

CFA/VISHNO 2016

Prédiction de l'amplitude du cycle limite des générateurs d'ondes thermoacoustique à partir de la mesure de matrices de transfert non linéaires

V. Zornotti, G. Penelet et G. Poignand

LAUM UMR-CNRS 6613, av. Olivier Messiaen, 72085 Le Mans, France

valentin.zornotti@gmail.com



LE MANS

Les moteurs thermo-acoustiques sont des systèmes auto-oscillants qui convertissent de la chaleur en énergie acoustique. Ce type de transduction est mis en évidence dans divers systèmes simples comme le tube de Hofler. Le développement récent de machines thermo-acoustiques plus complexes a permis de mettre en évidence une grande partie des phénomènes non-linéaires mis en jeu dans les machines thermo-acoustiques. Cependant, bon nombre de ces phénomènes, responsables de la saturation en amplitude des auto-oscillations, restent mal décrits.

Les travaux présentés ici sont basés sur une méthode de prédiction de régime stable pour ces machines à partir de la mesure de matrices de transferts non linéaires associées au noyau thermo-acoustique. À terme, cette étude doit prédire le régime établi d'une machine quelconque. La matrice de transfert non linéaire associée à un noyau peut être obtenue expérimentalement par des méthodes relativement simples (méthode à deux charges, pont d'impédance acoustique,...), en faisant varier l'amplitude de l'onde acoustique se propageant dans le noyau. Une fois obtenue, la matrice de transfert non linéaire peut être utilisée pour déterminer les conditions de stabilité d'un système, ainsi que l'amplitude acoustique atteinte durant le cycle limite. Nous présenterons une validation de principe de la méthode sur l'exemple simple du tube de Hofler, puis nous présenterons brièvement le banc de mesure en cours de développement pour la mesure de matrice de transfert non-linéaire de noyaux thermo-acoustiques. En effet, l'objectif visé à terme est d'étendre la méthode à des machines plus complexes et ainsi prédire leur comportement en régime stable.

1 Introduction

La description de la saturation d'un système thermo-acoustique, donnant notamment accès aux conditions de stabilité d'une machine, est un problème non résolu à l'heure actuelle, du fait de la variété et de la complexité des processus responsables de la saturation (pompage de chaleur thermo-acoustique, effets de bords aéro-dynamiques et entropiques, vent acoustique, turbulence ...). Outre les approches directes, tant théoriques qu'expérimentales, visant à caractériser finement et de façon isolée chacun des processus saturants, il est tentant de mettre en œuvre des approches plus globales basées sur la caractérisation du noyau thermo-acoustique en tant que "boîte noire". Plusieurs études ont déjà été menées traitant de la caractérisation linéaire de tels systèmes (voir [1] et [2]), sur la base de la mesure de la matrice de transfert ou de diffusion du noyau thermo-acoustique. La limite évidente à ces approches linéaires, bien qu'elles permettent de décrire le déclenchement de ces systèmes, est que celles-ci ne sont pas adaptées pour prévoir un cycle de saturation, de nature non linéaire. Cependant, les travaux récents de Noiray et al. [3] ont mis en œuvre une méthode de prédiction de cycle limite basée sur la mesure d'une fonction de transfert non linéaire, en application à des problématiques d'instabilité thermo-acoustique en combustion. Le principe de la méthode est basée sur la mesure d'une fonction de description de la dynamique de flamme (plus précisément du taux de dégagement de chaleur instationnaire de la flamme) en fonction de l'amplitude d'un champ de vitesse acoustique. L'intérêt principal de cette méthode est qu'elle ne nécessite pas de modéliser finement le système. Or décrire le système, du moins en traitant le problème de manière directe n'est pas chose aisée. Cette approche "boîte noire", qui a fait ses preuves dans le domaine des instabilités de combustion, est donc très intéressante pour le problème de prédiction de cycle limite dans les générateurs d'onde thermo-acoustiques. L'objet des travaux présentés ici est de poser les bases de l'application d'une telle méthode pour la prédiction de cycle limite dans les moteurs thermo-acoustique. Le premier objectif est de confirmer le principe de l'approche. Pour ce faire, on propose de résoudre le cas simple du tube de Hofler (voir Fig. 1), en faisant usage d'une approche "directe" basée sur la connaissance supposée complète du système, puis d'une approche "indirecte" basée sur la seule connaissance

