

REPONSES IMPULSIONNELLES D'UN JET DE FLûTE A BEC

H.Ohanessian[@], J.Perrigot[@]

[@]Laboratoire de ferroélectricité. I.N.S.A. 20 Avenue Einstein 69621 Villeurbanne France.

La formule de Fletcher [7] [12] est discutée selon l'état de l'arête de sortie du canal et la vitesse du jet.

Cette formule comporte un filtre fréquentiel dépendant de la vitesse du jet. Sa réponse impulsionnelle est tabulée pour une vitesse particulière du jet. La vitesse réelle du jet est prise en compte par calcul d'adresse des échantillons. On traite la périodicité artificielle de la réponse et la précision de la quantification.

1. Equation de Rayleigh [1]. Soit un jet laminaire d'épaisseur $2b$ parallèle au plan xOz , s'écoulant selon Ox . $U(y)$ est le profil des vitesses non perturbé. Les variables $u(x,y,t)$ et $v(x,y,t)$ sont des vitesses de perturbation selon Ox et Oy . La vorticité $-\text{rot } \vec{V}$ selon Oz est: $\zeta = Z + \zeta_d$ avec $Z = \frac{\partial U}{\partial y}$ (1a) et $\zeta_d = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$ (1b)

(vorticités du profil et des perturbations). Les équations de Lagrange-Helmoltz, pour un fluide incompressible et des forces externes dérivant d'un potentiel, conduisent à: $\frac{d\zeta}{dt} = 0$. Donnant à Z et ζ_d leurs valeurs (1a) et (1b) et

négligeant les infiniment petits il vient:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + v \frac{d^2 U}{dy^2} = 0 \quad (2)$$

On retient les perturbations: $u = u(y)e^{int_e jkx}$ et $v(x,y,t) = v(y)e^{int_e jkx}$ (3). L'incompressibilité

entraîne: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$, d'où $u = -\frac{1}{jk} \frac{\partial v}{\partial y}$, et:

$$\left(U + \frac{n}{k}\right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - k^2 v\right) - v \frac{d^2 U}{dy^2} = 0 \quad (\text{Rayleigh}) \quad (4)$$

2. Solution numérique de l'équation de Rayleigh.

Utilisant un profil de Bickley [3] $U(y) = U_0 \text{sech}^2(y/b)$ (5) Mattingly et C. [5] envisagent des perturbations: $u = \text{Re}\{u(y)e^{j(\omega t - \alpha x)}\}$ et $v = \text{Re}\{v(y)e^{j(\omega t - \alpha x)}\}$ (6); u et v sont complexes, ω réel, $\alpha = \alpha_r + j\alpha_i$ complexe, $U_0 = 1$ et $b = 1$.

Pour U_0 et b différents de 1, écrivons l'équation (4) avec les grandeurs réduites: $y_1 = y/b$ et $U_1(y_1) = U(y_1)/U_0$. En notation de Fletcher ($e^{\mu x} e^{j\omega(t-x/u)}$ et $e^{-\mu x} e^{j\omega(t-x/u)}$) on remplace n/k par $-u$, k par ω/u (7):

$$\left[U_1(y_1) - \frac{u}{U_0}\right] \left[\frac{\partial^2 v(y_1)}{\partial y_1^2} - \left(\frac{\omega b}{U_0} - \frac{u}{U_0}\right)^2 v(y_1)\right] - v(y_1) \frac{d^2 U_1(y_1)}{dy_1^2} = 0$$

On voit apparaître les variables sans dimension u/U_0 (vitesse de phase), $\omega b/U_0$ (fréquence). Mattingly et C. donnent pour chaque mode envisagé $\alpha_i = \mu$ et $C_p = u/U_0$, en fonction de $\omega b/U_0$. Le mode parallèle est choisi en raison des symétries de la flûte à bec.

3. Formule de déviation d'un jet de Fletcher.

Fletcher et Thwaites [7] combinent les solutions en $e^{\mu x}$ et $e^{-\mu x}$ pour que l'angle de sortie du jet dh/dx soit continu. La vitesse de déviation verticale est:

$v(x,t) = v(0,t) \cosh(\mu x) e^{-j\omega x/u}$ (8). Ils supposent qu'un jet venant d'un événement fixe dans un champ acoustique de vitesse transversale $v_e^{j\omega t}$ prend la vitesse du champ mais reçoit une perturbation à l'origine $v(0,t) = -v_e^{j\omega t}$. La perturbation au biseau ($x=Wl$) est:

$-v_e^{j\omega t} \cdot \cosh(\mu Wl) \cdot e^{-j\omega Wl/u}$ d'après (8). La vitesse totale au biseau est: $\eta'(\omega) = v_e^{j\omega t} [1 - \cosh(\mu Wl) \cdot e^{-j\omega Wl/u}]$ (9)

Verge et coll. utilisent dans la formule de Fletcher le coefficient d'amplification spatiale et la vitesse de phase de Mattingly et Criminale.

