

CFA/VISHNO 2016

**Contrôle passif des vibrations d'une plaque au moyen
d'un trou noir acoustique bidimensionnel avec masse
centrale**

O. Aklouche^a, A. Pelat^b, S. Maugeais^c et F. Gautier^b

^aIRT Jules Verne, Chemin du Chaffault, 44340 Bouguenais, France

^bLAUM / ENSIM, Rue Aristote, 72000 Le Mans, France

^cLMM, Université du Maine, av o messiean, 72000 Le Mans, France

omar.aklouche@univ-lemans.fr



LE MANS

Les vibrations de flexion des structures mécaniques peuvent être réduites au moyen d'un revêtement viscoélastique. Néanmoins, l'ajout de masse induit peut être évité en utilisant un dispositif appelé "trou noir acoustique". Un trou noir acoustique dans une plaque se comporte comme un piège à ondes. Il consiste en une décroissance locale et radiale d'épaisseur selon un profil de loi de puissance. Un film viscoélastique mince est placé dans le centre. Ce film crée localement un amortissement non uniforme qui est ajouté à celui de la structure porteuse, qui est la plaque.

Le but du travail proposé dans ce document est d'étudier le comportement d'un trou noir acoustique en présence d'un oscillateur mécanique attaché à son bord libre intérieur. L'étude consiste en la modélisation analytique de la diffusion des ondes de flexion par ce diffuseur particulier en l'absence du film viscoélastique. La réponse du trou noir est analysée à travers les variations de la section efficace de diffusion, qui est un indicateur de la visibilité d'un obstacle par une onde incidente. Des comparaisons sont effectuées entre le trou noir avec et sans oscillateur. La section efficace de diffusion montre que la présence de l'oscillateur permet de modifier le comportement du trou noir notamment dans la région des basses fréquences, en faisant apparaître une résonance locale qui peut être contrôlée par les caractéristiques du système discret, et éventuellement la coupler à la première résonance du trou noir seul.

1 Position du problème

Le milieu de propagation montré en Fig. 1-(a) est une plaque infinie, d'épaisseur constante h_0 , réalisée dans un matériau viscoélastique, contenant un trou noir acoustique sans revêtement central. Les caractéristiques physiques de cette plaque sont la masse volumique ρ , le module de Young complexe E^* et le coefficient de Poisson ν . Le centre du trou noir coïncide avec l'origine d'un système de coordonnées polaires (r, θ) . Ce trou noir constitue une zone où l'épaisseur décroît graduellement selon la loi de variation présentée dans l'équation (1).

$$h(r) = \begin{cases} h_0 \left(\frac{r-a'}{b-a'} \right)^m, & a < r < b \\ h_0, & r = b \end{cases}, \quad (1)$$

où a' désigne le rayon d'un cercle virtuel, sur lequel l'épaisseur de troncature est nulle. a et b représentent le rayon interne (à la troncature) et le rayon externe respectivement.

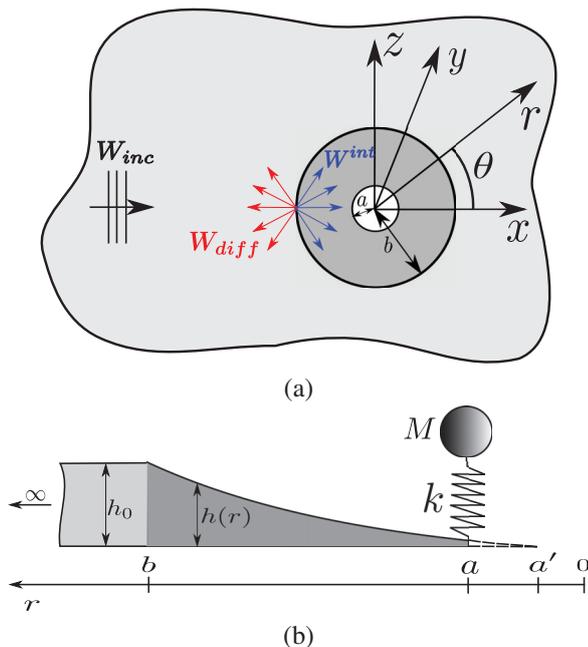


FIGURE 1 – (a) : onde de flexion plane incidente sur un trou noir acoustique, inséré dans une plaque infinie, (b) : insertion d'un oscillateur mécanique au bord du trou noir.

