

CFA/VISHNO 2016

Géométrie différentielle et Acoustique : non linéarités intrinsèques, invariants et méthodes numériques

J. Bensoam

IRCAM, 1, place I. Stravinsky, 75004 Paris, France
bensoam@ircam.fr



LE MANS

L'étude de la géométrie, sous-jacente à la résolution de problèmes mécaniques, remonte aux travaux d'Euler, Lagrange, Hamilton, Jacobi, Poisson, Liouville, Poincaré ... Ils ont étudié la possibilité de réduire la taille de l'espace des phases en se servant de l'ensemble des symétries et des lois de conservation qui leurs sont associées et cela dans un cadre intrinsèque : indépendamment du choix d'un système de coordonnées. Bien que l'acoustique soit l'une des disciplines de la mécanique, sa "géométrisation" met en jeu des concepts qui dépassent ceux de l'étude bien connue de la dynamique des solides rigides. En considérant la propagation d'ondes en grands déplacements (poutre de Reissner), nous verrons que l'interprétation des théories de l'acoustique à travers les concepts de la géométrie différentielle permet de concevoir les phénomènes non linéaires en leurs qualités intrinsèques. En particulier, l'extension de la géométrie analytique à la théorie des champs (acoustiques) sera traitée dans un cadre multi-symplectique, où l'espace et le temps ont un rôle équivalent, engendrant des méthodes numériques soucieuses de respecter les invariants des systèmes physiques.

Introduction

L'introduction de cet article rappelle les grandes lignes de la leçon de Cartan sur les invariants intégraux [1]) dans laquelle la forme de Poincaré-Cartan est introduite à partir d'une formulation variationnelle. La différentielle de cette forme (la forme pré-symplectique) permet de formuler les équations de Hamilton et est reliée au formalisme de Poisson.

Après cette introduction historique, la formulation du problème à l'aide du fibré des 1-jets fournit un cadre moderne aboutissant au formalisme multi-symplectique. Dans ce contexte les principaux théorèmes sont plus laborieux à établir mais suivent les idées de Cartan¹.

La leçon de Cartan

Selon Cartan, le formalisme Hamiltonien peut être obtenu naturellement à partir de la forme de Poincaré-Cartan. Cette forme différentielle découle du principe de moindre action (ou principe de Hamilton) pour lequel les trajectoires peuvent avoir des conditions aux limites variables. Partant d'un problème avec une densité Lagrangienne $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$, il écrit la fonctionnelle d'action $\mathcal{A} = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt$ et étudie sa variation $\delta\mathcal{A}$ en utilisant un champ de variation $Z(\varepsilon, t)$. Avec sa "formule magique" qui permet d'obtenir la dérivée de Lie d'une forme différentielle $L_Z\alpha = Z \lrcorner \alpha + d(Z \lrcorner \alpha)$, il obtient en intégrant par parties

$$\delta\mathcal{A} = d\mathcal{A}(Z) = \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}} \frac{\partial q_\varepsilon}{\partial\varepsilon} + \mathcal{L} dt(Z) \right]_{t_0(\varepsilon)}^{t_1(\varepsilon)} - \int_{t_0(\varepsilon)}^{t_1(\varepsilon)} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}} \right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} \right) \frac{\partial q_\varepsilon}{\partial\varepsilon} dt. \tag{1}$$

En choisissant un champ de variation, Z , nul sur les bords t_0, t_1 , le premier terme disparaît. Le principe de moindre action engendre donc les équations bien connues d'Euler-Lagrange du problème

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}} \right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} = 0. \tag{2}$$

Mais Elie Cartan continue sa discussion en considérant des conditions aux limites variables où les bords $t_i(\varepsilon)$ dépendent d'un paramètre ε . Sous cette hypothèse et pour des trajectoires réelles du systèmes (les trajectoires critiques vérifiant les équations précédentes (2)), la variation de l'action se réduit au premier terme puisque le second terme intégral est nul. Sur les bords, $t_i(\varepsilon)$, il utilise la relation

$$\frac{\partial q_\varepsilon}{\partial\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = dq(Z) - \dot{q}dt(Z), \tag{3}$$

1. On peut noter que Cartan lui-même conçoit déjà en 1933 [2] une géométrie pour laquelle les géodésiques seraient des (hyper)surfaces.

