

# CFA/VISHNO 2016

## **Modélisation numérique des incertitudes en vibration des structures non-linéaires géométriques**

E. Capiez-Lernout et C. Soize

Université Paris-Est Marne la Vallée, Laboratoire MSME, 5, Bd Descartes, 77454  
Marne-La-Vallée Cedex 2, France  
evangeline.capiez-lernout@u-pem.fr



LE MANS

La présente recherche concerne la propagation des incertitudes dans les systèmes vibratoires complexes en tenant compte dans la modélisation des effets non-linéaires géométriques induits par les grands déplacements et les grandes déformations. Un modèle réduit non-linéaire déterministe est tout d'abord construit numériquement afin de réduire le nombre d'inconnues. Les incertitudes sur les opérateurs linéaires sont construites usuellement avec l'approche probabiliste non-paramétrique. Un opérateur de rigidité dédié contenant toute l'information liée aux termes linéaires, quadratiques et cubiques et possédant la propriété de définie-positivité est construit. Toutefois, une difficulté concernant l'implémentation des incertitudes subsiste car la taille du germe aléatoire augmente substantiellement, en évoluant avec le carré de la dimension du modèle réduit non-linéaire. La définition d'un critère cohérent permettant d'analyser l'influence des incertitudes sur la partie non-linéaire des opérateurs vis-à-vis de la partie linéaire nécessite en toute logique d'utiliser le même germe pour chacun des deux cas, tout en ayant une taille raisonnable garantissant la faisabilité des calculs numériques. L'idée principale consiste à introduire une factorisation judicieuse de l'opérateur de rigidité dédié en résolvant un problème aux valeurs propres et en ne gardant que les contributions essentielles des vecteurs propres associés. Une application numérique d'un système vibratoire complexe de grande dimension est présentée.

## 1 Introduction

De nos jours, un challenge majeur consiste à prendre en compte les effets non-linéaires géométriques dans les modélisations numériques du comportement mécanique des structures. De telles situations sont effectivement réalistes, notamment dans le cas de structures minces [2] ou de structures soumises à des chargements importants. Pour de tels régimes de fonctionnements, les grandes déformations et les grands déplacements ne peuvent plus être négligés (voir par exemple [12, 11] dans le cadre des machines tournantes ou encore [10] pour des structures minces ou élancées). De surcroît, dans beaucoup d'applications industrielles présentant un haut niveau de complexité structurelle, les modèles numériques déterministes non-linéaires ne permettent pas de représenter le comportement mécanique de la structure avec précision. Dans ce cas, il est important de prendre en compte les incertitudes dans les modèles numériques en utilisant des théories probabilistes. Récemment une méthode numérique pour l'analyse de la propagation des incertitudes dans le contexte de la dynamique des structures en présence de non linéarités géométriques a été proposée et validée [6, 7, 8]. L'implémentation des incertitudes est effectuée dans le contexte de la modélisation probabiliste non paramétrique à partir d'un modèle réduit moyen non-linéaire. Une telle approche probabiliste est possible dans le cas de non linéarités géométriques, car un opérateur dédié de rigidité défini positif est introduit, celui-ci contenant l'intégralité de l'information concernant l'ensemble des termes de rigidité linéaires et non-linéaires. Toutefois, la dimension de cet opérateur croît comme le carré de la dimension du modèle réduit non-linéaire, ce qui requiert rapidement un germe aléatoire de grande dimension. En conséquence, un tel effet d'échelle rend difficile l'analyse de la propagation des incertitudes. L'idée principale utilisée pour réduire la taille du germe aléatoire consiste à construire un second modèle réduit avant d'implémenter le modèle d'incertitudes. Dans ce cas, il est possible également de prendre en compte les incertitudes sur la partie linéaire ou sur la partie non-linéaire relatif à l'opérateur de manière cohérente. Le manuscrit est organisé de la manière suivante : dans la première section,

après avoir mentionné l'ensemble des étapes concernant la méthodologie proposée, on s'intéresse plus particulièrement à la modélisation probabiliste des incertitudes. La section suivante concerne l'application numérique dans le contexte du post-flambement d'une coque cylindrique modélisée par des éléments finis tridimensionnels.