Le trou noir est complété par un oscillateur local :

la région centrale du trou noir contient une masse M , attachée par le biais d'un ressort de raideur k au niveau de la troncature ($r = a$). Tel qu'illustre la figure 1-(b), le système résultant est un système couplé, constitué d'un système continu (plaque) et d'un système discret (masse et ressort).

2 Équations du mouvement

2.1 Vibrations de la plaque inhomogène

On considère une onde de flexion plane harmonique $W_0 e^{ik_f x}$ (W_0 est l'amplitude, k_f est le nombre d'onde de flexion) se propageant dans la direction croissante de x croissant (Fig. 1-(a)). L'équation du mouvement de flexion de la plaque présentant une inhomogénéité d'épaisseur est donnée par [1, 2]

$$(1-\nu)\diamond^4 \{D, W\} - \nabla^2 [D \nabla^2 W] + \rho h \omega^2 W = 0, \quad a < r < b, \quad (2)$$

où D représente la rigidité de flexion, et \diamond est l'opérateur différentiel, donné par

$$\diamond^4 \{D, W\} = \frac{\partial^2 D}{\partial r^2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right] + \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial D}{\partial r} \right]. \quad (3)$$

Dans la région externe du trou noir ($r > b$), où l'épaisseur de la plaque et le nombre d'onde sont constants, Eq. (2) se ramène à $(\nabla^4 - k_f^4) W^{ext} = 0$ pour laquelle le champ du déplacement extérieur W^{ext} est solution. Ce champ extérieur est écrit comme la combinaison d'une onde plane incidente et d'un champ diffusé à l'infini :

$$W^{ext} = W_{inc} + W_{diff}, \quad r > b. \quad (4)$$

Les champs W_{inc} et W_{diff} sont développés sur des fonctions cylindriques associées à chaque ordre circonférentiel n , [3, 4]

$$W_{diff} = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n H_n^{(1)}(k_f \hat{r}) + B_n K_n(k_f \hat{r})] \cos(n\theta), \quad r > b, \quad (5)$$

$$W_{inc} = W_0 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n J_n(k_f \hat{r}) \cos(n\theta), \quad r > b, \quad (6)$$

où J_n , $H_n^{(1)}$ et K_n représentent respectivement la fonction de Bessel de première espèce, la fonction de Hankel de

première espèce et la fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce d'ordre n .

La région interne au trou noir ($a < r < b$) est une zone inhomogène, où l'épaisseur de la plaque et le nombre d'onde varient dans l'espace. Une solution analytique de l'équation (2) peut être trouvée dans le cas d'un trou noir d'épaisseur à profil quadratique ($m = 2$). Cette solution est donnée par [5, 6]

$$W^{int} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=1}^4 [C_{p,n} \hat{r}^{ik_{p,n}r_0}] \cos(n\theta), \quad a < r < b, \quad (7)$$

avec $r_0 = b - a'$, $\hat{r} = r - a'$, et $k_{p,n}$ ($p = 1$ à 4) représentent les quatre nombres d'onde à l'intérieur du trou noir.

