

## CFA/VISHNO 2016

**Modélisation par méthode intégrale d'un transducteur à membrane carrée et à électrode arrière de taille réduite**

P. Honzik<sup>a</sup>, S. Durand<sup>b</sup>, C. Guianvarc'H<sup>c</sup>, N. Joly<sup>b</sup> et M. Bruneau<sup>b</sup>

<sup>a</sup>CTU in Prague, Faculty of Transportation Sciences, Department of Security Technologies and Engineering, Konviktská 20, 110 00 Praha 1, République tchèque

<sup>b</sup>LAUM - UMR CNRS 6613, Avenue Olivier Messiaen, 72085 Le Mans, France

<sup>c</sup>Lab. Commun de Métrologie LNE-Cnam, 61 rue du Landy, 93210 La Plaine Saint Denis, France

honzikp@fd.cvut.cz



LE MANS

Les transducteurs capacitifs miniaturisés sont utilisés dans diverses applications commerciales, mais aussi de plus en plus en métrologie sous différentes conditions particulières (nature du gaz, pression statique, température). C'est ainsi que des modèles adaptés et précis sont rendus nécessaires. L'utilisation de la méthode intégrale pour décrire le champ acoustique à l'arrière de la membrane, avec une fonction de Green adaptée, qui n'est pas exprimée sous forme modale, permet d'éviter les difficultés causées par le couplage des modes de type Dirichlet (membrane) et Neumann (fluide). De surcroît, les effets de couplage et de pertes thermovisqueuses peuvent être plus facilement pris en compte. Ce modèle est utilisé ici pour étudier une architecture dans laquelle l'électrode arrière carrée est de taille nettement inférieure à celles rencontrées couramment et dans laquelle elle est entourée d'une cavité sous membrane carrée (pour limiter l'encombrement transversal). Une telle géométrie présente des avantages en termes de microfabrication, de miniaturisation, tout en présentant des propriétés comparables aux systèmes classiques de même taille. Le champ de déplacement de la membrane et la sensibilité en pression sont présentés et comparés avec ceux calculés numériquement (par FEM).

## 1 Introduction

L'utilisation de transducteurs électrostatiques (miniaturisés ou non) dans diverses applications, y compris en dehors de l'acoustique audible, conduit à la recherche de nouvelles géométries de transducteurs et au développement de nouvelles approches dans la modélisation. Les applications métrologiques (thermométrie acoustique par exemple) nécessitent des modèles de précision élevée dans les conditions inhabituelles (nature du gaz, pression statique ou température) [1].

Les modèles analytiques des microphones classiques [2, 3, 4], ou miniaturisés à membrane circulaire [5, 6] ou carrée [7], sont basés sur le développement modal des solutions en déplacement pour la membrane et en pression dans la fine couche du fluide thermovisqueux. Afin d'éviter certains problèmes liés aux couplages de modes de types différents (Dirichlet, Neumann), nous utilisons ici une méthode intégrale proposée récemment dans la recherche de la solution de l'équation de propagation pour la variable de pression acoustique dans la fine couche du fluide [8].

Dans le cas des transducteurs électrostatiques, des travaux récents ont montré (pour des systèmes axisymétriques, [6]) qu'une réduction importante des dimensions de l'électrode peut présenter des avantages en termes de sensibilité et de bande passante, en comparaison des systèmes classiques. L'intérêt du présent modèle, adapté pour un transducteur dont la membrane et l'électrode sont tous deux de géométrie carrée, est d'aider à la conception de tels transducteurs carrés réalisés par micro-fabrication.