dans l'équation (1) faisant apparaître de manière naturelle les transformées de Legendre (le moment $p = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}$ et la densité Hamiltonienne $\mathcal{H} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\dot{q} - \mathcal{L}$). La variation de l'action prend ainsi la forme $\delta\mathcal{A} = [\Theta]_{t_0}^{t_1}$, expression dans laquelle figure maintenant une nouvelle forme différentielle : la forme de Poincaré-Cartan

$$\Theta = p dq - \mathcal{H}dt, \tag{4}$$

De plus, Cartan montre que ces calculs mènent à un invariant intégral le long des solutions du problème variationnel. Dans sa leçon, il écrit : *Supposons maintenant qu'on considère une suite de trajectoires réelles dépendant d'un paramètre ε et qu'on limite chaque trajectoire dans un intervalle de temps (t_0, t_1) variable avec ε . La formule qui donne la variation de l'action le long de ces trajectoires variables se réduit à*

$$\delta\mathcal{A} = [\Theta]_{t_0}^{t_1} = (\Theta)_1 - (\Theta)_0.$$

Supposons enfin que nous considérons un tube de trajectoires, c'est-à-dire une suite continue linéaire fermée de trajectoires dont chacune est limitée à un intervalle de temps (t_0, t_1) ; la variation totale de l'action quand on est revenu à la trajectoire initiale est évidemment nulle, de sorte que, en intégrant par rapport à ε , on a

$$\oint \delta\mathcal{A} = 0 \Rightarrow \oint (\Theta)_1 = \oint (\Theta)_0$$

[...]

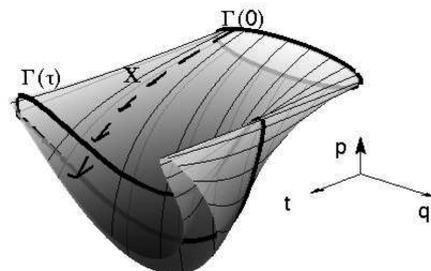


FIGURE 1 – On peut encore dire qu'étant donné un tube quelconque de trajectoires, l'intégrale $\oint \Theta$, étendue à une courbe fermée qui fait le tour du tube, est indépendante de cette courbe et ne dépend que du tube...

Donc la quantité $I = \oint \Theta$ est invariant, i.e. ne dépend pas de la courbe fermée Γ le long du tube des trajectoires. En langage moderne, I est invariant le long d'un champ de vecteur X tangent aux sections critiques,

$$0 = dI(X) = \oint_{\Gamma} L_X \Theta = \oint_{\Gamma} X \lrcorner d\Theta + \oint_{\partial\Gamma} X \lrcorner \Theta.$$

La dernière intégrale sur un contour fermé est évidemment nulle. Puisque cette propriété est vraie pour tout choix de tube, on doit avoir en fait $X \lrcorner d\Theta = 0$. Cartan introduit donc la différentielle de sa forme de Poincaré-Cartan

$$\Omega = -d\Theta = dq \wedge dp + d\mathcal{H} \wedge dt, \quad (5)$$

pour laquelle on a, pour tout champ de vecteur tangent aux trajectoires réelles, $X \lrcorner \Omega = 0$. En d'autres termes, puisque Ω est aussi une forme fermée, la dérivée de Lie de la forme (pré)-symplectique est nulle

$$L_X \Omega = 0, \quad \forall X \text{ tangent aux trajectoires réelles.} \quad (6)$$

Il note enfin que chaque coefficient de $\delta q = dq(X)$, $\delta p = dp(X)$ et $\delta t = dt(X)$ dans le calcul de $X \lrcorner \Omega = 0$, i.e.

$$(dp + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} dt) \delta q - (dq - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} dt) \delta p - (d\mathcal{H} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt) \delta t = 0$$

doit nécessairement s'annuler. Ce faisant, il retrouve les équations canoniques de Hamilton et la loi de la conservation de l'énergie

$$\begin{cases} dq = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} dt \\ dp = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} dt \\ d\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt \end{cases} \quad (7)$$