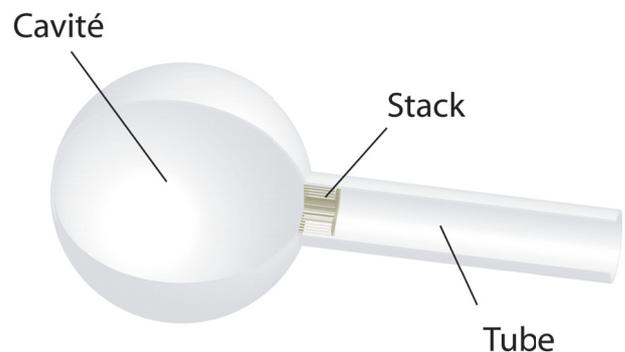


FIGURE 1 – Représentation schématique d'un tube de Hofler.

Le système n'est autre qu'un résonateur de Helmholtz contenant un stack poreux à la jonction entre la cavité et le col. Un gradient de température axial (supposé constant) est appliqué le long du stack, qui prend la température T_H à la jonction avec la cavité, et la température ambiante T_∞ à la jonction avec le tube. La fréquence des auto-oscillations attendues est proche de la fréquence naturelle du résonateur de Helmholtz.

des caractéristiques non linéaires du quadripôle représentant le noyau (cette dernière étant accessible à la mesure). Une fois le problème posé, il est possible de prédire un cycle limite de saturation de la machine ou état de fonctionnement stationnaire. L'une ou l'autre des approches permet de qualifier le cycle limite atteint en régime stationnaire caractérisé par une amplitude de pression acoustique, P_∞ , ainsi que par une fréquence de fonctionnement associée, f_∞ . L'enjeu de ces travaux est premièrement de déterminer si les valeurs retrouvées par la mesure (ici simulée) sont cohérentes avec les valeurs théoriques attendues. Si tel est le cas l'approche "indirecte" pourra en principe être employée afin de caractériser des noyaux plus complets, comprenant divers éléments comme des échangeurs de chaleurs.

2 Un modèle simple : le tube de Hofler

Afin de valider la méthode dans le cas d'un problème de thermo-acoustique, le système caractérisé dans un premier temps est un système extrêmement simple, à savoir le tube de Hofler dont un schéma est donnée sur la Fig. 1.

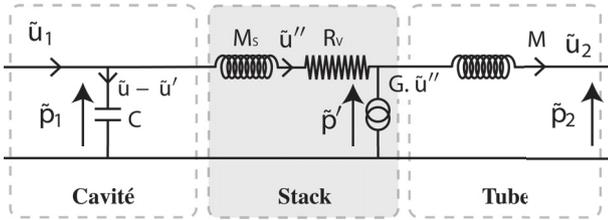


FIGURE 2 – Schéma électrique équivalent à un tube de Hofler, sans perte non-linéaire.

2.1 Approche directe

Nous décrivons ci-après comment obtenir l'amplitude et la fréquence du cycle limite de façon directe, c'est-à-dire en supposant connu l'intégralité du système, y compris les mécanismes de saturation. La méthode employée, basée sur les travaux de M. Guédra et G. Penelet [4], est appliquée au système de la Fig. 1. Celle-ci consiste à écrire la matrice de transfert du système linéaire à partir de son schéma électro-acoustique équivalent en constantes localisées, voir Fig. 2, pour un gradient de température linéaire, fixé. Sur le schéma électro-acoustique, le stack est représenté par une masse acoustique M_s en série avec une résistance R_v , ainsi que par un générateur de courant proportionnel au débit en entrée du stack \tilde{u}'' et au gain G qui décrit le processus d'amplification thermo-acoustique. La cavité en aval du stack est considérée équivalente à une compliance acoustique C tandis que le tube en aval du stack est représenté par une masse acoustique M . Les expressions analytiques classiques de ces différents éléments sont explicités dans [6] Les termes de la matrice de transfert reliant les amplitudes complexes de pression \tilde{p} et débit \tilde{u} acoustiques en sortie (2) et en entrée (1) s'écrivent :