4. Le canal ou événement (fig.1)

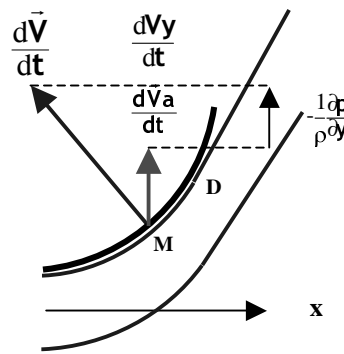


Fig. 1 Jet contre une surface à rayon de courbure décroissant. V_a =champ acoustique M =point de contact. D =point de décollement

Supposons d'abord une arête de canal arrondie et un régime laminaire du jet. Les équations d'Euler de la dynamique des fluides sont: $\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p$ (10)

Le champ acoustique se propageant sans réflexion à travers la fenêtre, on applique l'équation de continuité:

$$\vec{F} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p_a = \frac{\partial \vec{V}_a}{\partial t}$$

L'épaisseur du canal étant petite devant la distance des sources acoustiques situées de part et d'autre du biseau, \vec{V}_a varie peu avec x et y et

$\frac{\partial \vec{V}_a}{\partial t}$ peut s'écrire $\frac{d\vec{V}_a}{dt}$. L'équation (10) devient:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{V}_a}{dt} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p \quad (11)$$

A champ acoustique nul, le gradient de pression compense l'accélération. A champ acoustique variable on a une condition de

collage du jet: $\frac{\partial p}{\partial y} \geq 0$ ou $\frac{dVy}{dt} \geq \frac{dVa}{dt}$ (12a,12b). Au

point de perte de contact on a: $\frac{dV_y}{dt} = \frac{dV_a}{dt}$; V_y est

fonction de x et de t donc $\frac{dV_y}{dt} = \frac{\partial V_y}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V_y}{\partial t}$;

mais au point de décollement d'après (12a) la pression verticale ne varie pas donc $\frac{\partial V_y}{\partial t} = 0$. La condition de

décollage est : $\frac{\partial V_y}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dV_a}{dt}$ ou $\frac{\partial V_y}{\partial x} = \frac{1}{U_j} \frac{dV_a}{dt}$ (13) ;

la vorticité: $-\frac{\partial V_y}{\partial x}$ est due au champ \vec{V}_a

Dans le cas d'une arête acérée et /ou de fortes vitesses du jet, l'équation de Fletcher peut s'interpréter en supposant que le passage du jet contre l'arête perturbe le profil, donnant lieu à une vorticité ajoutée: $\frac{\partial U_j}{\partial y} = \frac{1}{U_j} \frac{dV_a}{dt}$ (14) . En l'absence de pertes d'énergie,

la relaxation du profil à la perte de contact équivaut à une perturbation $-V_a$; le jet libre vérifie l'équation $\frac{dV_y}{dt} = \frac{dV_a}{dt}$ ou $V_y=V_a$ car $V_y=V_a=0$ dans le canal.

La relation (13) entraîne une angulation immédiate du jet incompatible avec l'hypothèse de continuité de Fletcher; (14) est compatible avec le résultat de la formule (9). Dans les expériences de Brown [2] la déviation acoustique d'un jet libre commence plus près de la sortie du canal pour une vitesse-jet de 100cm/s que pour 380cm/s. Dans les enregistrements de Fabre et coll. [9], la sortie de canal est visible, et les champs acoustiques du résonateur sont tels qu'une angulation immédiate du jet est observable à $p_0=60Pa$, et réduite à $p_0=270Pa$. Ces résultats sont cohérents avec le facteur $1/U_j$ de (13) et (14) ; ceux de Fabre et coll. créditent le type de vorticité (13); les jets rapides ou turbulents et les conditions de collage créditent (14).

5. Tabulation de F(t) pour $U_0=U_{ref}$

$F_{ref}(t) = F_{ref}^{-1}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cosh(\mu W_1) e^{i\omega(t-W_1/u)} d\omega$ (15)

Soit: $St = \frac{\omega \cdot b}{U_{ref}}$ la variable d'intégration ; on choisit

$\mu(-St) = \mu(St)$; on a $\mu \neq 0$ pour $0 < St < 1.3$; il vient :

$F_{ref}(t) = \frac{U_{ref}}{\pi \cdot b} \int_{St=0}^{1.3} \cosh(\mu W_1) \cos \omega(t-W_1/u) dSt$ (15 bis)

On a: $C_p = u/U_0$, le terme $\cos \omega(t-W_1/u)$ s'écrit donc :

$\cos \omega(t-W_1/u) = \cos \left[\frac{St}{b} (t \cdot U_{ref} - W_1/C_p) \right]$ (16)

Pour $U_0 \neq U_{ref}$ on calcule d'après (15bis) ou (16) :

$F(t) = (U_0/U_{ref}) \cdot F_{ref}(t \cdot U_0/U_{ref})$ (17) par accès direct au tableau $F_{ref}(t)$, et interpolation de $t \cdot U_0/U_{ref}$.