Plus généralement, l'invariant (6) de la forme (pré)-symplectique Ω le long des trajectoires peut s'écrire $X \lrcorner dq \wedge dp = d\mathcal{H}$ en normalisant, sans perte de généralité, le champ de vecteur $X : dt(X) = 1$. Les trajectoires réelles peuvent être vues comme le flot d'une transformation canonique (une transformation qui conserve la forme symplectique canonique $\tilde{\Omega} = dq \wedge dp$). Cela permet d'introduire la notion de champ de vecteur Hamiltonien Y_F associé à une transformation canonique par la relation

$$Y_F \lrcorner \tilde{\Omega} = dF.$$

Ce qui peut encore s'écrire $\tilde{\Omega}(Y_F, \cdot) = dF(\cdot)$. Donc, considérant le champ de vecteur Hamiltonien $X_{\mathcal{H}}$ associé à un problème physique décrit par sa densité Hamiltonienne \mathcal{H} , la dynamique de tout observable F peut être estimée par $\Omega(Y_F, X_{\mathcal{H}}) = dF(X_{\mathcal{H}})$. Le dernier terme est relié à la variation de F le long des trajectoires réelles : c'est à dire $dF(X_{\mathcal{H}}) = \frac{dF}{dt} = \dot{F}$. Ceci mène, en introduisant le crochet de Poisson $\{F, \mathcal{H}\} = \tilde{\Omega}(Y_F, X_{\mathcal{H}})$, à l'équation de Poisson

$$\dot{F} = \{F, \mathcal{H}\}. \quad (8)$$

En particulier, toute transformation F qui commute avec \mathcal{H} est constante le long des solutions du système : $\{F, \mathcal{H}\} = 0$. Ce qui peut encore s'écrire $dF(X_{\mathcal{H}}) = 0$. Dans ce cas, la transformation F révèle une symétrie du système. La connaissance de cette transformation permet donc de réduire le système étudié : on parle alors de système réduit. La forme de Poincaré-Cartan joue alors un rôle très important, dans ce contexte, dans la mesure où elle permet, à partir de la connaissance de symétries du système, de remonter aux quantités invariantes le long des solutions du problème étudié. C'est pourquoi, les méthodes numériques, outre le fait qu'elles offrent un outil de calcul des solutions, doivent, pour respecter les invariants, donner une expression discrète des formes de Poincaré-Cartan.

1 Aspects numériques : intégrateurs symplectiques et variationnels

Les méthodes numériques variationnelles reprennent la démarche précédente pour établir des équations aux différences venant remplacer les équations différentielles. Ces méthodes sont dites variationnelles au sens où les intégrateurs numériques sont issus d'un calcul de variations dans le domaine discret. Ayant choisi un pas de temps h , une courbe est ainsi remplacée par la succession de ces valeurs discrètes $\{\mathbf{q}_d\}_{k=0}^N \equiv (\mathbf{q}(0), \mathbf{q}(h) \dots \mathbf{q}(Nh)) \equiv (\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_k, \dots, \mathbf{q}_N)$. La fonctionnelle d'action² est approximée de la manière suivante

$$\mathcal{A}_d(\mathbf{q}_d) = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{kh}^{(k+1)h} \mathcal{L}(q, \dot{q}) dt \simeq \sum_{k=0}^{N-1} L_d(\mathbf{q}_k, \mathbf{q}_{k+1}), \quad (9)$$

où l'on a posé

$$L_d(\mathbf{q}_k, \mathbf{q}_{k+1}) \simeq \int_{kh}^{(k+1)h} \mathcal{L}(q, \dot{q}) dt. \quad (10)$$

Pour calculer la variation de l'action discrète (9), lorsque chaque élément du couple $\{\mathbf{q}_k, \mathbf{q}_{k+1}\}$ subit une perturbation du type $\mathbf{q}_k^\epsilon = \mathbf{q}_k + \epsilon \mathbf{v}_k$, posons $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_0 \dots \mathbf{v}_k \dots \mathbf{v}_N)$ et

$$\begin{cases} d\mathbf{q}_{\textcircled{1}}^k(\mathbf{V}) = \mathbf{v}_k \\ d\mathbf{q}_{\textcircled{2}}^k(\mathbf{V}) = \mathbf{v}_{k+1} \end{cases} \Rightarrow d\mathbf{q}_{\textcircled{2}}^{k-1}(\mathbf{V}) = d\mathbf{q}_{\textcircled{1}}^k(\mathbf{V}) \quad (11)$$

