f}) \rangle_{\mathbb{R}} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega} - \left(\frac{\partial \underline{f}^{\dagger}}{\partial t} + \vec{u}_0 \cdot \nabla \underline{f}^{\dagger} \right) \underline{f} \, d\Omega \, dt \\ &= \langle \frac{D_{\vec{u}_0}^{\dagger}}{Dt}(\underline{f}^{\dagger}), \underline{f} \rangle_{\mathbb{R}} \end{aligned} \quad (20)$$

qui par identification avec l'identité de Green permet de définir l'adjoint de l'équation d'advection $D_{\vec{u}_0}^{\dagger}/Dt$ pour le produit scalaire réel usuel :

$$\frac{D_{\vec{u}_0}^{\dagger}}{Dt}(\underline{f}^{\dagger}) = - \frac{\partial \underline{f}^{\dagger}}{\partial t} - \vec{u}_0 \cdot \nabla \underline{f}^{\dagger} = -D_{\vec{u}_0}(\underline{f}^{\dagger}) \quad (21)$$

L'équation adjointe à l'opérateur de convection est donc définie comme étant l'opposée à celle du problème direct ; on dit que l'opérateur de convection est asymétrique.

4.2 Analyse dans le domaine fréquentiel

Le membre de gauche de l'identité de Green (2) pour l'équation d'advection pris dans le domaine de Fourier s'écrit comme :

$$\langle f^{\dagger}, D_{\vec{u}_0}(f) \rangle_{\mathbb{C}} = \int_{\Omega} f^{\dagger*} (-i\omega f + \vec{u}_0 \cdot \nabla f) \, d\Omega \quad (22)$$

En intégrant à nouveau par partie, en reformulant le terme en divergence, et en conjuguant l'ensemble de l'opérateur différentiel, l'expression précédente se reformule en :

$$\begin{aligned} \langle f^{\dagger}, D_{\vec{u}_0}(f) \rangle_{\mathbb{C}} &= - \int_{\Omega} (-i\omega f^{\dagger} + \vec{u}_0 \cdot \nabla f^{\dagger})^* f \, d\Omega \\ &+ \int_{\partial\Omega} f^{\dagger*} f \vec{u}_0 \cdot \vec{n} \, \partial\Omega \end{aligned} \quad (23)$$

En définissant des conditions limites adéquates pour la variable adjointe de manière à annuler le terme de bord, l'identification de l'expression précédente avec l'identité de Green permet de définir l'adjoint de l'opérateur de convection dans le domaine de Fourier, qui s'écrit :

$$D_{\vec{u}_0}^{\dagger}(f^{\dagger}) = i\omega f^{\dagger} - \vec{u}_0 \cdot \nabla f^{\dagger} = -D_{\vec{u}_0}(f^{\dagger}) \quad (24)$$

À travers cette analyse dans le domaine de Fourier, on retrouve que l'opérateur de convection est de nature asymétrique. Le tableau 1 ci-dessous synthétise les divers résultats obtenus pour l'équation d'advection. On voit en particulier que la transformée de Fourier reste valide dans le domaine adjoint.

5 L'équation d'Helmholtz à indice variable

L'équation d'Helmholtz à indice variable gouverne la propagation acoustique de la variable de pression p' dans un milieu isobare uniformément convecté à la vitesse \vec{u}_0 et pouvant présenter des hétérogénéité dans la densité moyenne ρ_0 et la température du milieu. Notons que par propriété de l'écoulement moyen, nécessairement $\vec{u}_0 \cdot \nabla \rho_0 = 0$. En notant a_0 la célérité locale moyenne du son, l'équation d'Helmholtz à indice variable s'écrit dans le domaine de Fourier comme :

$$\mathcal{L}'(p') = D_{\vec{u}_0}^2(p') - \nabla \cdot (a_0^2 \nabla p') \quad (25)$$

En négligeant les termes de bords, et après quelques manipulations mathématiques, l'identité de Green (2) appliqué au produit scalaire hermitien, permet de montrer que l'équation d'Helmholtz à indice variable (25) est autoadjointe et ainsi que :

$$\mathcal{L}^\dagger(p^\dagger) = D_{\vec{u}_0}^2(p^\dagger) - \nabla \cdot (a_0^2 \nabla p^\dagger) \quad (26)$$

