

CFA/VISHNO 2016

Identification de source vibratoire par méthode inverse et régularisation Bayésienne

C. Faure^a, C. Pezerat^a, J. Antoni^b et F. Ablitzer^a

^aLAUM / ENSIM, Rue Aristote, 72085 Le Mans, France

^bLVA, 25 bis av. Jean Capelle, 69621 Villeurbanne, France

charly.faure@univ-lemans.fr



LE MANS

Ce papier présente les possibilités apportées par l'approche bayésienne pour la régularisation de la méthode inverse d'identification de source vibratoire RIFF (Résolution Inverse Filtrée Fenêtrée). L'utilisation d'*a priori* gaussien dans l'approche bayésienne se ramène à l'approche de Tikhonov mais dont le paramètre de régularisation est le ratio des variances de bruit et de sources. La régularisation est ensuite optimisée automatiquement par des méthodes MCMC (Monte-Carlo par chaînes de Markov), en particulier via l'échantillonneur de Gibbs. Cette approche permet en plus d'identifier les distributions des différentes variables stochastiques du problème, et donc leur intervalle de confiance. Enfin, l'identification de source ponctuelle peut être réalisée par l'utilisation d'*a priori* parcimonieux au sein de cette approche MCMC, comme la distribution de Bernoulli-Gauss.

1 Introduction

En dynamique des structures, des efforts ont été faits pour améliorer les modèles de structure ou de propagation, permettant ainsi une meilleure précision sur les données de sortie du problème, comme un champ de déplacement. Néanmoins, les variables d'entrée telles que les sources vibratoires restent globalement mal connues, les résultats en sortie du modèle peuvent donc être biaisés. Ainsi, l'identification de sources vibratoires reste un sujet important en vibroacoustique.

À l'origine, l'identification de sources vibratoires a été étudiée par [1, 2] à l'aide de l'intensité structurale. Cette technique génère un champ de vecteurs d'intensité, permettant de localiser les sources mais sans pouvoir les quantifier. Ensuite, plusieurs méthodes basées sur les fonctions de réponse en fréquence ou sur l'approche modale ont été développées, comme la TPA (Transfert Path Analysis) décrite dans [3] ou la SEA (Statistical Energy Analysis) présentée dans [4]. Un aperçu de ces méthodes est donné dans [5]. Comme ces méthodes ont souvent besoin d'informations sur la structure, les conditions limites, les positions et/ou le nombre de sources, elles peuvent être vues comme des méthodes globales, en opposition aux méthodes locales, qui n'ont besoin d'information que sur une partie de la structure. Ce travail s'appuie en particulier sur une de ces approches locales, la méthode RIFF pour « Résolution Inverse Filtrée Fenêtrée » développée dans [6]. L'équation du mouvement de la structure est discrétisée analytiquement par différences finies afin d'identifier point par point l'effort vibratoire appliqué à la structure, indépendamment des conditions limites. Plus récemment, cette méthode a été adaptée par [7] aux structures complexes, nécessitant un modèle éléments finis. Le bruit de mesure venant fortement perturber l'identification de sources, le champ de source bruité est convolué par un noyau passe-bas pour faire émerger l'information utile.

Cette sensibilité au bruit de mesure est commune aux différents problèmes inverses, car le bruit est interprété comme le résultat de plusieurs sources non-physiques plutôt que comme une perturbation des mesures. Pour s'assurer que les sources estimées aient un comportement physique, il faut appliquer une étape dite de régularisation. Les approches bayésiennes connaissent un attrait grandissant pour la régularisation et l'optimisation des problèmes inverses (voir [8, 9, 10]) car elles apportent un point de vue physique et peuvent s'adapter aux spécificités des différents problèmes, par le jeu d'informations *a priori*. En acoustique et vibrations, ces méthodes ont déjà été utilisées entre autres par

[11, 12] pour l'holographie acoustique et par [13] pour l'identification parcimonieuse de sources vibratoires. En particulier, les méthodes MCMC (Monte-Carlo par chaînes de Markov) présentées dans [14] permettent dans un cadre bayésien d'optimiser la régularisation du problème inverse tout en identifiant l'ensemble des probabilités des différentes variables stochastiques du problème, donnant ainsi accès aux intervalles de confiance. Cette étape est réalisée par l'échantillonneur de Gibbs, un cas particulier des méthodes MCMC, présenté dans [15]. Il est également possible d'identifier des sources ponctuelles par cette approche en décrivant *a priori* la distribution du champ de source par une loi parcimonieuse. L'une des plus parcimonieuses étant la loi de Bernoulli-Gauss, dont une application est proposée par [16].