$$T_{pp} = 1 + i\omega C(i\omega M_s + R_v) - \omega^2 M C(1 + G), \quad (1)$$

$$T_{pu} = -i\omega M_s - R_v - (1 + G)i\omega M, \quad (2)$$

$$T_{up} = -i\omega C(1 + G), \quad (3)$$

$$T_{uu} = 1 + G. \quad (4)$$

Dans le cas du système de Hofler, les conditions aux limites appliquées au système matriciel donnent :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{pp} & T_{pu} \\ T_{up} & T_{uu} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \tilde{p}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

ce qui permet d'obtenir l'équation caractéristique qu'il convient de résoudre :

$$T_{pp} = 1 + i\omega C(i\omega M_s + R_v) - \omega^2 M C(1 + G) = 0. \quad (6)$$

Quel que soit le gradient de température imposé le long du stack l'équation caractéristique admet une solution complexe pour la pulsation acoustique ω . La partie réelle de la pulsation complexe, notée ω' , représente la pulsation de fonctionnement du système pour une température T_H imposée et la partie imaginaire, notée ω'' , est reliée au taux d'amplification du moteur dans ces conditions. La recherche purement analytique de solutions pour l'équation caractéristique ne représentant, dans notre cas, que peu d'intérêt, celle-ci est résolue numériquement. Un intérêt de cette méthode est qu'elle fournit l'information sur le déclenchement de la machine correspondant à un taux d'amplification, noté σ (où $\sigma = -\omega''$), qui devient positif. En d'autres termes, il est possible de qualifier l'amplification

thermo-acoustique comme suit :

$$d_t P = \sigma(T_H)P, \quad (7)$$

pour décrire les variations (lentes en regard de la période acoustique) de l'amplitude de pression acoustique $P = |\tilde{p}_1|$ dans la cavité. Néanmoins, aucun terme de saturation non linéaire n'est présent, de sorte que l'amplitude d'un cycle limite n'est pas accessible. On propose ici de prendre en compte un des mécanismes saturants qui compte dans ce genre de système pour trouver l'amplitude d'un cycle limite. Il s'agit de la dissipation d'énergie mécanique associée à la génération de tourbillons aux extrémités du stack. Cette dissipation d'énergie peut être estimée sur la base de la connaissance des coefficients de pertes de charge en flux entrant et sortant du stack, et il est possible de montrer que cette dissipation impacte le taux de variation de l'amplitude de pression acoustique sous forme d'un terme quadratique :

$$d_t P = \sigma(T_H)P - \alpha P^2, \quad (8)$$

où le coefficient α associé à ces pertes, non explicité ici (voir par exemple [5] pour plus de détails) dépend des coefficients de perte de charge. L'amplitude des oscillations de pression en régime stationnaire ($d_t P = 0$) est alors directement accessible :

$$\sigma(T_H) - \alpha P_\infty = 0, \quad (9)$$

et donc, l'amplitude de la pression acoustique au cycle limite, qui satisfait l'éq. (9), est donnée par :

$$P_\infty = \frac{\sigma(T_H)}{\alpha}. \quad (10)$$

Comme attendu, cette relation indique que le système atteint un cycle limite de fonctionnement stationnaire lorsque le taux d'amplification compense les pertes quadratiques. Nous allons désormais chercher à retrouver ce même résultat par une approche indirecte basée sur la connaissance d'une matrice de transfert non linéaire.