6 Cas d'un écoulement stratifié

Les EEL décrivent la propagation du champ acoustique dans un milieu hétérogène quelconque. En absence de gradients moyens de pression et pour un écoulement stratifié, les variables acoustiques peuvent être découplées et le champ fluctuant de pression p' peut être déterminé à partir de l'équation de Lilley. Par soucis de concision, nous considérons ici de plus un écoulement uniforme \vec{u}_0 , et nous nous ramenons à l'étude de l'équation d'Helmholtz à indice variable donné en (25). Dans cette section nous présentons deux systèmes adjoints aux équations linéarisées. Nous soulignons les difficultés d'interprétation des variables adjointes et donnons des pistes pour comprendre leurs points de convergences. Les équations linéarisées s'écrivent pour le vecteur d'état $q' = (\rho', \rho_0 \vec{u}', p')^T$ comme :

$$\mathcal{L}' q' \equiv \begin{cases} D_{\vec{u}_0}(\rho') + \nabla \cdot (\rho_0 \vec{u}') & (a) \\ D_{\vec{u}_0}(\rho_0 \vec{u}') + \nabla p' & (b) \\ D_{\vec{u}_0}(p') + \gamma p_0 \nabla \cdot \vec{u}' & (c) \end{cases} \quad (27)$$

En notant par $s' = (S_{p'}, S_{\rho_0 \vec{u}'}, S_{p'})^T$, le terme source du problème physique, l'équation d'onde pour la variable p' se calcul en considérant $D_{\vec{u}_0}((27.c)) - \nabla \cdot (a_0^2(27.b))$ et donne pour l'opérateur d'Helmholtz à indice variable \mathcal{L}' :

$$\mathcal{L}'(p') = D_{\vec{u}_0}(S_{p'}) - \nabla \cdot (a_0^2 S_{\rho_0 \vec{u}'}) \quad (28)$$

6.1 Équations adjointes classiques

Le système adjoint \mathcal{L}'_I est obtenu à partir du produit scalaire canonique, induit par la matrice identité, soit $\mathbf{H} = \mathbf{I}$ dans (15). Ce système est équivalent à celui donné par Tam et Auriault [31] pour un écoulement moyen comparable. En choisissant pour vecteur d'état adjoint $q^\dagger = (\rho^\dagger, u^\dagger, p^\dagger)^T$, cet opérateur adjoint s'écrit :

$$\mathcal{L}'_I q^\dagger \equiv \begin{cases} -D_{\vec{u}_0}(\rho^\dagger) & (a) \\ -D_{\vec{u}_0}(u^\dagger) - a_0^2 \nabla p^\dagger - \nabla \rho^\dagger & (b) \\ -D_{\vec{u}_0}(p^\dagger) - \nabla \cdot \vec{u}^\dagger & (c) \end{cases} \quad (29)$$

Soit $s^\dagger = (S_{\rho^\dagger}, S_{u^\dagger}, S_{p^\dagger})^T$ le terme source du problème adjoint. Conformément au théorème de représentation (8), si l'on souhaite calculer la variable p' , comme $\mathbf{H} = \mathbf{I}$ est retenu ici, s^\dagger doit être choisi nul sur chacune de ses composantes hormis sur S_{p^\dagger} .

Notons qu'il n'est ici pas possible de se ramener avec ce système à l'équation d'Helmholtz à indice variable (26). En calculant $\nabla \cdot (29.b) - D_{\vec{u}_0}((29.c))$, on obtient pour cette définition du terme source l'équation suivante :

$$D_{\vec{u}_0}^2(p^\dagger) - \nabla \cdot (a_0^2 \nabla p^\dagger) - \nabla^2 \rho^\dagger = -D_{\vec{u}_0}(S_{p^\dagger}) \quad (30)$$

6.2 Équations adjointes symétrisées

Une multitude de définitions pour la matrice \mathbf{H} est possible. Inspirons nous des travaux de Serre [28] et prenons pour \mathbf{H} la matrice de produit scalaire qui symétrise les termes de flux du système (27) :

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} a_0^2 & \vec{0} & -1 \\ \vec{0} & (R^2 - 1)\mathbf{I} & \vec{0} \\ -1 & \vec{0} & R^2/a_0^2 \end{pmatrix} \quad (31)$$

Où $R^2 > 1$ de manière à garantir le caractère défini-positif cette matrice. En appliquant la définition (15), le système adjoint \mathcal{L}'_H formulé pour un vecteur d'état adjoint $q^\dagger_H = (\rho^\dagger_H, \vec{u}^\dagger_H, p^\dagger_H)^T$ s'écrit :

$$\mathcal{L}'_H q^\dagger_H \equiv \begin{cases} -D_{\vec{u}_0}(\rho^\dagger_H) - \nabla \cdot \vec{u}^\dagger_H & (a) \\ -D_{\vec{u}_0}(\vec{u}^\dagger_H) - \nabla p^\dagger_H + \frac{\nabla(a_0^2)}{R^2 - 1} \left(\frac{R^2}{a_0^2} p^\dagger_H - \rho^\dagger_H \right) & (b) \\ -D_{\vec{u}_0}(p^\dagger_H) - a_0^2 \nabla \cdot \vec{u}^\dagger_H & (c) \end{cases} \quad (32)$$