Après cette introduction, la méthode RIFF est présentée sur un cas simple de poutre en section 2, puis les algorithmes MCMC avec *a priori* gaussiens et bernoulli-gaussiens sont introduits en section 3. Des validations numériques et expérimentales illustrent ensuite ces méthodes en sections 4 et 5.

2 Identification de sources vibratoires

La méthode RIFF est basée sur l'équation locale du mouvement d'une structure connue. À titre d'exemple, la méthode est présentée sur une poutre de section rectangulaire, d'après la théorie d'Euler-Bernoulli.

2.1 Équation du mouvement

Le déplacement transverse de la poutre de section rectangulaire satisfait l'équation suivante,

$$E(1 + j\eta) \frac{bh^3}{12} \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \rho bh \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = f(x, t), \quad (1)$$

avec E le module d'Young, η le facteur de perte, b la largeur, h l'épaisseur, $w(x, t)$ le déplacement transverse à la position x et au temps t , ρ la masse volumique et $f(x, t)$ la distribution de source de vibration au point x et au temps t , définie en N/m dans ce cas monodimensionnel. Le principe de la méthode est de mesurer ce champ de déplacement transverse puis, connaissant le reste des termes de gauche de l'équation 1, de calculer directement le terme de source appliquée à la structure.

2.2 Estimation des dérivées

La dérivée temporelle peut être simplifiée en régime harmonique avec la convention temporelle $e^{+j\omega t}$ où ω est la pulsation, en faisant ressortir un facteur $-\omega^2$. La dérivée spatiale d'ordre 4 est estimée par différences finies en utilisant un schéma centré avec un développement de Taylor d'ordre 2,

$$\frac{\partial^4 w(x_i, \omega)}{\partial x^4} \approx \frac{1}{\Delta_x^4} \left(w(x_{i+2}, \omega) - 4w(x_{i+1}, \omega) + 6w(x_i, \omega) - 4w(x_{i-1}, \omega) + w(x_{i-2}, \omega) \right), \quad (2)$$

avec Δ_x le pas constant d'échantillonnage spatial et $w(x_i, \omega)$ le déplacement transverse qui dépend maintenant de l'espace et de la pulsation. En injectant l'équation 2 dans l'équation 1 et en se fixant à une pulsation ω ,

$$E(1 + j\eta) \frac{bh^3}{12} \frac{w_{i+2} - 4w_{i+1} + 6w_i - 4w_{i-1} + w_{i-2}}{\Delta_x^4} - \rho bh \omega^2 w_i = f_i. \quad (3)$$

Il est ainsi possible d'identifier f_i la source appliquée au point x_i sans avoir besoin d'évaluer les conditions limites physiques de la structure, ni de mesurer le déplacement en dehors de la zone d'étude. À cause de la dérivée spatiale, 2 points de déplacement à chaque limite de la zone d'étude sont utilisées sans pouvoir calculer de source en ces points limites. En remplaçant le schéma centré $[1; -4; 6; -4; 1]$ par un schéma décentré $[3; -14; 26; -24; 11; -2]$ aux frontières, il est possible d'exploiter au maximum l'information des mesures pour étendre légèrement la zone d'identification de source. Aux frontières, uniquement les efforts extérieurs sont identifiés avec cette approche, alors qu'avec un modèle par éléments finis les efforts identifiés aux frontières sont une combinaison d'efforts extérieurs et d'efforts internes. Cette approche peut donc être préférable à la méthode éléments finis pour des structures simples comme proposée dans proposée dans [7, 13], d'autant que le biais des différences finies peut être corrigé analytiquement [17].

2.3 Formulation matricielle

Par la suite, l'équation locale et discrétisée du mouvement de l'équation 3 est utilisée sous sa forme matricielle

$$D\mathbf{w} = \mathbf{f}, \quad (4)$$

où D est une matrice symétrique de taille $(N \times N)$ résultant de la discrétisation de l'opérateur de structure par schémas aux différences finies centrés et décentrés, \mathbf{w} est le vecteur des déplacements de dimension $N \times 1$ et \mathbf{f} est le vecteur des sources également de dimension $N \times 1$. Comme toutes les mesures contiennent du bruit, l'équation d'observation est donnée par