## 2 Construction du modèle numérique

### 2.1 Méthodologie générale

Récemment, une méthodologie numérique complète a été proposée dans le contexte du post-flambement statique et dynamique de structures non-linéaires géométriques en présence d'incertitudes [7]. Les principales étapes sont résumées ci-dessous :

1. Construction du modèle élément fini de la structure
2. Calcul de la réponse statique non-linéaire de la structure comme réponse de référence
3. Choix d'une base de projection en utilisant la décomposition orthogonale en valeurs propres de la réponse de référence
4. Construction directe des opérateurs linéaires et non-linéaires du modèle réduit non-linéaire moyen par projection des opérateurs éléments finis sur la base de projection précédemment calculée [6]
5. Implémentation des incertitudes par l'approche probabiliste non-paramétrique généralisée aux non-linéarités géométriques [4]
6. Résolution des équations stochastiques numériques par un algorithme basé sur les méthodes de longueur d'arc [9]

### 2.2 Principe de modélisation des incertitudes

A partir de maintenant, on s'intéresse au point (5), qui concerne la modélisation des incertitudes sur la structure.

Dans [4], l'extension de l'approche probabiliste non paramétrique au cas des non-linéarités géométriques a été considéré en introduisant l'opérateur  $[\mathcal{K}]$  d'ordre  $P = N(N + 1)$  suivant :

$$[\mathcal{K}] = \begin{bmatrix} [\mathcal{K}^{(e)}] & [\widehat{\mathcal{K}}^{(2)}] \\ [\widehat{\mathcal{K}}^{(2)}]^T & 2[\mathcal{K}^{(3)}] \end{bmatrix}, \quad (1)$$

où les blocs matriciels  $[\widehat{\mathcal{K}}^{(2)}]$  et  $[\mathcal{K}^{(3)}]$  sont les matrices ( $N \times N^2$ ) et ( $N^2 \times N^2$ ) dont les composantes sont définies par :

$$\begin{aligned} [\widehat{\mathcal{K}}^{(2)}]_{\alpha J} &= \widehat{\mathcal{K}}_{\alpha\beta\gamma}, \quad J = (\beta - 1)N + \gamma, \quad (2) \\ [\mathcal{K}^{(3)}]_{IJ} &= \mathcal{K}_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}, \quad I = (\alpha - 1)N + \beta, \quad J = (\gamma - 1)N + \delta. \quad (3) \end{aligned}$$

Il a été montré que la matrice  $[\mathcal{K}]$  est symétrique définie positive ce qui permet d'écrire la factorisation suivante  $[\mathcal{K}] = [L_K]^T [L_K]$ .

En conséquence, l'extension de la théorie probabiliste non paramétrique et immédiate et l'opérateur aléatoire est défini par  $[\mathcal{K}] = [L_K]^T [\mathbf{G}_K(\delta_K)] [L_K]$ .

On s'intéresse à introduire une certaine cohérence de modélisation lorsque l'aléa est considéré sur la partie linéaire de l'opérateur  $[\mathcal{K}]$  ou bien sur l'ensemble de l'opérateur. L'idée consiste à ce que ce soit le même germe aléatoire qui pilote ces deux cas. Dans le cas où l'aléa serait uniquement sur la partie linéaire de l'opérateur, il serait cohérent d'extraire de l'opérateur aléatoire  $[\mathcal{K}]$  uniquement la partie linéaire, laissant les opérateurs quadratiques et cubiques déterministes. Cependant, deux difficultés apparaissent. La première est un effet d'échelle qui conduit à considérer un niveau local d'incertitudes pour la partie linéaire qui serait bien plus faible. La deuxième difficulté provient du fait que la matrice aléatoire  $[\mathbf{G}_K(\delta_K^{NL})]$  contient  $N^2(N + 1)(N + 2)/2$  variables aléatoires indépendantes. La faisabilité de générer de telles réalisations de matrice aléatoires reste questionable lorsque  $N$  croît.