Il est intéressant de remarquer qu'en l'absence de gradients le système (32) est asymétrique vis-à-vis du

	Domaine temporel	Domaine de Fourier
Formulation directe	$\frac{D_{\vec{u}_0}}{Dt}(f) = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{u}_0 \cdot \nabla f$	$D_{\vec{u}_0}(f) = -i\omega f + \vec{u}_0 \cdot \nabla f$
Formulation adjointe	$\frac{D_{\vec{u}_0}^\dagger}{Dt}(f) = -\frac{\partial f^\dagger}{\partial t} - \vec{u}_0 \cdot \nabla f^\dagger$	$D_{\vec{u}_0}^\dagger(f) = i\omega f^\dagger - \vec{u}_0 \cdot \nabla f^\dagger$

TABLEAU 1 – Opérateurs directs et adjoints pour l'équation d'advection exprimés dans les domaines temporel et de Fourier.

système (27), la configuration étant alors analogue à l'équation d'advection traitée plus haut.

La détermination du terme source du problème adjoint $\mathfrak{s}_H^\dagger = (S_{\rho_H}^\dagger, S_{\vec{u}_H}^\dagger, S_{p_H}^\dagger)^T$ qui permette d'observer la variable p' , sans être compliquée n'est pas triviale pour ce cas. Calcul fait, on trouve que $\mathfrak{s}_H^\dagger \propto (1, \vec{0}, a_0^2)^T$. Si cette définition du terme source \mathfrak{s}_H^\dagger est retenue, on obtient en considérant (32.a) et (32.c) une relation d'isentropicité adjointe :

$$D_{\vec{u}_0}(\rho_H^\dagger) = a_0^2 D_{\vec{u}_0}(\rho_H) \quad (33)$$

L'intégration de cette relation (33), simplifie l'écriture de (32.b) en éliminant la dépendance en R . Toutefois, (32) ne permet pas l'écriture de l'équation d'Helmholtz à indice variable pour la variable p_H^\dagger , elle le permet cependant sur la variable ρ_H^\dagger . En calculant $\nabla \cdot (32.b) - D_{\vec{u}_0}((32.1))$, on obtient, en effet, avec cette définition du terme source :

$$D_{\vec{u}_0}^2(\rho_H^\dagger) - \nabla \cdot (a_0^2 \nabla \rho_H^\dagger) = -D_{\vec{u}_0}(S_{\rho_H}^\dagger) \quad (34)$$

6.3 Synthèse du cas de l'écoulement stratifié

La non-unicité de la formulation adjointe dans le cas multivariable vient d'être soulignée. Alors que les équations linéarisées du problème direct se réduisent à l'équation d'Helmholtz à indice variable, cette étude montre que les systèmes adjoints ne peuvent se réduire, en général, en une équation d'onde qui serait l'adjoint de l'équation d'onde du problème direct. On remarque de plus que les variables elles-mêmes obtenues à partir des différents systèmes adjoints n'ont pas la même nature; en effet, alors que ρ^\dagger est simplement convecté par l'écoulement moyen, ρ_H^\dagger possède une dynamique ondulatoire.

Appliquons à présent le théorème de représentation formulé en (8). Afsar *et al.* [2] utilisèrent dans leur étude un terme source de la forme $\mathfrak{s}' = (0, \nabla \cdot \mathbf{T}, Q)^T$, avec \mathbf{T} le tenseur de Lighthill et Q un terme source pour l'équation de l'énergie linéarisée. En choisissant $\mathfrak{s}' = (0, \vec{0}, \delta_{\vec{x}_o})^T$, à partir de la solution aux équations adjointes usuelles \mathfrak{Q}^\dagger , on obtient à l'identique l'expression du théorème de représentation tel que donné en [2] :

$$p'(\vec{x}_o) = \langle \vec{u}^\dagger, \nabla \cdot \mathbf{T} \rangle_C + \langle p^\dagger, Q \rangle_C \quad (35)$$