$$\mathbf{y} = \mathbf{w} + \mathbf{n}, \quad (5)$$

où \mathbf{y} est le vecteur des déplacements observés et \mathbf{n} est le vecteur du bruit additif, tous deux de taille $(N, 1)$. Appliquer l'opérateur de structure D sur les

observations \mathbf{y} fait apparaître un terme $D\mathbf{n}$ appelé forces aberrantes,

$$D\mathbf{y} = \mathbf{f} + D\mathbf{n}. \quad (6)$$

\mathbf{n} est souvent bien plus faible que \mathbf{w} mais D est un opérateur différentiel. Comme le déplacement reste principalement lisse alors que le bruit est complètement aléatoire, le terme $D\mathbf{n}$ peut devenir très rapidement supérieur à \mathbf{f} , rendant difficile l'identification des sources. Cette explication qualitative explique le besoin de régularisation.

3 Régularisation bayésienne

Souvent, des variables du problème sont mal connues voire totalement inconnues. Travailler avec un point de vue probabiliste est alors une approche appropriée pour prendre en compte ces incertitudes. Le cadre bayésien permet en particulier de restreindre le problème en apportant des informations sous la forme de probabilités *a priori*.

3.1 Théorème de Bayes

Partant de la formule de probabilité conditionnelle,

$$[A, B] = [A | B] \cdot [B] = [B | A] \cdot [A], \quad (7)$$

où $[A]$ représente la densité de probabilité d'une variable aléatoire A , $[A, B]$ correspond à la densité de probabilité conjointe entre A et B , $[B | A]$ étant la densité de probabilité conditionnelle de B sachant A . Bayes proposa le théorème suivant pour inférer la densité de probabilité d'un événement à partir à la fois de l'expérience et des connaissances *a priori*,

$$[A | B] = \frac{[B | A] \cdot [A]}{[B]} \propto [B | A] \cdot [A]. \quad (8)$$

$[A | B]$ est la densité de probabilité *a posteriori* qui correspond au résultat du problème inverse, $[B | A]$ la vraisemblance représentant l'information issue de l'expérience, $[A]$ la densité de probabilité *a priori* qui encapsule l'information *a priori* et $[B]$ la vraisemblance marginalisée aussi appelée l'évidence. L'évidence n'est qu'une constante multiplicative pour assurer que la quantité $[A | B]$ soit bien analogue à une densité de probabilité (l'intégrale doit être égale à 1) et n'impacte donc pas la forme de la densité *a posteriori*; la relation de proportionnalité est donc préférée à l'égalité stricte dans l'équation 8.

3.2 Échantillonneur de Gibbs avec sources gaussiennes *a priori*

3.2.1 *A priori*

Considérant un bruit blanc additif, la distribution *a priori* sur \mathbf{n} est décrite par une fonction de densité gaussienne complexe circulaire multidimensionnelle

$$[\mathbf{n}] \propto \mathcal{N}_c(\mathbf{n}; \mathbf{0}, \tau_n^{-1} \mathbf{I}) \quad (9)$$

avec τ_n la précision (l'inverse de la variance) à inférer, \mathbf{I} la matrice identité de dimension $(N \times N)$. Cette densité s'écrit

$$\mathcal{N}_c(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{\pi^M |\boldsymbol{\Sigma}|} \exp\left(-(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^H \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right). \quad (10)$$

avec \mathbf{x} le domaine de variation, $\boldsymbol{\mu}$ le vecteur des moyennes et $\boldsymbol{\Sigma}$ la matrice de covariance. Bien que les sources soient inconnues, leur énergie est limitée, donc la densité *a priori* sur \mathbf{f} peut aussi s'écrire

$$[\mathbf{f}] \propto \mathcal{N}_c(\mathbf{f}; \mathbf{0}, \tau_f^{-1} \mathbf{I}) \quad (11)$$

avec τ_f la précision à inférer également. Les deux précisions étant toujours positives, la loi Gamma est relativement bien appropriée pour représenter leur distribution,

$$[\tau_n] \propto \mathcal{G}(\tau_n; \alpha_n, \beta_n), \quad (12)$$

$$[\tau_f] \propto \mathcal{G}(\tau_f; \alpha_f, \beta_f). \quad (13)$$

L'expression de cette loi sur x avec les paramètres de forme α et d'échelle β est donnée par

$$\mathcal{G}(x; \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\beta x) \quad (14)$$