Ainsi la variation de l'action discrète \mathcal{A}_d évalué dans une direction quelconque \mathbf{V} est

$$\begin{aligned} d\mathcal{A}_d(\mathbf{V}) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{A}_d(\mathbf{q}_d^\epsilon) - \mathcal{A}_d(\mathbf{q}_d)}{\epsilon} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} D_1 L_d(\mathbf{q}_k, \mathbf{q}_{k+1}) \mathbf{v}_k + D_2 L_d(\mathbf{q}_k, \mathbf{q}_{k+1}) \mathbf{v}_{k+1} \\ &= D_1 L_d(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1) d\mathbf{q}_{\textcircled{1}}^0(\mathbf{V}) \\ &+ \sum_{k=1}^{N-1} [D_1 L_d(\mathbf{q}_k, \mathbf{q}_{k+1}) + D_2 L_d(\mathbf{q}_{k-1}, \mathbf{q}_k)] d\mathbf{q}_{\textcircled{1}}^k(\mathbf{V}) \\ &+ D_2 L_d(\mathbf{q}_{N-1}, \mathbf{q}_N) d\mathbf{q}_{\textcircled{2}}^{N-1}(\mathbf{V}) \end{aligned}$$

Cette expression est l'équivalent numérique de l'équation (1) de la leçon de Cartan puisque l'on peut écrire

$$d\mathcal{A}_d = \Theta_{L_d}^+(N-1) - \Theta_{L_d}^-(0) + \sum_{k=1}^{N-1} D_{EL} L_d(k). \quad (12)$$

On a posé pour cela

$$D_{EL} L_d(k) = [D_2 L_d(\mathbf{q}_{k-1}, \mathbf{q}_k) + D_1 L_d(\mathbf{q}_k, \mathbf{q}_{k+1})] d\mathbf{q}_{\textcircled{1}}^k$$

et introduit les formes

$$\begin{cases} \Theta_{L_d}^+(k) = +D_2 L_d(\mathbf{q}_k, \mathbf{q}_{k+1}) d\mathbf{q}_{\textcircled{2}}^k \\ \Theta_{L_d}^-(k) = -D_1 L_d(\mathbf{q}_k, \mathbf{q}_{k+1}) d\mathbf{q}_{\textcircled{1}}^k, \end{cases} \quad (13)$$

qui sont les formes discrètes de Poincaré Cartan.

2. Ici pour simplifier le Lagrangien ne dépend pas explicitement du temps $\mathcal{L}(q, \dot{q})$ au lieu de $\mathcal{L}(t, q, \dot{q})$.

Si on considère un champ de variation quelconque V s'annulant aux instants initial et final, cela fournit une équation discrète d'Euler-Lagrange permettant de calculer \mathbf{q}_{k+1} en fonction de \mathbf{q}_{k-1} et \mathbf{q}_k par

$$D_{EL}L_d(k) = 0 \Rightarrow D_2L_d(\mathbf{q}_{k-1}, \mathbf{q}_k) + D_1L_d(\mathbf{q}_k, \mathbf{q}_{k+1}) = 0 \quad (14)$$

Autrement dit, il existe une transformation F_{L_d} telle que $F_{L_d}(\mathbf{q}_{k-1}, \mathbf{q}_k) = (\mathbf{q}_k, \mathbf{q}_{k+1})$. Par ailleurs, en remarquant que $dL_d = \Theta_{L_d}^+ - \Theta_{L_d}^-$ et en différentiant, on obtient, puisque $d^2 = 0$, une seule et unique la forme symplectique discrète

$$d\Theta_{L_d}^+ = d\Theta_{L_d}^- = \Omega_{L_d}.$$

Marsden [6] montre que ces schémas d'intégration numérique sont symplectiques, c'est à dire que la forme symplectique est invariant sous l'action de telles transformations

$$(F_{L_d})^*\Omega_{L_d} = \Omega_{L_d}.$$

En introduisant maintenant une transformation de Legendre discrète définie par

$$\begin{cases} \mathbb{F}\Omega^+ : (\mathbf{q}_k, \mathbf{q}_{k+1}) \mapsto (\mathbf{q}_k, D_2L_d(\mathbf{q}_k, \mathbf{q}_{k+1})) = (\mathbf{q}_k, \mathbf{p}_{k,k+1}^+) \\ \mathbb{F}\Omega^- : (\mathbf{q}_k, \mathbf{q}_{k+1}) \mapsto (\mathbf{q}_k, -D_1L_d(\mathbf{q}_k, \mathbf{q}_{k+1})) = (\mathbf{q}_k, \mathbf{p}_{k,k+1}^-) \end{cases}$$

Il est possible de montrer en utilisant (14) qu'il n'existe qu'un seul moment à chaque instant k

$$\mathbf{p}_{k-1,k}^+ = \mathbf{p}_{k,k+1}^- = \mathbf{p}_k$$

Ainsi les formes de Poincaré-Cartan peuvent se réécrire sous une forme plus semblable à la discussion dans le domaine continu (4)

$$\begin{cases} \Theta_{L_d}^+(k) = \mathbf{p}_{k+1} dq_{k+1}^k = \mathbf{p}_{k+1} dq_{k+1}^{k+1} \\ \Theta_{L_d}^-(k) = \mathbf{p}_k dq_k^k. \end{cases} \quad (15)$$