## 2 Solution analytique

La structure considérée ici est constituée d'une membrane carrée d'arête  $2a_M$  en  $z = 0$ , d'une électrode arrière plane carrée d'arête  $2a_e$  ( $a_e < a_M$ ) en  $z = -e$  ( $e$  étant l'épaisseur de la couche de fluide dont l'ordre de grandeur est comparable à l'épaisseur des couches limites thermiques et visqueuses) et d'une cavité de profondeur  $h_c$  située autour de l'électrode au-dessous de la membrane (figure 1). Le déplacement de la membrane est considéré positif suivant l'orientation de l'axe  $z$ . La pression acoustique est supposée uniforme sur l'épaisseur de la couche de fluide (c'est-à-dire indépendante de la coordonnée  $z$ ).

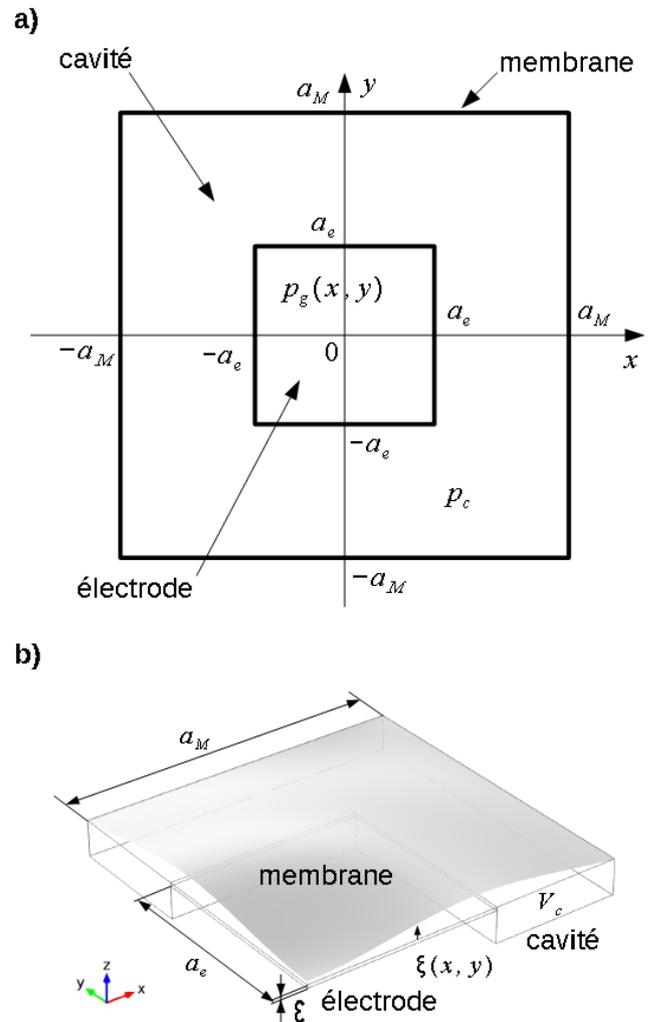


Figure 1 : Structure considérée - a) cotes de la membrane et de l'électrode arrière carrées, b) vue du système (premier quadrant).

### 2.1 Equations de base

Le champ de déplacement  $\xi(x, y)$  de la membrane fixée à sa périphérie sur un cadre rigide (condition de Dirichlet), compté positivement suivant l'axe  $z$ , créé par une source de pression acoustique  $p_{av}$  (en face avant, supposée uniforme sur la membrane) et chargé en face

arrière par le champ de pression  $p(x, y)$  dans le film fluide situé entre la membrane et l'électrode arrière et dans la cavité, satisfait le système d'équations suivantes :

$$T\left(\partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2 + K^2\right)\xi(x, y) = p_{av} - p(x, y),$$

$$\xi(-a_M, y) = \xi(a_M, y) = \xi(y, -a_M) = \xi(y, a_M) = 0, \quad (1.a,b)$$

où  $K = \omega\sqrt{M_S/T}$ ,  $T$  and  $M_S$  désignant respectivement la tension de la membrane et sa masse surfacique, et où  $\omega$  désigne la pulsation.