3.2.2 Vraisemblance

À partir des équations 6 et 9, la densité de probabilité des observations \mathbf{y} sachant les sources, l'opérateur de structure et le bruit de mesure (correspond donc au problème direct) peut être exprimée par

$$[\mathbf{y} | \mathbf{D}, \mathbf{f}, \tau_n] \propto \mathcal{N}_c(\mathbf{y}; \mathbf{D}^{-1} \mathbf{f}, \tau_n^{-1} \mathbf{I}) \quad (15)$$

3.2.3 A posteriori

En appliquant le théorème de Bayes de l'équation 8 pour identifier les variables inconnues, c'est-à-dire les différentes précisions ainsi que les sources, les probabilités *a posteriori* s'écrivent

$$[\tau_n | \mathbf{D}, \mathbf{y}, \mathbf{f}, \alpha_n, \beta_n] \propto \quad (16)$$

$$\mathcal{G}\left(\tau_n; \alpha_n + N, \left(\beta_n^{-1} + \|\mathbf{y} - \mathbf{D}^{-1} \mathbf{f}\|_2^2\right)^{-1}\right)$$

$$[\tau_f | \mathbf{f}, \alpha_f, \beta_f] \propto \quad (17)$$

$$\mathcal{G}\left(\tau_f; \alpha_f + N, \left(\beta_f^{-1} + \|\mathbf{f}\|_2^2\right)^{-1}\right)$$

$$[\mathbf{f} | \mathbf{D}, \mathbf{y}, \tau_f, \tau_n] \propto \mathcal{N}_c(\mathbf{f}; \boldsymbol{\mu}_f, \boldsymbol{\Sigma}_f) \quad (18)$$

avec :

$$\boldsymbol{\Sigma}_f = \left(\mathbf{D}^{-H} \mathbf{D}^{-1} \tau_n + \tau_f \mathbf{I}\right)^{-1} \quad (19)$$

$$\boldsymbol{\mu}_f = \tau_n \boldsymbol{\Sigma}_f \mathbf{D}^{-H} \mathbf{y} \quad (20)$$

où l'exposant H correspond à l'opérateur Hermitien. Ces expressions peuvent ensuite être simplifiées à l'aide du lemme d'inversion de matrices de Woodbury

et de la décomposition en valeurs singulières (SVD) pour une meilleure implémentation. L'algorithme de l'échantillonneur de Gibbs consiste ensuite à tirer successivement des échantillons à partir de ces trois lois *a posteriori* jusqu'à atteindre la convergence. La régularisation est optimisée et les intervalles de confiance peuvent être identifiés par les histogrammes des tirages. Par analogie, cet algorithme peut être vu comme l'optimisation d'une fonction coût de grandes dimensions, l'incertitude sur les variables étant liée à la courbure autour du minimum de la fonction coût.

3.3 Échantillonneur de Gibbs avec sources de type Bernoulli-Gauss *a priori*

3.3.1 A priori

La loi de Bernoulli-Gauss permet de forcer la parcimonie sur une variable stochastique. La distribution d'une variable aléatoire x suivant un processus Bernoulli-Gaussien complexe de paramètre de parcimonie λ et de précision τ est donnée par

$$\mathcal{BG}(x; \lambda, \tau^{-1}) = (1 - \lambda) \mathcal{N}(x; 0, 0) + \lambda \mathcal{N}(x; 0, \tau^{-1}) \quad (21)$$

Ainsi, selon une probabilité portée par le paramètre de parcimonie λ , l'échantillon est soit tiré dans une distribution de Dirac en 0 (représentée dans l'équation 21 par une gaussienne de moyenne et de variance nulles), soit dans une gaussienne centrée sur 0 et de précision τ . Ce paramètre de parcimonie doit être compris entre 0 et 1; la loi Beta est donc adaptée pour décrire sa distribution *a priori*,

$$\mathcal{B}(\lambda; p, q) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \lambda^{p-1} (1-\lambda)^{q-1} \quad (22)$$

Ainsi, plus q est grand face à p , plus le paramètre de parcimonie tend vers zéro et force le champ de source à être nul. Dans cette partie, les sources sont considérées distribuées selon une loi Bernoulli-Gauss, ce qui implique d'introduire un paramètre de parcimonie λ à inférer en plus. Les autres *a priori* sur le bruit et les précisions τ_n et τ_f , de même que la vraisemblance, ne sont pas impactés par ce changement et sont donc exprimés comme en section 3.2.1 et 3.2.2.

