

CFA/VISHNO 2016

Continuation de solutions quasi-périodiques à deux fréquences par équilibrage harmoniqueL. Guillot^a, P. Vigué^a, C. Vergez^a et B. Cochelin^b^aLaboratoire de Mécanique et d'Acoustique, 4 impasse Nikola Tesla, CS 40006, 13453 Marseille, France^bLaboratoire de Mécanique et Acoustique (LMA) UPR CNRS 7051, Ecole Centrale de Marseille, Aix-Marseille Université, 4 impasse Nikola Tesla, CS 40006, 13453 Marseille Cedex 13, France
vigue@lma.cnrs-mrs.fr

LE MANS

Un système non linéaire peut avoir des solutions périodiques, qui évoluent selon les paramètres du système. L'étude de cette évolution des solutions, appelée continuation, a un intérêt tout particulier en acoustique musicale, de nombreux instruments reposant sur l'excitation d'un système non linéaire dont le musicien contrôle certains paramètres. Les solutions périodiques peuvent être cherchées sous forme de séries de Fourier tronquées (méthode de l'Équilibrage Harmonique); la période est une des inconnues. Plusieurs solutions stables peuvent être mises en évidence par la continuation pour les mêmes paramètres de jeu, illustrant la dépendance aux conditions initiales. La méthode donne aussi accès aux solutions instables des modèles. Un défi important concerne la recherche des solutions quasi-périodiques à deux fréquences incommensurables (aussi appelés "sons multiphoniques" par les musiciens). Nous avons développé une méthode de recherche de ces solutions, représentées par des séries doubles de Fourier. Comme dans le cas périodique, une méthode de continuation permet de suivre la branche de solutions obtenues. Nous illustrons cette méthode sur un modèle réduit d'instrument à anche.

1 Introduction

Un système non linéaire peut avoir des solutions périodiques qui évoluent selon les paramètres du système. L'étude de cette évolution des solutions, appelée continuation, a un intérêt tout particulier en acoustique musicale, de nombreux instruments reposant sur l'auto-oscillation, l'excitation d'un système non linéaire dont le musicien contrôle certains paramètres. Les solutions périodiques peuvent être cherchées sous forme de séries de Fourier tronquées (méthode de l'Équilibrage Harmonique); la période est une des inconnues. Plusieurs solutions stables peuvent être mises en évidence par la continuation pour les mêmes paramètres de jeu, illustrant la dépendance aux conditions initiales. La méthode donne aussi accès aux solutions instables des modèles.

Un défi important concerne la recherche des solutions quasi-périodiques à deux fréquences incommensurables (aussi appelés "sons multiphoniques" par les musiciens). Ces solutions peuvent être indésirables : par exemple, la note du loup sur les instruments à cordes est une sorte de battement et constitue un exemple de régime quasi-périodique pour un système autonome. Ces solutions peuvent aussi être produites volontairement en utilisant un forçage : chanter dans un cuivre à une fréquence f_1 tout en jouant à une fréquence f_2 peut produire des effets spectaculaires.

Notre but est la continuation de solutions quasi-périodiques à deux fréquences. Il est important de noter que le calcul direct des ces solutions est en soi difficile. En raison de la dépendance aux conditions initiales, l'intégration numérique peut s'avérer insuffisante pour les trouver. De plus, si l'on choisit d'intégrer sur un intervalle important pour quitter le régime transitoire, un critère d'arrêt (pour s'assurer que l'intégration a convergé vers la solution quasi-périodique) est plus délicat à établir que dans le cas périodique. Ces inconvénients ont mené à la conception d'algorithmes spécifiques pour le calcul de solutions quasi-périodiques, tout d'abord comme réponse à un forçage quasi-périodique [1]. Plus récemment, le calcul de solutions quasi-périodiques pour les systèmes forcés ou autonomes, basé sur la méthode temps-fréquence AFT [2], a permis d'obtenir un bon accord qualitatif sur un modèle de frein à disque [3]. Peletan *et coll.* [4] ont appliqué un couplage de l'AFT à une continuation par pseudo-longueur d'arc à un rotor Jeffcott. Pour ce système une des fréquences

est connue et une sélection des harmoniques améliore la performance des calculs.