Le champ de déplacement de la membrane (équations 1.a et 1.b) peut être exprimé sous la forme d'un développement sur les fonctions propres de Dirichlet

$$\xi = \sum_m \sum_n \xi_{mn} \psi_{mn}(k_{x_m} x, k_{y_n} y)$$

$$\text{avec } \xi_{mn} = \frac{\iint_{S_M} \psi_{mn}(x, y) [p - p_{av}] dS_M}{T(k_{mn}^2 - K^2)}, \quad (2.a,b)$$

où les fonctions propres  $\psi_{mn}(x, y)$  et les valeurs propres associées  $k_{mn} = \sqrt{k_{x_m}^2 + k_{y_n}^2}$  sont des fonctions trigonométriques [7, 9] et où  $S_M = 4a_M^2$  est la surface de la membrane.

Les champs de pression derrière la membrane  $p(x, y)$ , pression dans l'espace entre l'électrode et la membrane  $p_g(x, y)$  et pression dans la cavité  $p_c$  supposée uniforme,

$$p(x, y) = \begin{cases} p_g(x, y) & \forall |x, y| \leq a_e \\ p_c & \forall a_e \leq |x, y| \leq a_M, \end{cases} \quad (3)$$

doivent satisfaire les conditions de continuité en pression au bord de l'électrode

$$p_c = p_g(x, -a_e) = p_g(x, a_e) = p_g(-a_e, y) = p_g(a_e, y), \quad (4)$$

et les lois de continuité des débits correspondantes impliquant des conditions sur les dérivées normales de la pression aux interfaces de mêmes coordonnées.

Considérant que la membrane se comporte comme une source étendue décrite par la composante  $z$  de son débit volumique, le champ de pression de chaque élément fluide dans l'espace situé entre l'électrode et la membrane satisfait le système d'équations suivant :

$$\left(\partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2 + \chi^2\right)p_g(x, y) = -U(x, y), \quad (5.a)$$

$$\text{où } U(x, y) = \rho_0 \omega^2 \xi(x, y) / (\varepsilon F_v), \quad (5.b)$$

et où le nombre d'onde complexe  $\chi$  dépend de la pulsation  $\omega$  et de diverses propriétés du fluide, à savoir la masse volumique ( $\rho_0$ ) et la compressibilité par le biais de la célérité adiabatique  $c_0$ , la capacité calorifique à pression constante par unité de masse  $C_p$ , le paramètre  $\gamma$  du gaz, le coefficient de viscosité de cisaillement  $\mu$ , et le coefficient de conduction thermique  $\lambda_h$  (voir par exemple [1, 4, 5, 6, 7, 8, 9]):

$$\chi^2 = \left(\omega^2 / c_0^2\right) \left[1 + (\gamma - 1)(1 - F_h)\right] / F_v, \quad (6.a)$$

$$\text{avec } F_v = 1 - \tan(k_v \varepsilon / 2) / (k_v \varepsilon / 2)$$

$$\text{et } F_h = 1 - \tan(k_h \varepsilon / 2) / (k_h \varepsilon / 2), \quad (6.b,c)$$

$$k_v = \left[(1 - i) / \sqrt{2}\right] \sqrt{\rho_0 \omega / \mu} \quad \text{et}$$

$$k_h = \left[(1 - i) / \sqrt{2}\right] \sqrt{\rho_0 \omega C_p / \lambda_h} \quad \text{étant les nombres}$$

d'onde associés respectivement au mouvement de cisaillement dû aux effets de viscosité et au mouvement dit entropique associé aux effets de conductions thermiques (avec la convention temporelle  $e^{i\omega t}$ ).