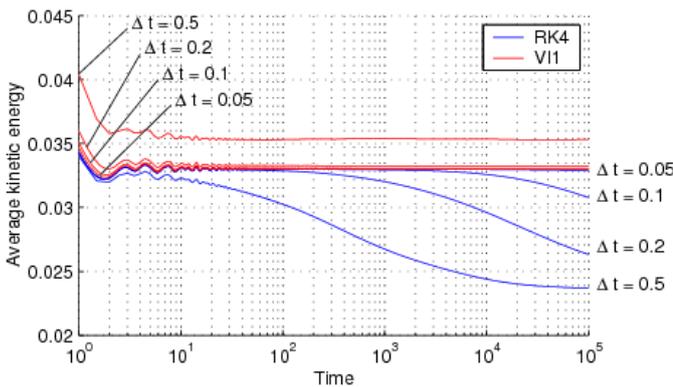


FIGURE 2 – Détermination de la température (valeur moyenne de l'énergie cinétique) d'une molécule isolée. Converge au cours du temps d'un schéma variationnel explicite d'ordre 1 (VI1) comparé à un schéma d'ordre 4 de Runge-Kutta (RK4). Bien que le premier schéma numérique soit quatre fois moins cher, il converge plus rapidement (West [4]).

Beaucoup de schémas numériques peuvent être obtenus par cette méthode. Il convient alors de donner une relation explicite pour la formule (10). A titre d'exemple, Marsden illustre la conservation de l'énergie pour un schéma

symplectique de Newmark. Le schéma conserve l'énergie au cours du temps alors que pour d'autres méthodes l'énergie décroît à cause de la dissipation numérique [fig.2]. Ce qui peut être compris en mentionnant que ces intégrateurs sont symplectiques au sens où ils préserve la 2-forme Ω dans l'espace des phases au même titre que les vrais systèmes physiques modélisés.

En fait, tous les intégrateurs symplectiques ont cette propriété du fait qu'il sont issus d'un calcul variationnel, comme cela est le cas dans le cas de systèmes Lagrangiens en continu exposé précédemment. De plus, ces méthodes numériques ont la propriété de vérifier les lois de conservation du système marquant la présence de symétrie.

Pour aller plus avant dans l'étude de ces schémas numériques, il convient de noter, dans l'équivalence entre les points de vues continu et discret, l'analogie entre les formes de Poincaré Cartan (4) et (15). Nous voyons qu'il manque le terme dt dans la version numérique. Cela est dû au fait que le Lagrangien ne dépend pas du temps explicitement. Cette étude, qui complique quelque peu les choses se trouve aussi dans la littérature [6]

Que devient cette démarche lorsque l'on aborde des systèmes aux dérivées partielles? Autrement dit lorsqu'il existe plusieurs variables indépendantes mettant en jeu non seulement le temps mais aussi l'espace (élasto-dynamique, acoustique, plus généralement la théorie des champs). Cela nécessite de revoir la leçon de Cartan dans un domaine plus général (le formalisme multi-symplectique) pour permettre d'aborder sereinement les méthodes numériques correspondantes.

2 Théorie des champs, formalisme Lagrangien

Dans la leçon de Cartan datant de 1922 seule une variable indépendante est considérée : le temps t . Depuis le même formalisme a été étendu à plusieurs variables : le temps et l'espace. En acoustique, les phénomènes vibratoires sont modélisés par des fluctuations à la fois temporelles et spatiales. On parle alors de formalisme multi-symplectique par extension du formalisme symplectique esquissé dans la section précédente.

La discussion qui suit permet de se familiariser avec cette extension en utilisant le fibré des 1-jets ou la théorie des champs (du premier ordre). Ainsi l'espace des états décrit par Cartan de variables (t, q_i, v_i) (temps, position, vitesse), pour étudier la géométrie des trajectoires (courbes) solutions du principe de moindre action, est étendu à un espace fibré. Pour être plus précis, désignons par M une variété orientable de dimension $(n+1)$ (1 pour le temps n pour l'espace) et $\pi : E \rightarrow M$ un fibré différentiel dont la fibre F est de dimension N . Dans ce contexte, $(n+1)$ variables indépendantes permettent de paramétriser la base M du fibré. Le concept de courbe (ou trajectoires) est étendu au concept de *section* du fibré $\phi : M \rightarrow E$ dans la suite (voir aussi les notation en annexe 4.1).