3.3.2 A posteriori

Après ce changement de loi *a priori*, les nouvelles lois *a posteriori* sont précisées ci-dessous.

$$[\tau_n | \mathbf{D}, \mathbf{y}, \mathbf{f}, \alpha_n, \beta_n] \propto \quad (23)$$

$$\mathcal{G}\left(\tau_n; \alpha_n + N, \left(\beta_n^{-1} + \|\mathbf{y} - \mathbf{D}^{-1} \mathbf{f}\|_2^2\right)^{-1}\right),$$

la densité *a posteriori* sur la précision sur le bruit de mesure reste donc inchangée.

$$[\tau_f | \mathbf{f}, \alpha_f, \beta_f] \propto \quad (24)$$

$$\mathcal{G}\left(\tau_f; \alpha_f + M, \left(\beta_f^{-1} + \|\mathbf{f}\|_2^2\right)^{-1}\right),$$

où M correspond à la quasi-norme ℓ_0 , soit le nombre d'éléments non nuls du vecteur \mathbf{f} .

$$|\lambda | p, q, \mathbf{f}| \propto \mathcal{B}(\lambda; p + M, q + N - M), \quad (25)$$

le paramètre de parcimonie ne dépend donc que de l'état nul ou non du champ de source.

$$\begin{aligned} [f_i | f_{-i}, \lambda, \mathbf{D}, \mathbf{y}, \tau_f, \tau_n] &\propto \\ (1 - \lambda_i) \mathcal{N}_c(x_i; 0, 0) + \lambda_i \mathcal{N}_c(x_i; \mu_i, \tau_{x_i}^{-1}) \end{aligned} \quad (26)$$

avec

$$\lambda_i = \frac{\tilde{\lambda}_i}{\lambda_i + (1 - \lambda)} \quad (27)$$

$$\tilde{\lambda}_i = \lambda \frac{\tau_x}{\tau_{x_i}} \exp(+\mu_i^H \tau_{x_i} \mu_i) \quad (28)$$

$$\tau_{x_i} = \tau_n \|\mathbf{D}_i^{-1}\|_2^2 + \tau_x \quad (29)$$

$$\mu_i = \|\mathbf{D}_i^{-H} \mathbf{e}_i\|_2 \frac{\tau_n}{\tau_{x_i}} \quad (30)$$

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{y} - (\mathbf{D}^{-1} \mathbf{f} - \mathbf{D}_i^{-1} f_i) \quad (31)$$

où \mathbf{D}_i^{-1} correspond à la i -ième colonne de l'inverse de l'opérateur de structure \mathbf{D} . De même, l'échantillonneur de Gibbs consiste ici à tirer successivement dans ces quatre distributions jusqu'à convergence.

4 Validations numériques

4.1 Synthèse

Pour valider ces méthodes, le champ de déplacement transverse d'une poutre excitée par un point source est synthétisé par ondes forcées [7]. Les paramètres structuraux de l'acier sont choisis pour la simulation, $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, $E = 210 \times 10^9 \text{ Pa}$, $\eta = 4 \times 10^{-3}$, la géométrie est définie avec $b = 2 \times 10^{-2} \text{ m}$, $h = 2 \times 10^{-3} \text{ m}$, la longueur $l = 1 \text{ m}$, avec $N = 100$ points pour l'échantillonnage spatiale, de sorte que $\Delta_x = 10^{-2} \text{ m}$. Ces informations permettent de calculer l'opérateur de structure à l'aide de schémas aux différences finies centrés et décentrés comme présenté en section 2. La force excitatrice est positionnée en $x_0 = 0.40 \text{ m}$, d'amplitude $A = 1 \text{ N}$ et de fréquence $\nu = 412 \text{ Hz}$. Le champ est ensuite bruité avec un rapport signal à bruit (RSB) de 15 dB. La figure 1 montre les parties réelles du champ de déplacement bruité et du champ de source identifié sans régularisation. À ce niveau de bruit, les efforts aberrants ont totalement recouvert l'amplitude réelle du point source.

4.2 Régularisation avec *a priori* gaussien

Pour cet algorithme MCMC, le champ de source est initialisé à zéro, la précision τ_n est initialisée à partir d'un RSB = 30 dB plutôt qu'à 15 dB comme dans la synthèse et la précision des sources est initialisée avec une amplitude de source ponctuelle de 10^{-2} N au lieu de 1 N. Par la suite, un *a priori* de Jeffrey, donc non informatif, est imposé pendant l'échantillonnage sur les précisions (c'est-à-dire $\alpha_n = \alpha_f = 0$ et $\beta_n = \beta_f = +\infty$). Les lois Gamma *a posteriori* sur les précisions ne dépendent alors que de l'information portée par la vraisemblance de sorte que la régularisation soit