### 2.3 Nouvelle modélisation probabiliste

Dans le présent contexte, l'idée maîtresse consiste à utiliser le même germe aléatoire pour la prise en compte des incertitudes sur la partie linéaire ou bien les parties linéaire et non-linéaires de l'opérateur. Pour ce faire, on effectue une seconde réduction modale de l'opérateur  $[\mathcal{K}]$  en résolvant le problème aux valeurs propres

$$[\mathcal{K}] \psi_\alpha = \lambda'_\alpha \psi_\alpha. \quad (4)$$

La matrice  $[\mathcal{K}]$  peut être approximée par la matrice  $[\tilde{\mathcal{K}}]$  d'ordre  $P$ , définie par

$$[\tilde{\mathcal{K}}] = [\tilde{L}_K]^T [\tilde{L}_K], \quad (5)$$

avec  $[\tilde{L}_K]$  la matrice rectangulaire ( $N' \times P$ ) telle que

$$[\tilde{L}_K] = [\Lambda^{N'}]^{1/2} [\Psi^{N'}]^T, \quad (6)$$

où  $[\Lambda^{N'}]$  est la matrice diagonale d'ordre  $N'$  telle que  $[\Lambda^{N'}]_{\alpha\alpha} = \lambda'_\alpha$ , avec  $\lambda'_1 \geq \lambda'_2 \geq \dots \geq \lambda'_{N'}$ . Les vecteurs colonnes de la matrice  $[\Psi^{N'}]$  de dimension  $(P \times N')$  matrix

sont les vecteurs propres  $\psi_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, \dots, N'\}$  associés aux valeurs propres  $\lambda'_\alpha$ . La matrice  $[\mathcal{K}]$  est alors remplacée par la matrice aléatoire  $[\tilde{\mathcal{K}}]$  telle que

$$[\tilde{\mathcal{K}}] = [\tilde{L}_K]^T [\tilde{\mathbf{G}}_K(\delta_K)] [\tilde{L}_K], \quad (7)$$

où  $[\tilde{\mathbf{G}}_K(\delta_K)]$  est la matrice aléatoire à valeurs dans l'espace des matrices symétriques définies positives d'ordre  $N'$  dont le modèle probabiliste est obtenu par le principe du maximum d'entropie. Il est à noter qu'on s'attend naturellement à avoir la propriété  $N \leq N' \ll N(N + 1)$ .

## 3 Application numérique

### 3.1 Description du modèle numérique

La théorie présentée ci-dessus est appliquée dans le contexte du post-flambement statique d'une coque cylindrique de hauteur  $h = 0.144 m$ , de rayon moyen  $r_m = 0.125 m$  et d'épaisseur  $e = 2.7 \times 10^{-4} m$ . La coque cylindrique est encastrée à sa base et est rigide en  $x_3 = h$  avec trois degrés de liberté de translation. La coque est soumise en  $x_3 = h$  à un chargement fixe de traction  $F^t = 8500 N$  et à un chargement de cisaillement variable  $F^{sh}(s) = 10000 s N$ , où  $s$  est l'intensité de la force. Le matériau est élastique isotrope homogène dont les propriétés  $E = 1.8 \times 10^{11} N.m^{-2}$  et  $\nu = 0.3$  ont été mesurées dans [2, 3]. Le modèle élément fini est constitué d'un maillage régulier constitué de  $(n_r - 1) \times n_\theta \times (n_3 - 1) = 1 \times 7500 \times 9599 = 712500$  éléments finis solides tridimensionnels à 8 noeuds, où  $n_r$ ,  $n_\theta$  et  $n_3$  sont le nombre de noeuds selon les directions radiales, ortho-radiales et  $\mathbf{e}_3$ . Le modèle numérique moyen possède 4230003 degrés de liberté. L'observation choisie  $u_{obs}(s)$  correspond au déplacement de corps rigide en  $x_3 = h$  selon la direction du chargement de cisaillement. La structure est pré-déformée numériquement selon le premier mode linéaire élastique de flambement, représenté par la Fig.1 pour une amplitude maximale de  $2.7 \times 10^{-4} m$ .