En partant cette fois-ci des équations adjointes symétrisées \mathfrak{Q}_H^\dagger et en choisissant $\mathfrak{s}_H^\dagger = (\delta_{\vec{x}_o}, \vec{0}, a_0^2 \delta_{\vec{x}_o})^T$, on obtient :

$$p'(\vec{x}_o) = \langle \vec{u}_H^\dagger, \nabla \cdot \mathbf{T} \rangle_C + \langle \rho_H^\dagger, Q \rangle_C \quad (36)$$

Comme les relations (35) et (36) sont valides quelque soit \mathfrak{s}' , nécessairement $\vec{u}_H^\dagger = \vec{u}^\dagger$ et $\rho_H^\dagger = p^\dagger$. Cette dernière égalité est en accord avec les relations (30) et (34) dont les dérivées matérielles montrent que ρ_H^\dagger et p^\dagger sont solutions d'une même équation d'ordre trois.

7 Perspectives

Cette étude a mis en avant que plusieurs formulations du problème adjoint étaient possibles et permettaient la reconstruction de la fonction de Green réciproque. Il est clair que certaines formulations de l'adjoint se prêtent davantage

à une résolution numérique que d'autres. Quelques rares codes de recherche ont vu le jour pour résoudre les équations adjointes aux EEL [27, 31], mais développer un solveur robuste adapté aux problématiques industrielles relève de la gageure. Pour ne citer qu'un point dur, remarquons que les ondes d'instabilité décrites par les EEL existent également dans le domaine adjoint [13]. On peut alors imaginer approximer le champ adjoint aux EEL à partir de la solution d'un code de résolution des équations du problème direct. Il est attendu que la formulation adjointe aux EEL se rapprochant le plus des EEL est celle obtenue à partir du symétriseur \mathbf{H} donné en (31), car c'est elle qui symétrise les matrices de flux du problème [28] et rend asymétrique les équations linéarisées en absence de gradients de l'écoulement moyen.

Pour s'affranchir du couplage entre les modes acoustiques et le mode de vorticité, on peut accepter de dégrader la solution en cherchant le champ acoustique sous la forme d'un champ scalaire potentiel. On peut noter, de plus, qu'à la fois, le bruit de mélange turbulent [32] et le bruit de choc à large bande [23] peuvent être reconstruits à partir de la seule connaissance de la variable adjointe à la vitesse fluctuante. Chercher le champ adjoint à la vitesse fluctuante sous forme potentielle semble ainsi être une piste prometteuse.

Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein du Labex CeLyA de l'université de Lyon, dans le cadre du programme 'Investissements d'Avenir' (ANR-10-LABX-0060/ANR-11-IDEX-0007) piloté par l'Agence Nationale de la Recherche (ANR). Cette étude a été co-financée par l'ANRT dans le cadre d'une convention CIFRE avec Safran Aircraft Engines et a été réalisé sous la direction de G. Bodard.

Références

- [1] F. Abergel and R. Temam. On some control problems in fluid mechanics. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 1(6) :303–325, 1990.
- [2] M. Afsar, A. Dowling, and S. A. Karabasov. Jet noise in the 'zone of silence'. *AIAA Paper*, 2007-3606, 2007.
- [3] C. Bailly, C. Bogey, and S. Candel. Modelling of Sound Generation by Turbulent Reacting Flows. *International Journal of Aeroacoustics*, 9(4-5) :461–489, June 2010.
- [4] T. R. Bewley, P. Moin, and R. Temam. DNS-based predictive control of turbulence : an optimal benchmark for feedback algorithms. *Journal of Fluid Mechanics*, 447 :179–225, November 2001.
- [5] L. I. Cervino, T. R. Bewley, J. B. Freund, and S. K. Lele. Perturbation and adjoint analyses of flow-acoustic interactions in an unsteady 2D jet. In *Proceedings of the Summer Program*, page 14. Center for Turbulence Research, 2002.
- [6] Y. C. Cho. Reciprocity principle in duct acoustics. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 67(5) :1421–1426, 1980.