2.2 Simulation numérique de mesure, approche indirecte.

Le principe de l'approche indirecte est décrit ici. La matrice de transfert définie pour un tube de Hofler (dans cet exemple), données par la relation :

$$\begin{bmatrix} \tilde{p}_2 \\ \tilde{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{pp} & T_{pu} \\ T_{up} & T_{uu} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \tilde{p}_1 \\ \tilde{u}_1 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

permet de relier la pression \tilde{p}_1 et le débit \tilde{u}_1 incidents aux pression et débit en sortie \tilde{p}_2 , et \tilde{u}_2 .

Pour accéder expérimentalement aux 4 coefficients ($T_{ij}(T_H, \omega, P)$) de cette matrice de transfert (linéaire ou non), deux mesures doivent être effectuées. Une première mesure consiste à générer un débit acoustique en entrée du tube, tandis que lors de la seconde, le débit acoustique est introduit dans la cavité tel que le montre la Fig. 3. On dispose ainsi au terme de ces deux mesures de quatre relations pressions/débits permettant d'accéder aux quatre coefficients de la matrice de transfert. Dans le cas particulier du tube de Hofler considéré ici, il se trouve que l'équation caractéristique non linéaire prend simplement la forme :

$$T_{pp}(T_H, \omega, P) = 0, \quad (12)$$

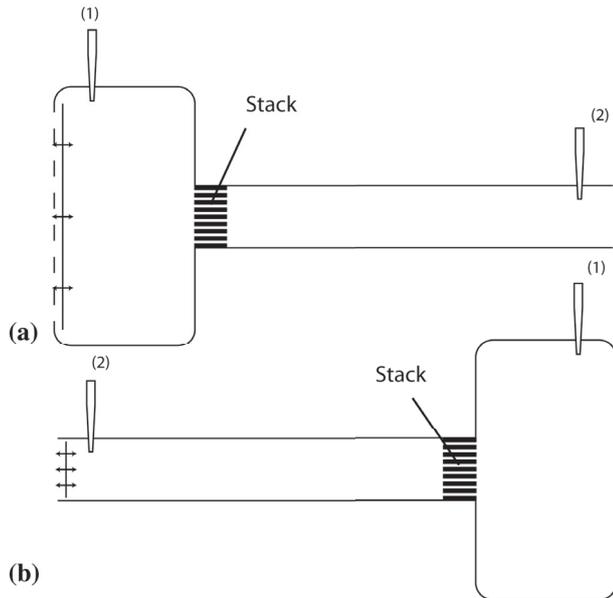


FIGURE 3 – Schéma des deux mesures. Les microphones (1) et (2) sont indiqués sur la figure aux deux extrémités du système. Dans le cas de la mesure (a), les conditions aux limites imposent que la pression mesurée par le micro (2), \tilde{p}_2 soit nulle (le micro est situé au bout du tube). Dans le cas de la mesure (b), c'est le débit à l'entrée \tilde{u}_1 qui est nul.

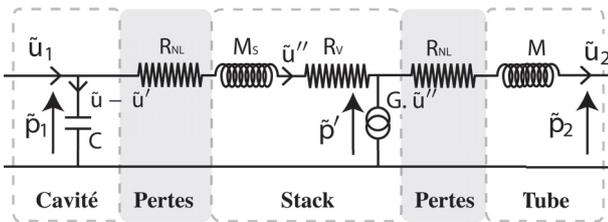


FIGURE 4 – Schéma électrique équivalent à un tube de Hoffer. Deux résistances non linéaires (R_{NL}) ont été placées en amont et aval du stack pour représenter les pertes de charges. Les valeurs de ces résistances sont définies en fonction des débits acoustiques aux extrémités du stack.

alors même que ce coefficient T_{pp} est accessible via une seule mesure (la mesure représentée sur la Fig. 3(b)).