La pression dans la cavité périphérique est donnée par

$$p_c = Z_c w_{tot}, \quad (7)$$

où  $Z_c$  désigne l'impédance d'entrée de la cavité et  $w_{tot}$  le débit total entrant dans la cavité

$$w_{tot} = -j\omega \langle \xi \rangle_{S_c} + 4w_i, \quad (8)$$

$w_i$  étant le débit sur  $i^{\text{ème}}$  bord de l'électrode (carrée) et  $\langle \xi \rangle_{S_c} = \iint_{S_c} \xi(x, y) dS_c$  le volume de fluide déplacé par la partie de la membrane située au-dessus de la cavité [ $S_c = 4(a_M^2 - a_e^2)$ ].

Ainsi, la condition de continuité du débit en  $x = a_e$  (par exemple) prend la forme suivante :

$$\partial_n p_g \Big|_{a_e} = -\frac{j\omega \rho_0}{8F_v Z_c \varepsilon a_e} p_c + \frac{\omega^2 \rho_0}{8F_v \varepsilon a_e} \langle \xi \rangle_{S_c}. \quad (9)$$

## 2.2 Formulation intégrale pour le champ de pression dans le film de fluide

La fonction de Green choisie, associée à l'équation de propagation (5.a), peut être exprimée de la manière suivante [9]:

$$g(x, x_0; y, y_0) = -(i/4) H_0^- \left(\chi \left| \vec{r} - \vec{r}_0 \right| \right), \quad (10)$$

avec  $|\vec{r} - \vec{r}_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ , où  $H_n^-(\chi|\vec{r} - \vec{r}_0|)$  représente la fonction de Hankel de deuxième espèce d'ordre "n". Pour raison de symétrie, la fonction de Green satisfaisant la condition de Neumann en  $x, y = 0$  utilisée pour résoudre l'équation (5.a) dans le premier quadrant est donnée par [8]

$$G(x, x_0; y, y_0) = g(x, x_0; y, y_0) + g(x, -x_0; y, y_0) + g(x, x_0; y, -y_0) + g(x, -x_0; y, -y_0). \quad (11)$$

La formulation intégrale du problème (5.a,b) qui fait usage de cette fonction de Green, compte tenu des équations (4) et (9), peut être écrit comme suit :

$$p_g(x, y) = \int_0^{a_e} \int_0^{a_e} G(x, x_0; y, y_0) U(x_0, y_0) dx_0 dy_0 - I_{G1}(x, y) p_c + I_{G2}(x, y) \langle \xi \rangle_{S_c}, \quad (12)$$

où

$$I_{G1}(x, y) = \frac{j\omega\rho_0}{8F_v Z_c \varepsilon a_e} \left[ \int_0^{a_e} G(x, x_0; y, a_e) dx_0 + \int_0^{a_e} G(x, a_e; y, y_0) dy_0 + \int_0^{a_e} \partial_{y_0} G(x, x_0; y, a_e) dx_0 + \int_0^{a_e} \partial_{x_0} G(x, a_e; y, y_0) dy_0 \right] \quad (13.a,b)$$

$$I_{G2}(x, y) = \frac{\omega^2 \rho_0}{8F_v \varepsilon a_e} \left[ \int_0^{a_e} G(x, x_0; y, a_e) dx_0 + \int_0^{a_e} G(x, a_e; y, y_0) dy_0 \right].$$

La pression dans la cavité peut être estimée à l'aide de la relation approchée  $p_c = \langle p_g(x, a_e) \rangle_x / a_e$ , (où

$\langle f(x) \rangle_x = \int_0^{a_e} f(x) dx$ ), compte tenu des équations (2.a) et (12), comme suit :

$$p_c = \sum_q \sum_r \xi_{qr} N_{qr}, \quad (14)$$

où

$$N_{qr} = \frac{1}{a_e + \langle I_{G1}(x, a_e) \rangle_x} \left[ \int_0^{a_e} \int_0^{a_e} \langle G(x, x_0; a_e, y_0) \rangle_x \psi_{qr}(x_0, y_0) dx_0 dy_0 + \langle I_{G2}(x, y) \rangle_x \langle \psi_{qr} \rangle_{S_c} \right], \quad (15)$$

avec  $\xi = \omega^2 \rho_0 / (F_v \varepsilon)$ .