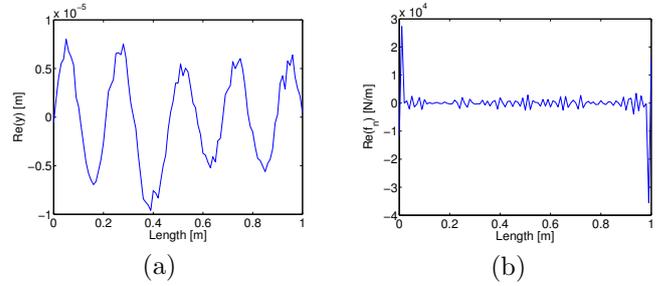


FIGURE 1 – Partie réelle du champ de déplacement transverse analytique et bruité avec un RSB = 15 dB (a), partie réelle du champ de source identifié sans régularisation par la méthode RIFF (b).

totalemment empirique et non supervisée. À chaque itération, de nouveaux échantillons tirés des lois *a posteriori* sont rajoutés aux chaînes des variables correspondantes. Chaque chaîne est divisée en deux états. Le premier correspond au temps de chauffe, la chaîne évolue en étant attirée vers une zone de plus forte probabilité. Le second correspond à la distribution stationnaire, lorsque la chaîne a atteint sa convergence. La figure 2 montre les trois chaînes, qui convergent en une vingtaine d'itérations, ainsi que la partie réelle du champ de source identifié avec ses intervalles de confiance à 90% et 50%. Ce dernier résultat, obtenu à partir des histogrammes des tirages de la chaîne sur \mathbf{f} dans sa zone stationnaire, laisse bien apparaître une source vers 0.4 m et son intégration spatiale sur l'ensemble du domaine donne un effort de 0.98 N.

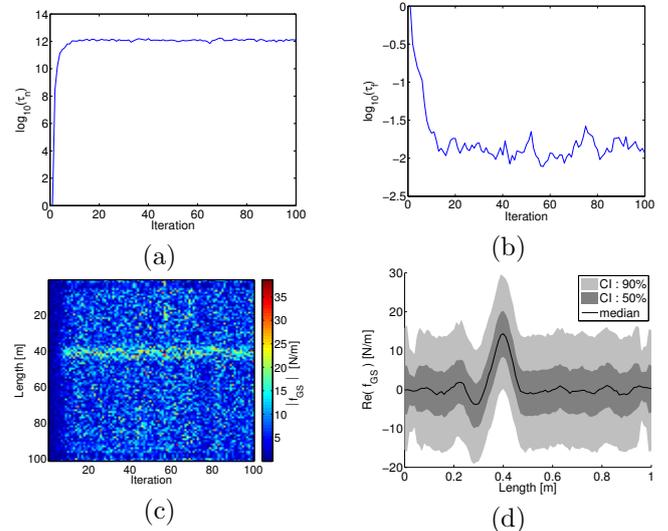


FIGURE 2 – Chaînes des tirages sur τ_n (a), sur τ_f (b), sur \mathbf{f} (c) et champ de source avec intervalles de confiance (d), par MCMC avec *a priori* gaussien.

4.3 Régularisation avec *a priori* de type Bernoulli-Gauss

La convergence de cet algorithme parcimonieux étant beaucoup plus lente que pour l'approche avec *a priori* gaussien, le champ de source et les variances sont directement initialisés sur les résultats présentés en figure 2. Les *a priori* sur les précisions sont ici encore

non informatives, en revanche, les paramètres pilotant la parcimonie sont fixés à $p = 1$ et $q = 10^3$ pour forcer la parcimonie. La figure 3 représente les tirages sur le champ de source \mathbf{f} pour 15×10^3 tirages et montre en fin de chaîne un seul point du maillage de valeur non nul, donc une forte parcimonie de ce champ.

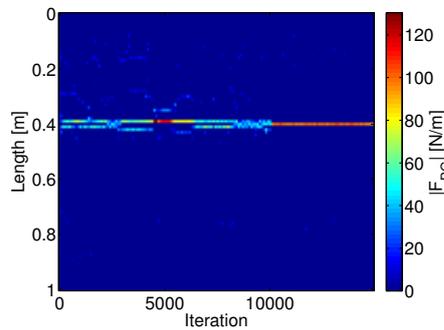


FIGURE 3 – Chaines des tirages sur \mathbf{f} , par MCMC avec *a priori* de type Bernoulli-Gauss.