Cochelin et Vergez [5] ont montré que pour les solutions périodiques, étant donnée une formulation quadratique, un couplage de la méthode d'Équilibrage Harmonique et de la Méthode Asymptotique Numérique était réalisable et permettait un calcul avec un nombre élevé d'harmoniques. La méthode développée ici est une extension de cette idée avec des séries doubles de Fourier. Les deux fréquences de base sont inconnues et incommensurables. La formulation quadratique est à nouveau utilisée. Cette méthode est illustrée ici sur des modèles simples de systèmes forcé et autonome pour présenter une preuve de concept. Les paramètres des systèmes pourraient être adaptés pour présenter des résultats adaptés à l'acoustique musicale. Cependant, les valeurs simples retenues ici soulignent qu'aucune connaissance *a priori* des solutions n'est nécessaire, et que la méthode peut être appliquée à une grande variété de systèmes.

2 Équilibrage Harmonique à deux fréquences

2.1 Principe : formulation quadratique

Au lieu d'une série de Fourier simple, une variable x est recherchée sous forme de série double :

$$x(t) = \sum_{k_1=-H}^H \sum_{k_2=-H}^H x_{k_1, k_2} e^{i(k_1\omega_1 + k_2\omega_2)t} \quad (1)$$

où ω_1 et ω_2 sont les deux pulsations inconnues. Par ajout de variables auxiliaires un système différentiel non linéaire suffisamment régulier peut être transformé en système différentiel d'ordre 1 dont les non-linéarités sont des produits (de deux variables, ou d'une variable et du paramètre de continuation λ). Soit U le vecteur contenant x et toutes les autres variables temporelles nécessaires, on appelle formulation quadratique :

$$m(U') = c_0 + \lambda c_1 + l_0(U) + \lambda l_1(U) + q(U, U) \quad (2)$$

où c_0 , c_1 sont des vecteurs constants, m , l_0 et l_1 sont des opérateurs linéaires constants, et q est un opérateur quadratique constant. Comme dans le cas périodique [5], l'Eq. (2) étant quadratique, et étant donnée la

décomposition des variables selon le modèle proposé par l'Eq. (1) pour x , la substitution de la série double mène à un système quadratique dont les inconnues sont à présent les coefficients de Fourier et les deux pulsations ω_1, ω_2 . Ce système, plus grand, est une fonction dite résidu, R , ayant la forme :

$$R : \mathbb{R}^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}^N \tag{3}$$

$$(X, \lambda) \mapsto C_0 + \lambda C_1 + L_0(X) + \lambda L_1(X) + Q(X, X)$$

où X contient les coefficients de Fourier de U , ω_1 et ω_2 . La branche de solution $R(X, \lambda) = 0$ peut alors être continuée via la Méthode Asymptotique Numérique.

2.2 Système forcé

Un exemple de système forcé ayant un régime quasi-périodique est l'oscillateur de Van der Pol forcé d'équation :

$$x'' - \mu_1 x' + \mu_2 x x' + \mu_3 x^2 x' + a_1 x = \cos(\lambda t) \tag{4}$$

avec $\mu_1 = \mu_2 = 0.1, \mu_3 = a_1 = 1$. Une bifurcation de Neimark-Sacker se produit à $\lambda \simeq 1.79$ [6], et la solution périodique de pulsation $\omega = \lambda$ devient instable. Une formulation quadratique soulignant les opérateurs constant, linéaire et quadratique est :

$$x' = 0 \quad + y \quad + 0 \tag{5a}$$

$$y' = \cos(\lambda t) \quad + \mu_1 y - a_1 x \quad - \mu_2 xy - \mu_3 yz \tag{5b}$$

$$\underbrace{0}_{mU'} = 0 \quad + \underbrace{z}_{c_0} \quad - \underbrace{x^2}_{l_0 U} \quad - \underbrace{x^2}_{q(U,U)} \tag{5c}$$

Le terme de forçage $\cos(\lambda t)$ est placé dans l'opérateur constant, de la même manière que dans la version périodique de la méthode ([5], exemple 4).

La continuation de la branche de solution quasi-périodique peut être effectuée de manière efficace et précise : dans cet exemple, les séries de Fourier ont été tronquées à $H = 5$. Un diagramme de la norme 2 de x est présenté en figure 1. Les points indiquent le début de chaque pas de continuation : la MAN fournit une continuation régulière avec auto-adaptation de la taille des pas. La solution obtenue par cet équilibrage harmonique quasi-périodique est qualitativement correcte à $H = 2$ (figure 2) dans le plan de phase. L'enveloppe est bien esquissée mais les aires laissées blanches sont légèrement inexactes. Un choix de $H = 5$ permet un excellent accord avec une intégration numérique [7].