## 2.3 Déplacement de la membrane

Les coefficients modaux du champ de déplacement de la membrane sont donnés par l'équation (2.b) qui peut être réécrite de la manière suivante :

$$T(k_{mn}^2 - K^2) \xi_{mn} = c_{mn} + \sum_q \sum_r \xi_{qr} A_{(mn),(qr)}, \quad (16)$$

soit, sous forme matricielle,

$$\{-[A] + [B]\}(\mathcal{E}) = (C), \quad (17)$$

où  $(\mathcal{E})$  et  $(C)$  sont respectivement des vecteurs colonnes d'éléments  $\xi_{mn}$  et  $c_{mn} = -p_{av} \langle \psi_{mn} \rangle_{S_M}$ ,  $[B]$  est une matrice diagonale d'éléments  $T(k_{mn}^2 - K^2)$ , et  $[A]$  est une matrice d'éléments  $A_{(mn),(qr)}$  qui s'expriment comme

$$A_{(mn),(qr)} = \int_{-a_e}^{a_e} \int_{-a_e}^{a_e} \psi_{mn}(x, y) \left[ \zeta \int_0^{a_e} \int_0^{a_e} G(x, x_0; y, y_0) \psi_{qr}(x_0, y_0) dx_0 dy_0 - I_{G1}(x, y) N_{qr} + I_{G2}(x, y) \langle \psi_{qr} \rangle_{S_c} \right] dx dy + N_{qr} \langle \psi_{mn} \rangle_{S_c}. \quad (18)$$

## 3 Résultats théoriques, discussion

Un transducteur MEMS à membrane carrée de côté  $a_M = 1,33$  mm, dont l'électrode arrière rigide de dimension  $a_e = 0,80$  mm est séparée par une fine couche de fluide d'épaisseur  $\varepsilon = 14$   $\mu\text{m}$ , la profondeur de la cavité étant  $h_c = 150$   $\mu\text{m}$  et l'épaisseur de la membrane étant  $h_m = 10$   $\mu\text{m}$ , a été modélisé à l'aide de la méthode analytique présentée au paragraphe 2. Pour cette géométrie les fonctions propres  $\psi_{mn}$  (éq. 2) sont données par

$$\psi_{mn}(k_{x_m} x, k_{y_n} y) = \frac{1}{a_M} \cos(k_{x_m} x) \cos(k_{y_n} y), \quad (19)$$

où  $k_{x_m} = m\pi/2a_M$ ,  $k_{y_n} = n\pi/2a_M$ , seuls les neuf premiers modes ( $m, n = 1, 3, 5$ ) étant pris en compte dans ce qui suit. Les résultats de la méthode analytique sont comparés aux résultats numériques obtenus par une méthode d'éléments finis (FEM) [10]. Les paramètres du fluide et de la membrane utilisés pour les calculs analytiques et numériques sont donnés dans le Tableau 1 et la pression avant  $p_{av}$  a été fixée à 1 Pa.

La figure 2 représente les résultats obtenus pour la partie réelle du déplacement de la membrane à 1 kHz et à

60 kHz, par la méthode analytique présentée ci-dessus et par le calcul numérique FEM. Ces résultats sont en bon accord, la légère surestimation du déplacement aux basses fréquences pouvant être expliquée par certaines des approximations retenues ici dans l'approche analytique, approximations qui n'ont pas été introduites dans les modèles numériques.

La sensibilité en pression de ce transducteur utilisé comme capteur  $\sigma = -U_0 \bar{\xi} / (p_{av} \varepsilon)$ , où  $\bar{\xi}$  est le déplacement moyen de la membrane sur la surface de l'électrode arrière et  $U_0$  est la tension de polarisation ( $U_0 = 30$  V), est montrée sur la figure 3. Les résultats calculés par la méthode analytique et par le modèle numérique sont en bon accord sauf aux basses fréquences où un écart de 3 dB environ apparaît. Cet écart peut résulter des mêmes approximations que celles mentionnées ci-dessus pour le déplacement.