### 3.2 Convergence de l'opérateur de rigidité issu du modèle réduit moyen non-linéaire

Le modèle réduit moyen est construit en utilisant  $N = 27$  modes issus de la décomposition orthogonale aux valeurs propres de la réponse de référence non-linéaire en post-flambement statique [6]. Par conséquent, la matrice  $[\mathcal{K}]$  définie par l'équation (1) est d'ordre  $P = 756$ . La seconde méthode de réduction est mise en oeuvre. Soit  $[\tilde{\mathcal{K}}^{N'}]$  l'approximation de la matrice  $[\mathcal{K}]$  obtenue en gardant les  $N'$  vecteurs propres associés aux  $N'$  valeurs propres les plus importantes. La figure 2 représente le graphe de la fonction  $N' \mapsto \text{Conv}(N')$  définie par

$$\text{Conv}(N) = \sqrt{\frac{\|[\tilde{\mathcal{K}}^{N'}] - [\mathcal{K}]\|_F^2}{\|[\mathcal{K}]\|_F^2}}. \quad (8)$$

Une convergence rapide est observée. A partir de maintenant, on choisit  $N' = 425$ .

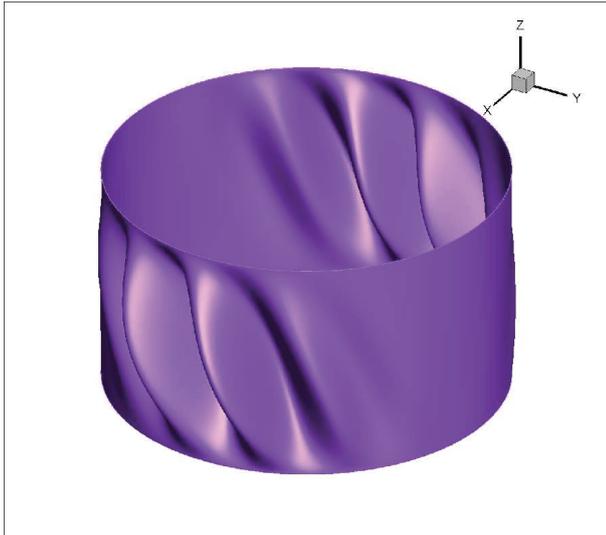


FIGURE 1 – Déformée du premier mode élastique de flambement.

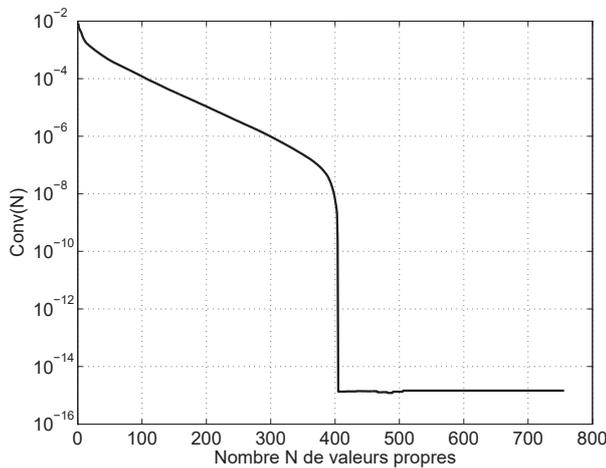


FIGURE 2 – Analyse de convergence pour la seconde méthode de réduction : graphe de la fonction  $N \mapsto Conv(N)$

### 3.3 Convergence de la réponse stochastique calculée à partir de la deuxième réduction

En présence d'aléa, l'observation en déplacement  $U_{obs}(s)$  obtenue pour un chargement  $s$  donné est une variable aléatoire. L'aléa introduit correspond à un niveau d'incertitude  $\delta_K = 0.1$  introduit sur la matrice aléatoire  $[\tilde{K}]$  définie par l'équation (7). La convergence de cette réponse aléatoire en déplacement est analysée vis-à-vis du nombre  $n_s$  de réalisations requises par la simulation numérique de Monte-Carlo et la taille  $N'$  de la seconde méthode de réduction en introduisant

$$Conv_U(N', n_s) = \sqrt{\frac{1}{n_s} \sum_{j=1}^{n_s} \left( \int_S (\tilde{U}_{obs}^{N'}(s, \theta_j))^2 ds \right)} \quad , \quad (9)$$

avec  $\tilde{U}_{obs}^{N'}(s, \theta_j)$  la  $j$ -ème réalisation de l'observation aléatoire  $U_{obs}(s)$  obtenu à partir du second modèle réduit de dimension  $N'$ . Les figures 3 et 4 montrent les graphes des

fonctions  $N' \mapsto Conv_U(N', 3000)$  et  $n_s \mapsto Conv_U(425, n_s)$ . Une bonne approximation est obtenue pour  $N' = 425$  et  $n_s = 2000$ .