Pour valider l'accès à la mesure de ce coefficient, dans ce qui suit la matrice de transfert non-linéaire n'est pas réellement mesurée (le tube de Hoffer étant par ailleurs un système idéalisé) mais simulée, en injectant directement dans le schéma électrique équivalent du système deux résistances non linéaires (i.e. résistances proportionnelles au débit acoustique) décrivant les pertes à chaque extrémité du stack. À l'instar du paramètre α décrit ci-avant, ces résistances peuvent être exprimées à partir des coefficients de perte de charge. Le schéma électroacoustique résultant est fourni sur la Fig. 4.

Cette mesure est donc simulée sur la base du schéma électroacoustique de la Fig. 4, donnant ainsi accès à la fonction de transfert non-linéaire

$$\frac{\tilde{p}_2}{\tilde{p}_1} = T_{pp}(T_H, \omega, P) \quad (13)$$

où P représente l'amplitude, contrôlée, de la pression acoustique dans la cavité ($P = |\tilde{p}_1|$). À titre d'exemple, la Fig. 5 présente le module de T_{pp} ainsi obtenu en fonction de P et ω pour $T_H = 480$ K (et $T_\infty = 300$ K). Dès lors que la

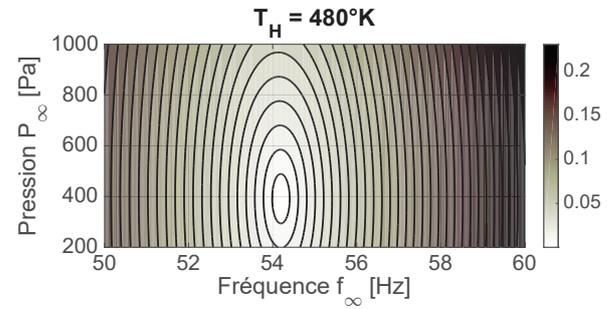


FIGURE 5 – Module de T_{pp} à une température $T_H = 480$ K imposée au dessus du seuil de déclenchement du système. Le système est forcé pour différentes valeurs d'amplitude de pression et pulsation. Le module de la fonction est minimal pour un certain couple de valeurs $\{\omega_\infty, P_\infty\}$.

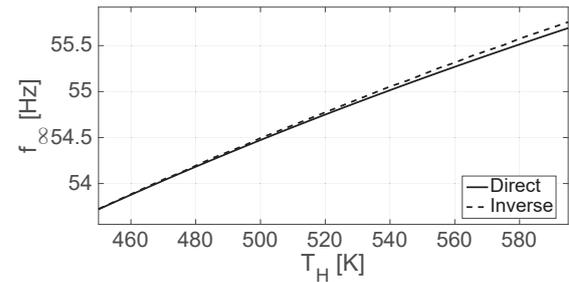
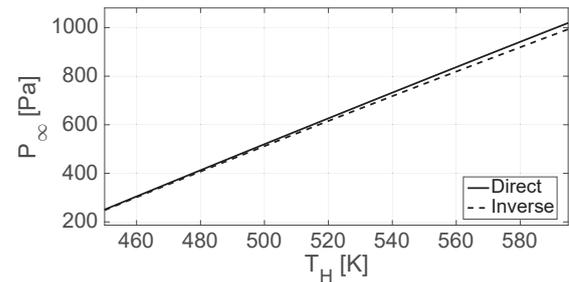


FIGURE 6 – Amplitude de la pression acoustique P_∞ et fréquence f_∞ atteintes au cycle limite de saturation de la machine. La courbe en trait plein représente les résultats obtenus par la méthode 'directe', tandis que la courbe tirée est obtenue par l'étude de fonction de T_{pp} . Les deux méthodes semblent s'accorder.

température T_H est fixée au-delà de sa valeur correspondant au seuil de déclenchement du système, il est possible de trouver un couple de valeurs $(\omega_\infty, P_\infty)$ permettant d'annuler le module du terme T_{pp} et d'accéder ainsi à l'amplitude et à la fréquence du cycle limite.