Tableau 1: Paramètres du fluide et de la membrane.

Paramètre	Valeur	Unité
Pression statique $P_0$	101325	Pa
Température statique $T_0$	296,15	K
Masse volumique statique $\rho_0$	1,18	kg/m <sup>3</sup>
Célérité du son $c_0$	349,5	m/s
Coefficient de viscosité de cisaillement $\mu$	$1,83 \cdot 10^{-5}$	Pa s
Coefficient de viscosité de volume $\eta$	$1,098 \cdot 10^{-5}$	Pa s
Coefficient de conduction thermique $\lambda$	$24,4 \cdot 10^{-3}$	W/m/K
Rapport des chaleurs massiques $\gamma$	1,4	-
Chaleur massique par unité de masse à pression constante $C_p$	1010	J/kg/K
Masse volumique de la membrane (silicium) $\rho_m$	2330	kg/m <sup>3</sup>
Tension de la membrane $T$	552,24	N/m

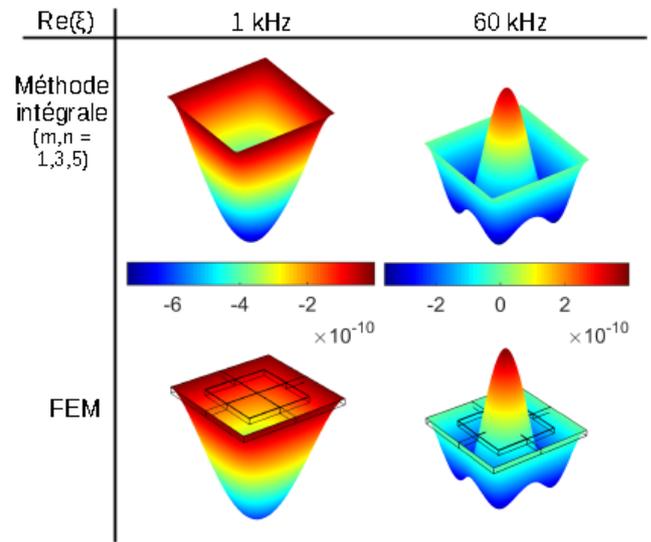


Figure 2 : Champs de déplacement de la membrane (partie réelle) à 1 kHz et à 60 kHz, méthode analytique en haut et numérique (FEM) en bas.