2.2 Vibrations de l'oscillateur local

La masse décrite sur la figure 1-(b) est liée au bout du trou noir ($r = a$) par un ressort de raideur k . L'équation gouvernant son mouvement harmonique vertical est, [7]

$$-\omega^2 M W_M = -k (W_M - W^{int}|_{r=a}), \quad (8)$$

où W_M et $W^{int}|_{r=a}$ sont respectivement les déplacements de la masse et de l'extrémité du trou noir en $r = a$. A partir de l'équation (8), une relation entre les deux déplacements peut être déduite :

$$W_M = \left[\frac{k}{-\omega^2 M + k} \right] W^{int}|_{r=a}. \quad (9)$$

2.3 Condition de continuité et conditions aux limites

Les inconnues des champs de déplacement externe et interne (A_n , B_n et $C_{p,n}$) sont déterminées en appliquant des conditions de continuité à l'interface $r = b$ et des conditions aux limites à l'extrémité du trou noir $r = a$. Au niveau de l'interface ($r = b$), le déplacement, la pente, le moment fléchissant et l'effort tranchant sont continues. En l'absence du système masse-ressort ajouté, le moment fléchissant et l'effort tranchant s'annulent à l'extrémité du trou noir $r = a$. Sa présence modifie cette dernière condition, et engendre une force d'inertie égale à l'opposé de l'effort tranchant $V(W^{int})$ à l'extrémité $r = a$. La modification apportée par l'oscillateur ajouté, se traduit par une condition d'impédance en $r = a$:

$$V(W^{int})|_{r=a} = Z \dot{W}^{int}|_{r=a}, \quad (10)$$

où Z est l'impédance mécanique dépendant de la pulsation ω , la masse M et la raideur du ressort k , appliquée en $r = a$:

$$Z = i\omega M \left[\frac{k}{-\omega^2 M + k} \right]. \quad (11)$$

3 Résultats numériques

Les résultats numériques présentés dans ce papier sont obtenus pour une plaque d'aluminium, dont les propriétés géométriques et du matériau sont listées dans le tableau (1).

Matériau	Valeurs	Géométrie	Valeurs
ρ	2700 (kg/m ³)	a'	10 ⁻³ (m)
ν	0.33	a	5.10 ⁻³ (m)
E_0	69 (GPa)	b	6.10 ⁻² (m)
η	10 ⁻³	h_0	1,5.10 ⁻³ (m)
		m	2

TABLEAU 1 – paramètres des simulations numériques.

3.1 Section efficace de diffusion

La section efficace de diffusion est un paramètre important dans l'étude de la réponse d'un obstacle à une onde incidente. Elle est définie comme le rapport entre l'énergie du champ diffusé et l'énergie du champ incident [4]. La section efficace, appelée Q_{diff} , est tracée sur la figure (2) en fonction du nombre d'onde de flexion adimensionnel ($k_f b$) pour le trou noir sans masse. Dans la région des basses fréquences, où la longueur d'onde incidente est grande par rapport à la taille de l'obstacle ($k_f b$ petit), la section efficace est quasiment nulle, ce qui indique que le trou noir n'est pas visible par l'onde incidente dans cette gamme de fréquences. A hautes fréquences, Q_{diff} présente des variations exprimées par des augmentations locales liées aux résonances locales du trou noir. Ces variations locales complexes résultent de la superposition de plusieurs sections efficaces élémentaires Q_n , où n représente l'ordre circonferentiel ($Q_{diff} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n$). Les sections efficaces élémentaires montrent distinctement l'effet de chaque résonance locale du trou noir sur la section efficace globale. Deux sections efficaces de diffusion élémentaires Q_0 et Q_1 , correspondant aux ordres circonferentiels $n = 0$ et $n = 1$, sont montrées dans la figure (3).

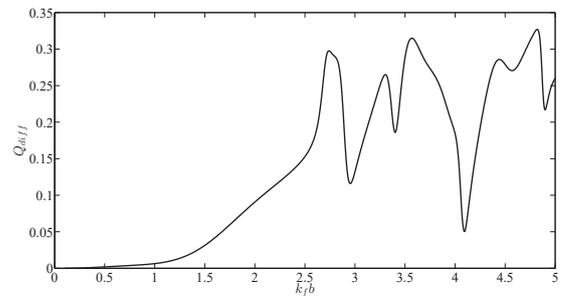


FIGURE 2 – section efficace de diffusion du trou noir acoustique simulé seul (sans oscillateur ajouté).