La Fig. 6 présente les fréquences et amplitudes de pressions du cycle limite obtenues par les deux approches (directe et indirecte) en fonction de la température de chauffage T_H .

À première vue, les deux méthodes donnent des résultats très proches. La différence essentielle entre la méthode décrite ici et la méthode "directe" décrite auparavant tient au fait que le caractère non linéaire du noyau est en principe directement accessible à la mesure, sans besoin de connaître et d'identifier les processus de dissipation non-linéaire. L'approche "indirecte", vue sous cet angle, est donc intéressante car elle peut donner accès à une prédiction de la valeur de P_∞ , l'amplitude de la pression atteinte au cycle limite, et de f_∞ , la fréquence de fonctionnement

associée.

3 Banc de mesure

Un banc de mesure est actuellement en cours de développement afin d'appliquer cette approche à un moteur réel, à savoir un moteur thermo-acoustique quart d'onde. Une fois le banc monté, les caractéristiques non-linéaires du quadripôle représentant le noyau seront mesurées à l'aide d'un capteur d'impédance acoustique adapté à supporter de forts niveaux d'amplitude acoustique, ainsi que d'un microphone à l'autre extrémité du noyau. Le principe de mesure est alors de forcer le système, à l'aide du transducteur ferro-fluide interne au pont d'impédance, à une certaine fréquence, pour une certaine puissance électrique imposée au transducteur. Dans le cas étudié ici du tube de Hofler, une seule mesure suffit, puisque le terme T_{pp} contient à lui seul l'information nécessaire à l'estimation d'un cycle limite. Dans ce banc expérimental, seul le noyau thermo-acoustique sera caractérisé et ainsi le cycle de déclenchement d'une machine munie de ce noyau pourra être prédit.

4 Conclusion et perspectives.

Les travaux décrits ici n'ont été engagés que récemment, et bon nombre de questions restent ouvertes quant à l'utilisation potentielle d'une méthode indirecte de prédiction de cycle limite au moyen d'une caractérisation préalable à fort niveau du noyau thermo-acoustique. Parmi ces questions figure celle de l'impact des (voire des limites d'applicabilité inhérentes aux) processus saturant qui impactent le champ de température dans le noyau thermo-acoustique (pompage de chaleur thermo-acoustique et vent acoustique). Nous chercherons donc à aborder ces questions tant au moyen de la preuve de concept expérimentale que de la simulation d'expérience pour mieux appréhender ce problème. Nous espérons à terme que cette approche originale sera en mesure d'apporter des éléments de réponse concrets pour le dimensionnement et l'optimisation de machines thermo-acoustiques de forte puissance.

Références

- [1] M. Guédra, G. Penelet, P. Lotton, and J.-P. Dalmont. Theoretical prediction of the onset of thermoacoustic instability from the experimental transfer matrix of a thermoacoustic core. *Journal of the Acoustical Society of America* : p145-152, 2011.
- [2] F. C. Bannwart, G. Penelet, P. Lotton, and J.-P. Dalmont. Measurements of the impedance matrix of a thermoacoustic core : Applications to the design of thermoacoustic engines. *Journal of the Acoustical Society of America* : p2650-2660, 2013.
- [3] N. Noiray, D. Durox, T. Schuller, and S. Candel. A unified framework for nonlinear combustion instability analysis based on the flame describing function *Journal of Fluid Mechanics* Vol. 615 : p139-167, 2008.
- [4] M. Guédra, and G. Penelet. On the Use of a Complex Frequency for the Description of Thermoacoustic Engines. *Acta Acustica United With Acustica* Vol. 98 : 232-241, 2012.
- [5] G. Penelet, V. Gusev, P. Lotton, and M. Bruneau. Experimental and theoretical study of processes leading to steady-state sound in annular thermoacoustic engines. *Phys Rev. E* Vol. 72 : 016625, 2005.
- [6] G. W. Swift. *Springer Handbook of Acoustics*. 2007. (ISBN 0-387-304460)