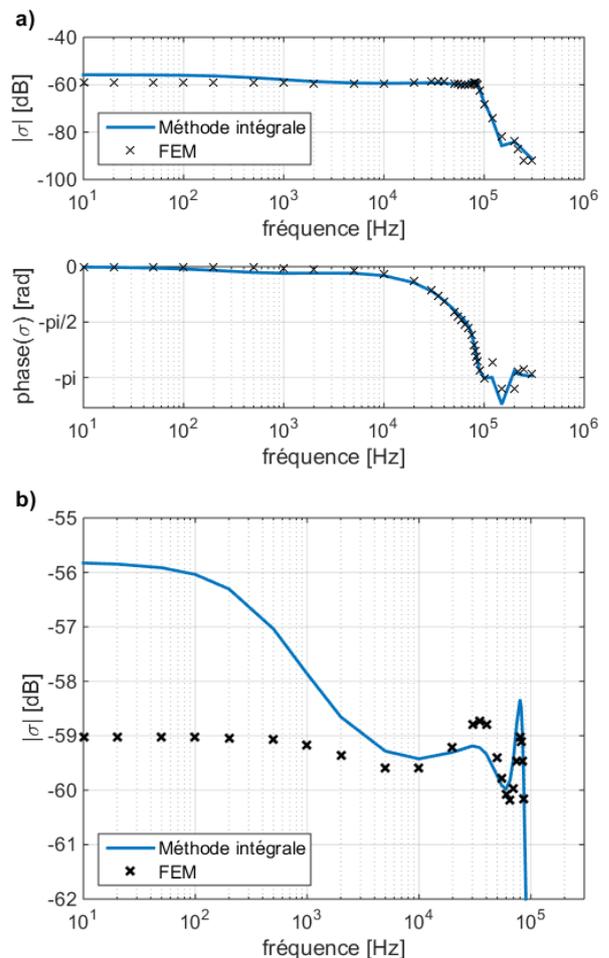


Figure 3 : Sensibilité en pression calculée par la présente méthode (trait bleu continu) et par FEM ('x') - a) module et phase, b) détail pour le module.

## 4 Conclusion

Le modèle d'un transducteur à électrode arrière carrée et entouré d'une cavité sous membrane carrée a été développé, adapté à l'étude d'un dispositif dont la taille de l'électrode est nettement inférieure à celles rencontrées couramment. La formulation permettant modéliser le couplage entre la pression acoustique dans une fine couche de fluide thermovisqueux et la membrane est basée sur l'utilisation de la méthode intégrale, dont la fonction de Green n'est pas exprimée sous forme de développement modal (qui pose des problèmes de compatibilité dans les couplages). Les résultats sont en bon accord avec les résultats numériques, sauf aux basses fréquences où un écart de 3 dB environ apparaît. L'amélioration du comportement de ce modèle pour les basses fréquences passe par une adaptation du modèle (travaux en cours).

## Remerciements

Ce travail a été financé par la "Grant Agency of the Czech Technical University in Prague", financement No. SGS15/226/OHK2/3T/16.

## Références

- [1] C. Guianvarc'h, R. M. Gavioso, G. Benedetto, L. Pitre, M. Bruneau, Characterization of condenser microphones under different environmental conditions for accurate speed of sound measurements with acoustic resonators, *Rev. Sci. Instrum.* **80** (2009), 074901.
- [2] A. J. Zuckerwar, Theoretical response of condenser microphones, *J. Acoust. Soc. Am.* **64** (5), 1278-1285 (1978).
- [3] R. S. Grinnip, Advanced Simulation of a Condenser Microphone Capsule, *J. Aud. Eng. Soc.* **54**(3), 157-166 (2006).
- [4] T. Lavergne, S. Durand, N. Joly, M. Bruneau, Analytical Modeling of Electrostatic Transducers in Gases: Behavior of Their Membrane and Sensitivity, *Acta Acust. united Ac.* **100** (3), 440-447, (2014)
- [5] M. Bruneau, A.-M. Bruneau, Z. Škvor, P. Lotton, An equivalent network modelling the strong coupling between a vibrating membrane and a fluid film, *Acta Acustica* **2**, 223-232 (1994).
- [6] P. Honzík, A. Podkovskiy, S. Durand, N. Joly, M. Bruneau, Analytical and numerical modeling of an axisymmetrical electrostatic transducer with interior geometrical discontinuity, *J. Acoust. Soc. Am.* **134** (5), 3573-3579 (2013).

- [7] M. Bruneau, A.-M. Bruneau, P. Dupire, A Model for Rectangular Miniaturized Microphones, *Acta Acustica* **3**, 275-282 (1995).
- [8] P. Honzík, M. Bruneau, Acoustic fields in thin fluid layers between vibrating walls and rigid boundaries: integral method, *Acta Acust. united Ac.* **101** (4) (2015), 859-862.
- [9] M. Bruneau, *Manuel d'Acoustique fondamentale*, Hermès, Paris (2006).
- [10] N. Joly, Finite element modeling of thermoviscous acoustics on adapted anisotropic meshes: Implementation of the particle velocity and temperature variation, *Acta Acustica united with Acustica* **96**, 102-114 (2010)