La valeur médiane des tirages dans la zone convergée est ensuite calculée et comparée au champ initial (figure 2d) ainsi qu'au champ calculé à partir du déplacement non bruité. Ces résultats sont présentés en figure 4. Le résultat Bernoulli-Gauss est ici légèrement plus parcimonieux que le résultat calculé sans bruit de mesure, qui étale légèrement la distribution spatiale de l'effort à cause de la largeur du schéma aux différences finies. L'amplitude de source identifiée est de 1 N précisément. Cet algorithme peut donc identifier des sources ponctuelles même avec un niveau de bruit important.

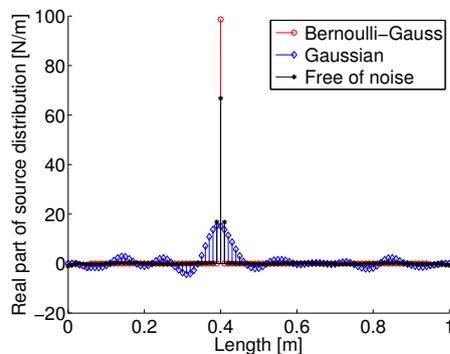


FIGURE 4 – Champ de source à l'état initial (bleu), après convergence de l'algorithme avec *a priori* de type Bernoulli-Gauss (rouge) et champ de source calculé à partir du déplacement non bruité (noir).

5 Validations expérimentales

Pour valider expérimentalement ces approches, une poutre en aluminium de paramètres $\rho = 2700$ kg/m³, $E = 70 \times 10^9$ Pa, $\eta = 1 \times 10^{-3}$, de dimensions $b = 2.96 \times 10^{-2}$ m, $h = 2.9 \times 10^{-3}$ m et $l = 72.25 \times 10^{-2}$ m est suspendue et excitée par un pot vibrant en $x_0 = 37 \times 10^{-2}$ m par un sinus glissant sur la bande [100; 4000] Hz. Un maillage est défini sur une portion de 60 cm à l'aide d'un vibromètre laser, approximativement à 5 cm des limites de la poutre.

Un capteur de force est collé à l'interface entre le pot vibrant et la poutre et sert de mesure de référence. Le schéma de la chaîne d'acquisition est résumé en figure 5. Pour chaque fréquence, l'algorithme avec *a priori*

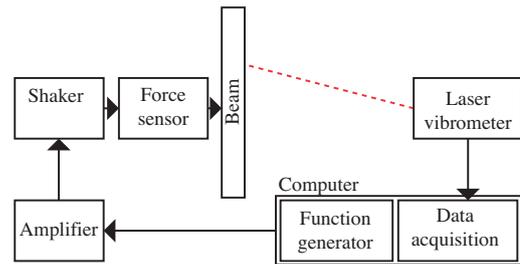


FIGURE 5 – Schéma de la chaîne d'acquisition pour la mesure au vibromètre laser du champ de déplacement d'une poutre excitée par un pot vibrant.

gaussien réalise plusieurs tirages du champ de source. Plutôt que de calculer les histogrammes des tirages convergés pour chaque point de l'espace comme cela a été fait pour passer de la figure 2c à la figure 2d, la stratégie ici est d'intégrer spatialement chacun de ces tirages convergés et les passer en dB pour ensuite en calculer l'historgramme et les intervalles de confiance. La courbe de l'effort injecté en fonction de la fréquence est alors obtenue en répétant cette procédure pour l'ensemble des fréquences, les résultats sont présentés en figure 6. Les courbes de référence et celle calculée par la méthode inverse montrent une bonne corrélation. La courbe de référence est comprise dans l'intervalle à 90% pour la majeure partie des fréquences.

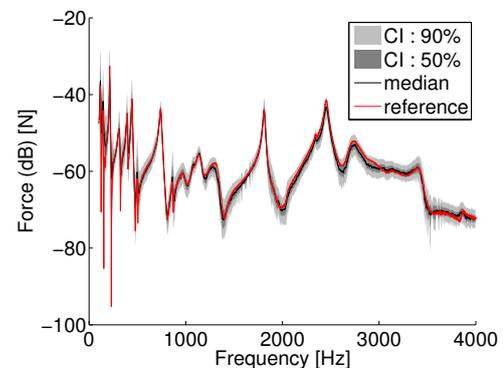


FIGURE 6 – Effort injecté en fonction de la fréquence, par mesure de référence (rouge) et par méthode inverse (noir) ainsi que ses intervalles de confiance (gris).