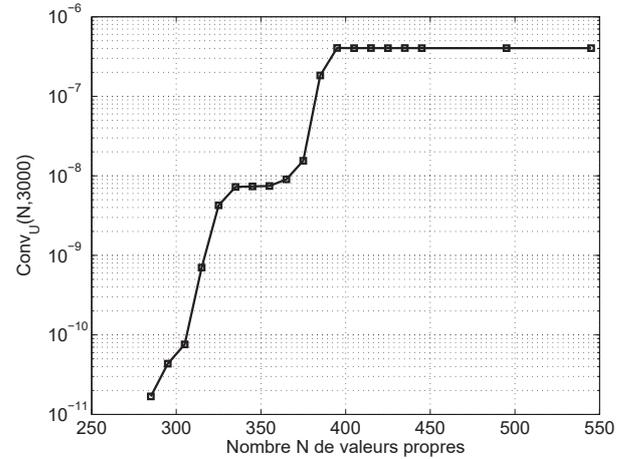


FIGURE 3 – Analyse de convergence de la réponse aléatoire : graphe de la fonction  $N \mapsto Conv_U(N, 3000)$

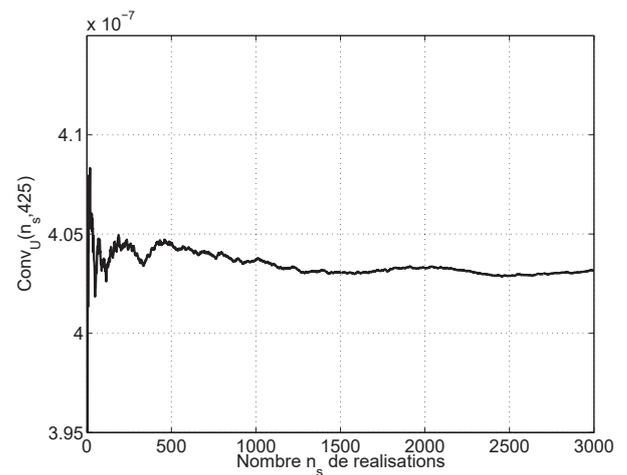


FIGURE 4 – Analyse de convergence de la réponse aléatoire : graphe de la fonction  $n_s \mapsto Conv_U(425, n_s)$

### 3.4 Analyse stochastique du post-flambement statique de la coque.

Les résultats numériques présentés correspondent à un niveau d'incertitude  $\delta_K = 0.1$  sur la matrice aléatoire  $[\tilde{K}]$ . Dans le cas présenté, l'incertitude est implémentée uniquement sur la partie linéaire de l'opérateur de rigidité.

Deux classes distinctes de branches sont observées en post-flambement. Il existe des réalisations pour lesquelles la réponse aléatoire en post-flambement suit la réponse en post-flambement du modèle moyen. Dans ce cas, on observe une zone de comportement élastique particulièrement robuste aux incertitudes pour un incrément de charge statique  $s \in [0, 0.6]$ , puis une zone d'assouplissement particulièrement sensible aux incertitudes et correspondant

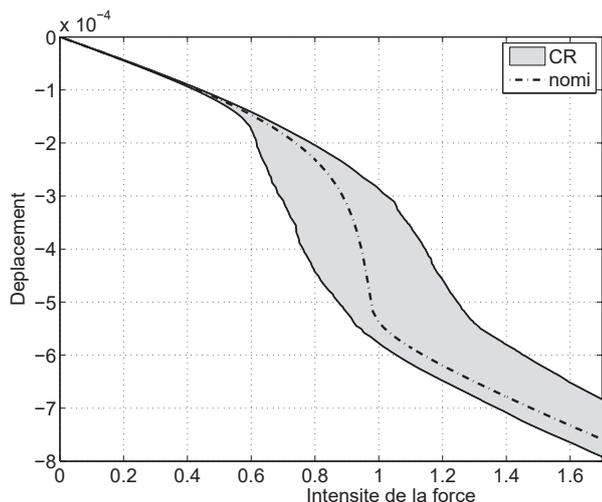


FIGURE 5 – Graphe de la réponse de référence  $s \mapsto u_{obs}(s)$ , Intervalle de confiance de la réponse aléatoire  $s \mapsto U^1_{obs}(s, \delta = 0.1)$ .