- [7] A. P. Dowling, J. E. Ffowcs Williams, and M. E. Goldstein. Sound production in a moving stream. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 288(1353) :321–349, 1978.
- [8] T. J. Eisler. An introduction to green's functions. Technical report, Catholic University of America Washington DC Institute of Ocean Science and Engineering, 1969.
- [9] R. Ewert and W. Schröder. Acoustic perturbation equations based on flow decomposition via source filtering. *Journal of Computational Physics*, 188(2) :365–398, July 2003.
- [10] M. B. Giles and N. A. Pierce. Adjoint equations in CFD : duality, boundary conditions and solution behaviour. *AIAA Paper*, 1997-1850, 1997.
- [11] M. E. Goldstein, A. Sescu, and M. Z. Afsar. Effect of non-parallel mean flow on the Green's function for predicting the low-frequency sound from turbulent air jets. *Journal of Fluid Mechanics*, 695 :199–234, March 2012.
- [12] S. A. Karabasov, M. Z. Afsar, T. P. Hynes, A. P. Dowling, W. A. McMullan, C. D. Pokora, G. J. Page, and J. J. McGuirk. Jet Noise : Acoustic Analogy informed by Large Eddy Simulation. *AIAA Journal*, 48(7) :1312–1325, July 2010.
- [13] S. A. Karabasov and T. Hynes. An Efficient Frequency-Domain Algorithm for Wave Scattering Problems in Application to Jet Noise. *AIAA Paper*, 2005-2827, May 2005.
- [14] S. A. Karabasov and T. Hynes. Adjoint Linearised Euler Solver in the Frequency Domain for Jet Noise Modelling. *AIAA Paper*, 2006-2673, May 2006.
- [15] A. Khavaran and J. Bridges. Modelling of fine-scale turbulence mixing noise. *Journal of Sound and Vibration*, 279(3-5) :1131–1154, January 2005.
- [16] A. Khavaran, N. Georgiadis, J. Bridges, and V. Dippold. Effect of Free Jet on Refraction and Noise. *AIAA Paper*, 2005-2941, May 2005.
- [17] C. Lanczos. *Linear differential operators*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 1996.
- [18] M. J. Lighthill. On sound generated aerodynamically i. general theory. In *Proceedings of the Royal Society of London A*, volume 211, pages 564–587. The Royal Society, 1952.
- [19] G. M. Lilley, H. E. Plumlee, W. C. Strahle, S. Y. Ruo, and P. E. Doak. The generation and radiation of supersonic jet noise. volume iv. theory of turbulence generated jet noise, noise radiation from upstream sources, and combustion noise. Technical report, Lockheed-Georgia Co. Marietta, 1972.
- [20] S. A. E. Miller. The prediction of jet noise ground effects using an acoustic analogy and a tailored green's function. *Journal of Sound and Vibration*, 333(4) :1193–1207, 2014.
- [21] S. A. E. Miller and P. J. Morris. The prediction of broadband shock-associated noise including propagation effects. *International Journal of Aeroacoustics*, 11(7-8) :755–781, 2012.
- [22] P. J. Morris and S. Boluriaan. The Prediction of Jet Noise from CFD Data. *AIAA Paper*, 2004-2977, May 2004.
- [23] P. J. Morris and S. A. E. Miller. Prediction of Broadband Shock-Associated Noise Using Reynolds-Averaged Navier-Stokes Computational Fluid Dynamics. *AIAA Journal*, 48(12) :2931–2944, December 2010.
- [24] P. J. Morris and F. Farassat. Acoustic analogy and alternative theories for jet noise prediction. *AIAA Journal*, 40(4) :671–680, 2002.
- [25] P. M. Morse and Feshbach H. *Methods of theoretical physics - Part I*. New York : McGraw-Hill, 1953.
- [26] N. Raizada and P. J. Morris. Prediction of noise from high speed subsonic jets using an acoustic analogy. *AIAA Paper*, 2006-2596, May 2006.
- [27] V. Semiletov and S. A. Karabasov. Adjoint Linearised Euler solver for Goldstein acoustic analogy equations for 3d non-uniform flow sound scattering problems : verification and capability study. *AIAA Paper*, June 2014.
- [28] G. Serre, P. Lafon, X. Gloerfelt, and C. Bailly. Reliable reduced-order models for time-dependent linearized Euler equations. *Journal of Computational Physics*, 231(15) :5176–5194, June 2012.
- [29] B. Spagnoli and C. Airiau. Adjoint analysis for noise control in a two-dimensional compressible mixing layer. *Computers & Fluids*, 37(4) :475–486, May 2008.
- [30] J. W. Strutt (Lord Rayleigh). *The theory of sound*, volume 1. Macmillan, 1877.
- [31] C. K. Tam and L. Auriault. Mean flow refraction effects on sound radiated from localized source in a jet. *Journal of Fluid Mechanics*, 1998.
- [32] C. K. Tam and L. Auriault. Jet mixing noise from fine-scale turbulence. *AIAA Journal*, 37(2) :145–153, 1999.
- [33] M. Wei and J. B. Freund. A noise-controlled free shear flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 546 :123–152, 2006.