La convergence des tirages avec *a priori* de type Bernoulli-Gauss n'est pas atteinte avec ce jeu de mesures et ne permet pas de valider expérimentalement cet algorithme ici.

6 Conclusion

Les approches bayésiennes présentées dans ce papier permettent d'améliorer la régularisation de la méthode RIFF en la rendant automatique et non supervisée. Les algorithmes MCMC donnent accès aux distributions des différentes variables aléatoires du problème avec un seul jeu de mesure là où plusieurs campagnes de mesures

seraient nécessaires pour approcher ces distributions. La précision identifiée du bruit donne un indicateur de la qualité de la mesure et les intervalles de confiance sur les sources sont accessibles à la fois sur la distribution spatiale et sur la courbe de niveau en fonction de la fréquence. L'approche parcimonieuse par *a priori* Bernoulli-Gauss présente des résultats intéressants en simulation mais la difficulté à atteindre la convergence rend son utilisation difficile. Des procédures pour accélérer cette convergence sont proposées dans la littérature et devraient être mises en place [18]. Enfin, la caractérisation d'une source industrielle est prévue pour montrer la faisabilité de ces méthodes.

Références

- [1] DU Noiseux. Measurement of power flow in uniform beams and plates. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 47(1B) :238–247, 1970.
- [2] G Pavić. Measurement of structure borne wave intensity, part i : Formulation of the methods. *Journal of Sound and Vibration*, 49(2) :221–230, 1976.
- [3] Karl Hans Bert Janssens, Peter Paul Germain Mas, Peter Akos Gajdatsy, Herman Van Der Auweraer, and Ludo Jean Pierre Gielen. Transfer path analysis, May 20 2014. US Patent 8,731,868.
- [4] Richard H Lyon and RH Lyon. *Statistical energy analysis of dynamical systems : theory and applications*. MIT press Cambridge, 1975.
- [5] BJ Dobson and E Rider. A review of the indirect calculation of excitation forces from measured structural response data. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C : Journal of Mechanical Engineering Science*, 204(2) :69–75, 1990.
- [6] Charles Pezerat. *Méthode d'identification des efforts appliqués sur une structure vibrante, par résolution et régularisation du problème inverse*. PhD thesis, INSA de Lyon, 1996.
- [7] Cédric Renzi. *Identification Expérimentale de Sources vibratoires par Résolution du problème Inverse modélisé par un opérateur Eléments Finis local*. PhD thesis, INSA de Lyon, 2013.
- [8] William M Bolstad. *Introduction to Bayesian statistics*. John Wiley & Sons, 2004.
- [9] Albert Tarantola. *Inverse problem theory and methods for model parameter estimation*. siam, 2005.
- [10] Jérôme Idier. *Bayesian approach to inverse problems*. John Wiley & Sons, 2013.
- [11] Jérôme Antoni. A bayesian approach to sound source reconstruction : optimal basis, regularization, and focusing. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 131(4) :2873–2890, 2012.
- [12] Antonio Pereira. *Acoustic imaging in enclosed spaces*. PhD thesis, INSA de Lyon, 2014.
- [13] M Aucejo and O De Smet. Bayesian source identification using local priors. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2015.
- [14] Steve Brooks, Andrew Gelman, Galin Jones, and Xiao-Li Meng. *Handbook of Markov Chain Monte Carlo*. CRC press, 2011.
- [15] George Casella and Edward I George. Explaining the gibbs sampler. *The American Statistician*, 46(3) :167–174, 1992.
- [16] Sébastien Bourguignon and Hervé Carfantan. Bernoulli-gaussian spectral analysis of unevenly spaced astrophysical data. In *Statistical Signal Processing, 2005 IEEE/SP 13th Workshop on*, pages 811–816. IEEE, 2005.
- [17] Quentin Leclere and Charles Pézerat. Vibration source identification using corrected finite difference schemes. *Journal of Sound and Vibration*, 331(6) :1366–1377, 2012.
- [18] Di Ge, Jérôme Idier, and Eric Le Carpentier. Enhanced sampling schemes for mcmc based blind bernoulli-gaussian deconvolution. *Signal Processing*, 91(4) :759–772, 2011.

Remerciements

Ces travaux sont soutenus par le consortium TESSA, incluant Vibratéc, CEVAA, Pierburg Pump Technology, PSA Peugeot Citroen, Renault, Renault Trucks, Valeo, Sonorhc, CETIM, Centrale-Lyon, INSA-Lyon et l'Université du Maine.