Pour prendre en compte les vitesses et les déformations, c'est à dire les dérivées temporelles et spatiales, il est commode d'étendre le fibré $\pi : E \rightarrow M$ au fibré des 1-jets noté J^1E . Chaque section ϕ peut être prolongée dans ce fibré de manière à représenter les dérivées partielles, on parle alors de section holonome $(j^1\phi)^* : M \rightarrow J^1E$. La forme de

contact

$$\theta_{\mathbb{F}} = (dy^A - v_{\mu}^A dx^{\mu}) \otimes \vec{\partial}_A,$$

qui peut être reliée à la forme (3) de la leçon de Cartan, permet de caractériser ces sections prolongées par la relation $(j^1\phi)^*\theta_{\mathbb{F}} = 0$: le tiré arrière de la forme de contact par une section holonome du fibré des 1-jets est nul. Autrement dit, les vecteurs tangents à ces sections sont dans le noyau de la forme de contact.

De plus, dans un processus d'optimisation, les sections critiques sont recherchées dans une famille de sections variées et générées par une transformation infinitésimale. Le champ de vecteurs tangent à cette transformation (disons Z) agit aussi dans l'extension du fibré des 1-jets. Ce champ de vecteurs doit donc être prolongé lui aussi (j^1Z dans la suite, voir aussi l'annexe 4.2)

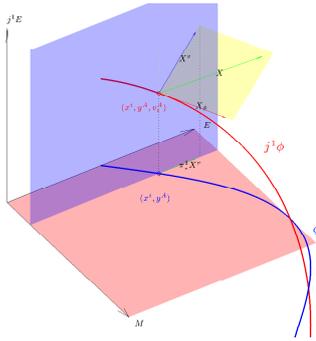


FIGURE 3 – La section $(j^1\phi)^*$, la prolongation de la section ϕ dans to $J^1 E$ est appelée section holonome.

Avec ces éléments bien définis (voir Arturo Echeverria-Enriquez & al [3], voir aussi l'annexe 4.1 pour les notations) et en utilisant un système de coordonnées naturel $(x^{\mu}, y^A, v_{\mu}^A)$ sur $J^1 E$, on introduit une forme Lagrangienne

$$\mathcal{L} = \mathfrak{L}(x^{\mu}, y^A, v_{\mu}^A)\omega, \quad \mathfrak{L} \in \mathcal{C}^{\infty}(J^1 E),$$

où $\omega = dt \wedge dx^1 \dots \wedge dx^n$ est la forme volume. Le principe de moindre action consiste à chercher une section critique ϕ optimisant l'action $\mathcal{A}(\phi) = \int_{\mathcal{U}} \tilde{j}^1\phi \mathcal{L}$, pour $\mathcal{U} \subset M$.

Même dans ces circonstances plus générales, en suivant les idées de Cartan, une formule similaire à l'équation (1) peut être obtenue. C'est à dire une formule du type $\delta\mathcal{A} = \int_{\partial\mathcal{U}} \dots - \int_{\mathcal{U}} \dots$). Cela permet de trouver naturellement une expression de la $n + 1$ -forme de Poincaré-Cartan

$$\Theta_{\mathcal{L}} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial v_{\mu}^A} dy^A \wedge d^n x_{\mu} - \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial v_{\mu}^A} v_{\mu}^A - \mathfrak{L} \right) \omega, \quad (16)$$

(en ayant posé $d^n x_{\mu} = \vec{\partial}_{\mu} \lrcorner \omega$). Les transformées de Legendre correspondantes

$$p_A^{\mu} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial v_{\mu}^A}, \quad \mathcal{H} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial v_{\mu}^A} v_{\mu}^A - \mathfrak{L}. \quad (17)$$

apparaissent elles aussi de façon naturelles dans ce calcul.