2.3 Système autonome

Les équations retenues pour deux oscillateurs de Van der Pol couplés sont :

$$x_1'' + a_1 x_1' + \Omega_1^2 x_1 = a_2 \lambda (x_1' + x_2')$$

$$- a_3 \lambda (x_1' + x_2')(x_1 + x_2) - a_4 \lambda (x_1' + x_2')(x_1 + x_2)^2 \tag{6}$$

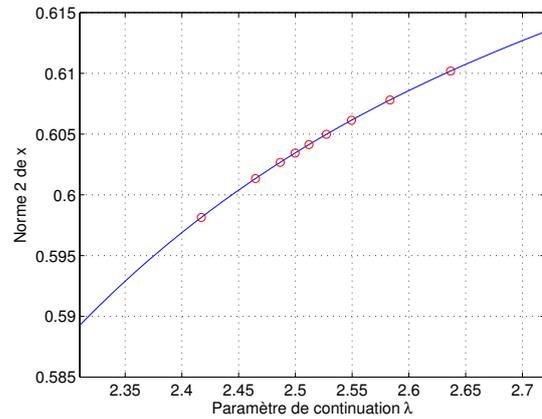


FIGURE 1 – Exemple de continuation par la MAN de solution quasi-périodique : pour l'oscillateur de Van der Pol forcé, norme 2 de x en fonction du paramètre de continuation λ . Les points rouges indiquent le début de chaque pas de continuation.

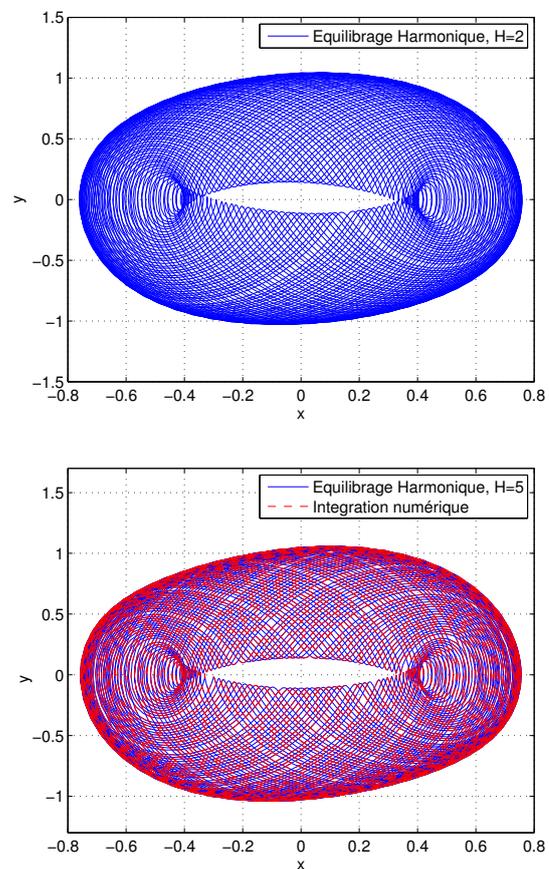


FIGURE 2 – Diagrammes de phase (x, y) , pour $\lambda = 2.58$, par équilibrage harmonique quasi-périodique à $H = 2$, puis à $H = 5$ en bleu comparé à l'intégration numérique en tirets rouges.

$$x_2'' + b_1 x_2' + \Omega_2^2 x_2 = b_2 \lambda (x_1' + x_2')$$

$$- b_3 \lambda (x_1' + x_2')(x_1 + x_2) - b_4 \lambda (x_1' + x_2')(x_1 + x_2)^2 \tag{7}$$

et la formulation quadratique est :

$$x'_1 = y_1 \quad (8a)$$

$$y'_1 = -a_1 y_1 - \Omega_1^2 x_1 + \lambda (a_2 (y_1 + y_2) - a_3 v - a_4 w) \quad (8b)$$

$$x'_2 = y_2 \quad (8c)$$

$$y'_2 = -b_1 y_2 - \Omega_2^2 x_2 + \lambda (b_2 (y_1 + y_2) - b_3 v - b_4 w) \quad (8d)$$

$$0 = r - (x_1 + x_2)^2 \quad (8e)$$

$$0 = v - (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) \quad (8f)$$

$$0 = w - r(y_1 + y_2) \quad (8g)$$

Les valeurs choisies pour les paramètres sont : $\Omega_1 = 1$, $a_1 = 0.01$, $a_2 = 0.5$, $a_3 = a_4 = 2$; $\Omega_2 = 2.5$, $b_1 = 0.025$, $b_2 = 1$, $b_3 = b_4 = 4$. Pour ces équations, la branche de solution quasi-périodique requiert des ordres de troncature H plus élevés que pour le système forcé précédent. Par exemple, pour $\lambda = 0.36$, un bon accord avec l'intégration numérique est obtenu à $H = 10$ (figure 3) mais des différences sont visibles si H est trop petit (les aires laissées blanches sont incorrectes pour $H = 4$). Pour ce système, la continuation demande environ 6 secondes par pas pour $H = 4$, 43 secondes pour $H = 6$, 220 secondes pour $H = 8$ sur un ordinateur portable milieu de gamme.