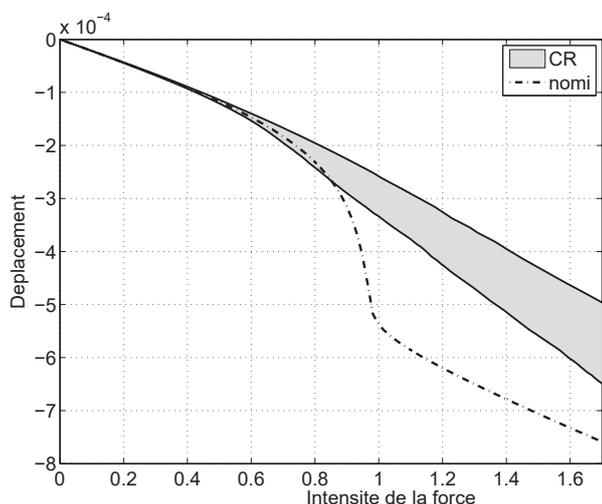


FIGURE 6 – Graphe de la réponse de référence  $s \mapsto u_{obs}(s)$ , Intervalle de confiance de la réponse aléatoire  $s \mapsto U^2_{obs}(s, \delta = 0.1)$ .

au flambement de la structure pour  $s \in ]0.6, 1]$ , puis enfin une zone de raidissement élastique davantage robuste aux incertitudes pour  $s > 1$ . Mais il existe également des réalisations pour lesquelles la réponse aléatoire est sensiblement différente du modèle moyen. Dans ce cas, on observe encore la zone de comportement élastique particulièrement robuste aux incertitudes, ; par contre, pour  $s > 0.6$ , on observe un assouplissement progressif, de plus en plus sensible aux incertitudes. On distingue ces deux classes de comportement de post-flambement par les observations aléatoires  $U^1_{obs}(s, \delta = 0.1)$  et  $U^2_{obs}(s, \delta = 0.1)$ , dont les intervalles de confiances sont représentés par les graphes des figures 5 et 6.

Les figures 7 et 8 représentent les déformées en post-flambement statique pour un incrément de charge  $s = 1.6$ . Il est observé que les deux structures flambent selon le premier

mode d'Euler. Toutefois, les deux branches observées se distinguent par leur vitesse d'assouplissement dans le domaine du post-flambement.

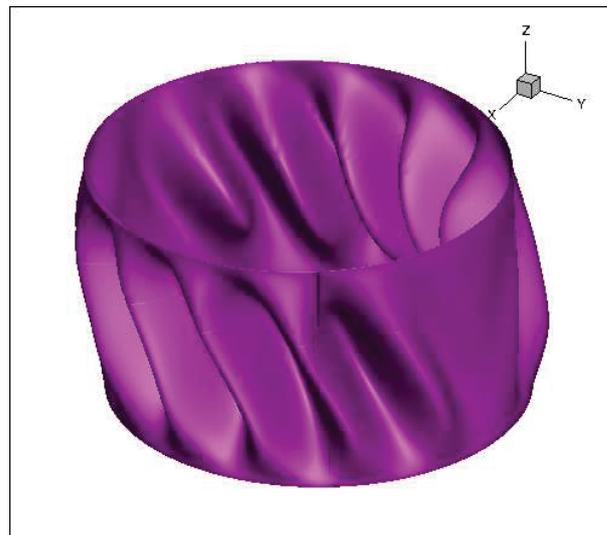


FIGURE 7 – Déformée en post-flambement statique d'une réalisation  $U^1_{obs}(s = 1.6, \theta)$ .