Ainsi les équations des champs d'Euler-Lagrange

$$\vec{\partial}_{\mu} \left. \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial v_{\mu}^A} \right|_{(j^1\phi)^*} - \left. \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial y^A} \right|_{(j^1\phi)^*} = 0, \quad A = 1, \dots, N. \quad (18)$$

sont obtenues en choisissant un champ de vecteur Z s'annulant sur $\partial\mathcal{U}$. Dans le cas contraire (conditions aux

limites variables) et en choisissant des sections critiques annulant les équations précédentes, la discussion de Cartan peut être menée. L'équivalent de la forme (pré)-symplectique dans le cadre de la théorie des champ est cette fois une $(n + 2)$ -forme dans $J^1 E$, notée $\Omega_{\mathcal{L}} = -d\Theta_{\mathcal{L}}$. Elle permet de formuler le théorème des variations suivant (voir par exemple, [3] pour les détails)

THÉORÈME 2.(a) Théorème des variations

Soit ϕ une section critique de la fonctionnelle d'action $\mathcal{A} = \int_M \tilde{j}^1\phi \mathcal{L}$, alors

1. Les équations Euler-Lagrange (18) sont vérifiées ;
2. Pour tout champ de vecteur X sur $J^1 E$, on a

$$(j^1\phi)^*(X \lrcorner \Omega_{\mathcal{L}}) = 0; \quad (19)$$

Le théorème des variations est très utile. En particulier en présence de symétries. Il permet de démontrer le premier théorème de Noether et d'obtenir les courants de Noether (extension de la notion d'invariants dans le formalisme symplectique). En mécanique, une symétrie est caractérisée par une transformation (infinitésimale) de l'espace des phases (le fibré tangent) qui laisse invariant le Lagrangien du système. A cette transformation est associé un champ de vecteur $S \in \chi(E)$ qui annule la dérivée de Lie du Lagrangien

$$L_{(j^1 S)} \mathcal{L} = 0.$$

Selon le premier théorème de Noether, la présence d'une symétrie génère des "quantités conservées". Le principal résultat s'exprime par

THÉORÈME 2.(b) Premier théorème de Noether

Soit $S \in \chi(E)$ un champ de symétrie d'un système spécifié par le Lagrangien \mathcal{L} , alors la n -forme $J_S := (j^1 S) \lrcorner \Theta_{\mathcal{L}}$ est constante (fermée) sur les sections critiques du problème variationnel.

Dans le cas symplectique $n = 0$, les courants de Noether sont des 0-formes, donc des fonctions invariantes le long des solutions du problème. Dans le cas où $n > 0$ (multisymplectique), les courants J_S sont des formes fermées qui vérifient $dJ_S = 0$: on parle alors de loi de conservation.

3 Conclusion

En guise de conclusion, nous invitons le lecteur, muni de ces éléments de géométrie différentielle, à lire l'article de Marsden sur les intégrateurs variationnels multisymplectiques [5]. Il propose des intégrateurs qui préservent la structure multisymplectique $\Omega_{\mathcal{L}}$. La forme multisymplectique de Poincaré-Cartan $\Theta_{\mathcal{L}}$ est aussi envisagée dans le domaine discret, permettant ainsi, dans le cadre du théorème de Noether, d'identifier les invariants discrets. Il parle alors d'intégrateurs covariants (d'espace-temps) qui conserve les formes multisymplectiques et les invariants correspondant aux symétries.

Références

- [1] Elie Cartan. *Leçons sur les invariants intégraux*. Paris, Librairie Scientifique A. Hermann & Fils, 1922.

- [2] Elie Cartan. *Les espaces métriques fondés sur la notion d'aire*. Paris, Librairie Scientifique A. Hermann & Fils, 6 rue de la Sorbonne, 1933.
- [3] Arturo Echeverría-enríquez, Miguel C. Muñoz-lec, and Narciso Román-roy. Geometry of multisymplectic hamiltonian first-order field theories. *J. Math. Phys.*, pages 7402–7444, 2000.
- [4] A. Lew, J. E. Marsden, M. Ortiz, and M. West. Variational time integrators. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60(1) :153–212, 2004.
- [5] E. Jerrold Marsden, W. George Patrick, and Steve Shkoller. Multisymplectic geometry, variational integrators, and nonlinear pdes. *Communications in Mathematical Physics*, 199(2) :351–395, 1998.
- [6] J. E. Marsden and M. West. Discrete mechanics and variational integrators. *Acta Numerica 2001*, 10 :357–514, 2001.

4 Annexes : Elements of differential geometry for first-order lagrangian field theories

4.1 Geometrical structures of first-order jet bundles

For all the article, the framework of Arturo Echeverría-Enríquez & al [3] is adopted as a system of notation. It is quickly related here for convenience of the reader. Let M be an orientable manifold and $\pi : E \rightarrow M$ a differentiable fiber bundle with typical fibre F . Let $\dim M = n + 1$, $\dim F = N$. The bundle of 1-jets of sections of π , or 1-jet bundle, is denoted by J^1E . For every $p \in E$, the fiber of J^1E is denoted J_p^1E and its elements by \bar{p} . If $\phi : U \subset M \rightarrow E$ is a representative of $\bar{p} \in J_p^1E$, we write $\bar{p} = T_{\pi(p)}\phi$.