6. Périodicité de la réponse impulsionnelle. Le calcul numérique de $F_{ref}(t)$ utilise la formule discrète :

$F_{ref}(t) = \frac{U_{ref}}{\pi \cdot b} \sum_{i=1}^N \{ \cosh(\mu W_1) \cos \left[\frac{St[i]}{b} \dots \right. \}$
 $\left. \dots (t \cdot U_{ref} - W_1/C_p[i]) \right] (St[i] - St[i-1])$ (18)

Dans cette formule, la valeur la plus basse de St est $St[1]=1.3/N$; il y correspond une valeur minimale de ω engendrant une période $T=2\pi b/(St[1] \cdot U_{ref})$. Un échantillonnage trop faible de St fait apparaître dans le tableau $F_{ref}[t]$ des réponses périodiques indésirables ou fantômes: on doit utiliser pour la tabulation un échantillonnage fin de St qui permet de placer une seule réponse dans la fenêtre utilisée par (17).

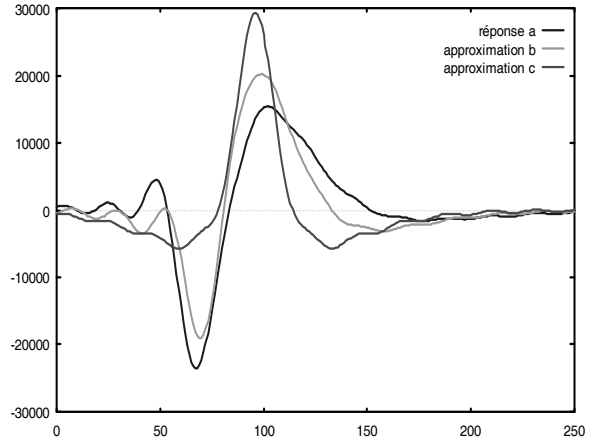


Figure 3 $F_{ref}(t)$ a) sans approximation b) $u/U_j \neq 0.5 + (St-0.6)/6$; c) $u/U_j = 0.5$. Les cas b et c montrent l'importance de la dispersion de u/U_j

7. Précision de $F_{ref}(t)$ Pour U_0 quelconque, on calcule $F(t) = F_{ref}(t \cdot U_0/U_{ref})$. Il est nécessaire de tabuler $F_{ref}(t)$ avec un dt 4 à 6 fois plus petit que celui des échantillons sonores pour augmenter la précision.

Conclusions. Le calcul en temps réel de la dérivée de la déviation nécessite encore la convolution $s(t) = v_m(t) * F(t)$, et la somme : $\eta'(t) = v_m(t) - s(t)$. Les calculs d'accès à la réponse impulsionnelle, qui comportent une multiplication et une division en virgule flottante pour chaque terme de la convolution sont possibles en temps réel. La formule de Fletcher, paraît encore très perfectible; elle pourrait tenir compte de la viscosité et des pertes [8] en sortie de canal, du régime du jet, et des tourbillons liés à ses déplacements [2][6].

Bibliographie

- [1] Lord Rayleigh, « The Theory of Sound ». Edité en 1894; Réed. Dover Publications, N-Y (1945) .
- [2] G.B Brown, On vortex motion in gaseous jets and the origin of their sensitivity to sound. Proc.Phys.Soc. (London) 53,703 (1935).
- [3] W.G Bickley, The plane jet. Phil.Mag., 28, 727-731 (1937).
- [4] P. Drazin., L.N Howard, Hydrodynamic stability of parallel flow of inviscid fluid. Adv. Appl. Mech. 9, 1-89 (1966).
- [5] G.E. Mattingly, W.O. Criminale, Disturbance characteristics in a plane jet. The Physics of Fluids. 14, number 11 (1971).
- [6] D.Holger, T.A.Wilson, G.S. Beavers, Fluid mechanics of the edgetone. J.Acoust.Soc. Am, 62 (5), 1116-1128 (1977).
- [7] N.H Fletcher, S. Thwaites, Wave propagation on an acoustically perturbed jet. Acustica, 42, 323-334 (1979).
- [8] M.P.Verge, R.Caussé, B.Fabre, A.Hirschberg, A.P.J. Wijnands, and A. van Steenbergen Jet oscillations and jet drive in recorder-like instruments Acta Acustica 2 (1994).
- [9] B.Fabre, A.Hirschberg, A.P.J. Wijnands Vortex Shedding in Steady Oscillation of a Flue Organ Pipe. ACUSTICA – acta acustica Vol 82 863-877, (1996).
- [10] M.P.Verge, A.Hirschberg., R.Caussé, Sound production in recorderlike instruments. II.A simulation model. J. Acoust. Soc. Am., 101 (5), Pt.1, 2925-2939 (1997).
- [11] R.Comolet, « Mécanique expérimentale des fluides », Masson. Mars 1997. (Cf. tome 1 pp 91-93.)
- [12] N.H. Fletcher, T.D. Rossing, « The Physics of Musical Instruments » 2nd edition. Springer Verlag (1998).