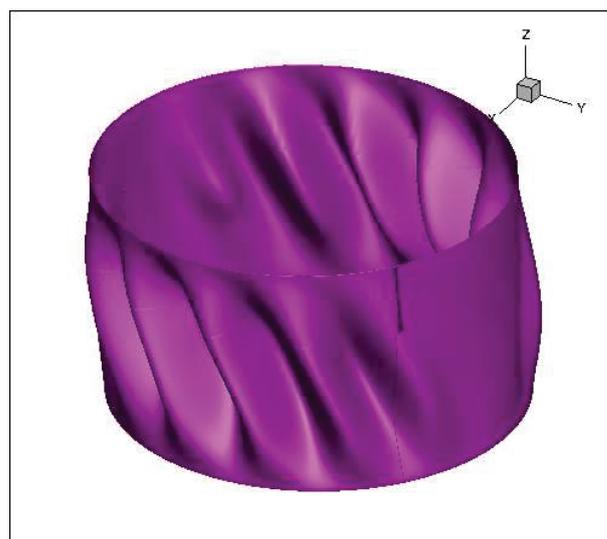


FIGURE 8 – Déformée en post-flambement statique d'une réalisation  $U^2_{obs}(s = 1.6, \theta')$ .

## 4 Conclusion

Une méthodologie d'implémentation des incertitudes dans le contexte du post-flambement statique d'une coque mince pour laquelle les effets non-linéaires géométriques doivent être pris en compte dans la modélisation est présentée. Au travers de la construction d'un second modèle réduit, les incertitudes peuvent être implémentées de façon cohérente, que ce soit sur la partie linéaire ou non-linéaire de l'opérateur de rigidité. Il est notamment montré que la présence d'incertitudes donne lieu à deux branches distinctes

de comportement de post-flambement, avec des plages de sensibilité aux incertitudes différentes.

## Remerciements

Ce travail a été financé par la DGA (Direction Générale de l'Armement) dans le contexte du projet TURBODYNA (Référence ANR-13-ASTR-0008-01) relatif au programme de recherche ANR ASTRID.

## Références

- [1] C. Schenk, G. Schuëller, Buckling analysis of cylindrical shells with random geometric imperfections, *International Journal of Nonlinear Mechanics*, **38**, 1119-1132 (2003).
- [2] G. Michel, A. Combescure, J.-F. Jullien, Finite element simulation of dynamic buckling of cylinders subjected to periodic shear, *Thin-Walled Structures*, **36**, 111-135 (2000).
- [3] G. Michel, A. Limam, J.-F. Jullien, Buckling of cylindrical shells under static and dynamic shear loading, *Engineering Structures*, **22**, 535-543 (2000).
- [4] M.-P. Mignolet, C. Soize, Stochastic reduced order models for uncertain geometrically nonlinear dynamical systems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **197**, 3951-3963 (2008).
- [5] L. Sirovich, Turbulence and the dynamics of coherent structures, *Quarterly of Applied Mathematics*, **45** (3), 561-571 (1987).
- [6] E. Capiez-Lernout, C. Soize, M.-P. Mignolet, Computational stochastic statics of an uncertain curved structure with geometrical nonlinearity in three-dimensional elasticity, *Computational Mechanics*, **49** (1) 87-97 (2012).
- [7] E. Capiez-Lernout, C. Soize, M.-P. Mignolet, Post-buckling nonlinear static and dynamical analyses of uncertain cylindrical shells and experimental validation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **271**, 210-230 (2014).
- [8] Capiez-Lernout, E., Soize, C. and Mbaye, M., Uncertainty Quantification For Nonlinear Reduced-Order Elasto-Dynamics Computational Models in the proceedings of the IMAC-XXXIV, January 25-28, 2016, Orlando, Florida USA, (2016).
- [9] M.A. Crisfield, *Non-linear finite element analysis of solids and structures*, Vol. 1 : essentials. John Wiley and Sons, Chichester, 1997.
- [10] D.H. Hodges, X.Y. Shang, C.E.S. Cesnik, Finite element solution of nonlinear intrinsic equations for curved composite beams, *Journal of the American Helicopter Society*, **41** (4), 313-321 (1996).
- [11] D.M. Tang, E.H. Dowell, Nonlinear response of a non-rotating rotor blade to a periodic gust, *Journal of Fluids and Structures*, **10** (7), 721-742 (1996).
- [12] P.F. Pai, A.H. Nayfeh, A Fully Nonlinear-Theory of Curved And Twisted Composite Rotor Blades Accounting For Warpings and 3-Dimensional Stress Effects, *International Journal of Solids and Structures*, **31** (9) 1309-1340 (1994).