Sections of π can be lifted to J^1E in the following way : let x^μ , $\mu = 1, \dots, n, 0$, be a local system in M and y^A , $A = 1, \dots, N$ a local system in the fibers ; that is, $\{x^\mu, y^A\}$ is a coordinate system adapted to the bundle. In these coordinates, a local section $\phi : U \rightarrow E$ is written as $\phi(x) = (x^\mu, \phi^A(x))$, that is, $\phi(x)$ is given by functions $y^A = \phi^A(x)$.

This local system (x^μ, y^A) allows us to construct a local system (x^μ, y^A, v_μ^A) in J^1E , where v_μ^A are defined as follows : if $\bar{p} \in J^1E$, with $\pi^1(\bar{p}) = p$ and $\pi(p) = x$, let $\phi : U \rightarrow E$, $y^A = \phi^A$, be a representative of \bar{p} , then

$$v_\mu^A(\bar{p}) = \left(\frac{\partial \phi^A}{\partial x^\mu} \right) \Big|_x$$

These systems are called natural local systems in J^1E . In one of them, we have

$$(j^1\phi)^*(x) = (x^\mu(x), \phi^A(x), \frac{\partial \phi^A}{\partial x^\mu}(x)).$$

4.2 Canonical form and holonomy

The bundle J^1E is endowed with a canonical geometric structure θ with expression in a natural local system

$$\theta_{\bar{p}} = (dy^A - v_\mu^A dx^\mu) \otimes \vec{\partial}_A \quad (20)$$

Holonomic sections can be characterized using this canonical form as follows :

PROPOSITION 4.(a)

L et $\psi : M \rightarrow J^1E$ be a section of π . The necessary and sufficient condition for ψ to be a holonomic section is that $\psi^\theta = 0$.*

4.3 Jet prolongation of vector fields

A local diffeomorphism $\varphi : J^1E \rightarrow J^1E$ defines a contact transformation if it preserves the contact ideal, meaning that if σ is any contact form on J^1E , then $\varphi^*\sigma$ is also a contact form. The flow generated by a vector field j^1Z on the jet space J^1E forms a one-parameter group of contact transformations if and only if the Lie derivative $L_{j^1Z}(\sigma)$ of any contact form σ preserves the contact ideal or module.

So, starting from a general vector field $Z = \alpha^\mu \vec{\partial}_\mu + \beta^A \vec{\partial}_A$, where α^μ and β^A depend on (x^μ, y^A) , and writing the jet prolongation j^1Z on the jet space J^1E as

$$j^1Z = \alpha^\mu \vec{\partial}_\mu + \beta^A \vec{\partial}_A + \gamma_\mu^A \vec{\partial}_A^\mu,$$

the only problem is to calculate the coefficients γ_μ^A .

Echeverría & al [3] traduce the preservation of the contact module generated by the forms $\theta^A = (dy^A - v_\nu^A dx^\nu)$ by the fact that they must have $L_{j^1Z}(\theta^A) = \zeta_B^A \theta^B$ for some \mathcal{C}^∞ function ζ_B^A on J^1E . So, using the Cartan formula in the Lie derivative L_{j^1Z} and identifying the different terms, they obtain the 1-jet prolongation of Z with coefficients

$$\gamma_\mu^A = \frac{\partial \beta^A}{\partial x^\mu} + v_\mu^B \frac{\partial \beta^A}{\partial y^B} - v_\nu^A \left(\frac{\partial \alpha^\nu}{\partial x^\mu} + v_\mu^B \frac{\partial \alpha^\nu}{\partial y^B} \right). \quad (21)$$

As a particular case, if $Z \in \mathcal{X}^{V(\pi)}(E)$ is a π -vertical vector field, in a local natural system of coordinates, Z is equal to $\beta^A \vec{\partial}_A$ and its canonical prolongation is

$$j^1Z = \beta^A \vec{\partial}_A + \left(\frac{\partial \beta^A}{\partial x^\mu} + v_\mu^B \frac{\partial \beta^A}{\partial y^B} \right) \vec{\partial}_A^\mu. \quad (22)$$