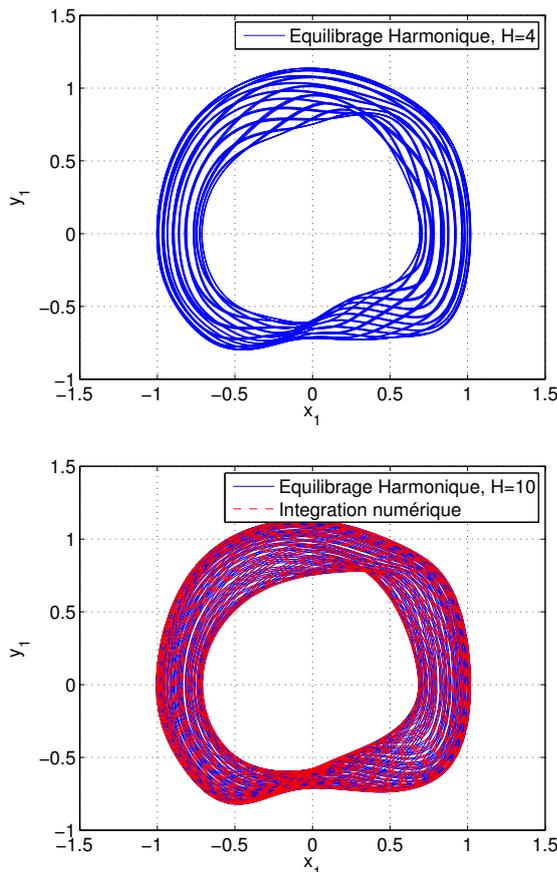


FIGURE 3 – Oscillateurs de Van der Pol couplés, diagrammes de phase (x_1, y_1) pour $\lambda = 0.36$, par équilibrage harmonique quasi-périodique à $H = 4$, puis à $H = 10$ en bleu comparé à l'intégration numérique en tirets rouges.

3 Conclusion

Le couplage de l'équilibrage harmonique à deux fréquences avec la Méthode Asymptotique Numérique, une méthode de continuation robuste, est réalisé de manière automatique grâce au formalisme quadratique. Il s'avère efficace pour continuer les solutions quasi-périodiques, sans connaissance *a priori* ni optimisation. Une meilleure précision est obtenue en utilisant plus de coefficients de Fourier, et la comparaison avec l'intégration numérique valide les résultats. Des exemples simples sont abordés ici, cette méthode pouvant s'appliquer à de nombreux systèmes non linéaires.

Remerciements

Ce travail a été mené dans le cadre du Labex MEC (ANR-10-LABX-0092) et du projet A*MIDEX (ANR-11-IDEX-0001-02), *Investissements d'Avenir* de l'Agence Nationale de la Recherche.

Références

- [1] L. O. Chua, A. Ushida, Algorithms for computing almost periodic steady-state response of nonlinear systems to multiple input frequencies. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, **10**, 953-971, vol. CAS-28, 1981.
- [2] T. M. Cameron, J. H. Griffin, An Alternating Frequency/Time Domain Method for Calculating the Steady-State Response of Nonlinear Dynamic Systems. *Journal of Applied Mechanics*, **56**, 149-154, 1989.
- [3] N. Coudeyras, S. Nacivet, J.-J. Sinou, Periodic and quasi-periodic solutions for multi-instabilities involved in brake squeal. *Journal of Sound and Vibration*, **328**, 520-540, 2009.
- [4] L. Peletan, S. Baguet, M. Torkhani, G. Jacquet-Richardet, Quasi-periodic harmonic balance method for rubbing self-induced vibrations in rotor-stator dynamics. *Nonlinear Dynamics*, **78**(4), 2501-2515, 2014.
- [5] B. Cochelin, C. Vergez, A high order purely frequency-based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions. *Journal of Sound and Vibration*, **324**(1), 243-262, 2009.
- [6] A. Lazarus, O. Thomas, A harmonic-based method for computing the stability of periodic solutions of dynamical systems. *Comptes Rendus Mécanique*, **338**, 510-517, 2010.
- [7] L.F. Shampine, M.W. Reichelt, The Matlab ODE suite. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **18**, 1-22, 1997.