3.2 Influence de l'oscillateur ajouté

Dans cette section, les variations de la section efficace de diffusion Q_{diff} sont analysées, via une étude paramétrique, en fonction de la masse ajoutée Fig. 4-(a). L'effet de la masse sur les différentes résonances locales du trou noir est observé sur l'évolution des sections efficaces de diffusion élémentaires Q_0 et Q_1 . Ces deux sections efficaces élémentaires sont tracées sur la figure 4-(a) et (b) en fonction du nombre d'onde adimensionnel $k_f b$. Dans la région des basses fréquences, les sections Q_0 et Q_1 montrent que l'ajout de l'oscillateur fait apparaître un pic de résonance du système couplé, qui est contrôlé par les caractéristiques du système discret (M et k). A hautes fréquences, les résonances

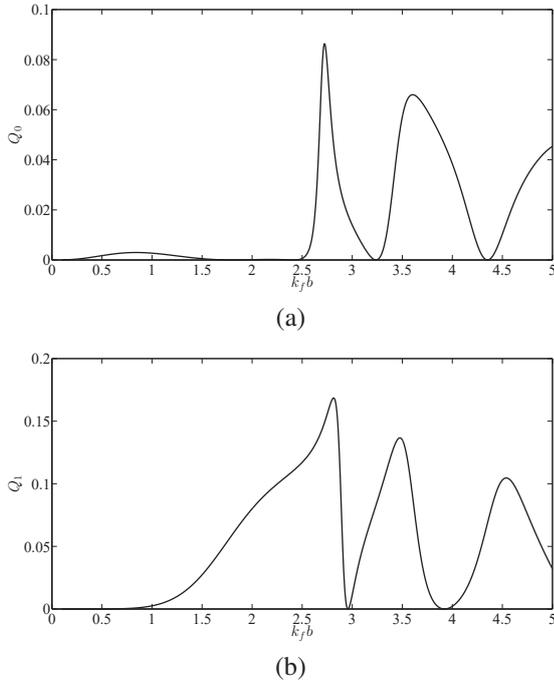


FIGURE 3 – exemple de sections efficaces de diffusion élémentaires du trou noir seul, calculées pour les ordres circonférentiels $n = 0$ et $n = 1$. (a) et (b) respectivement.

locales du trou noir sont décalées vers les basses fréquences en présence de l'oscillateur : les pics se décalent de plus en plus vers les basses fréquences en augmentant la masse. Ces tendances se retrouvent pour toutes les Q_n , ce qui permet de tirer les mêmes conclusions sur l'effet de la masse ajoutée sur la variation de la section efficace globale Q_{diff} .

3.3 Modes piégés

Par définition, les modes piégés sont les solutions d'un problème homogène, donné dans le cas du système étudié par l'équation matricielle

$$S.X = 0, \quad (12)$$

où S est la matrice définie à partir des conditions de continuité et des conditions aux limites. Les valeurs propres de Eq. (12) sont déterminées numériquement dans le plan complexe k_fb en localisant les zéros du déterminant de la matrice S . Les déformées modales sont obtenues à partir des vecteurs propres X associés aux valeurs propres trouvées.

La figure (5) montre les patterns du premier mode piégé fondamental ($n = 0$), calculé pour le trou noir seul (Fig. 5-(a)) et le trou noir couplé avec une masse de 3 grammes (Fig. 5-(b)). Ces deux patterns se produisent à des valeurs complexes de k_fb : $k_fb = 2.71 - i0.07$ et $k_fb = 2.24 - i0.02$. Comme prédit par la section efficace de diffusion Q_0 (Fig. 4-(b)), le premier mode piégé se décale vers les basses fréquences. Ce décalage est visible sur la partie réelle du k_fb pour lequel ce mode se produit : $\Re[k_fb] = 2.71$ en l'absence de la masse, et passe à $\Re[k_fb] = 2.24$ avec une masse de 3 grammes. Le rapport de la partie imaginaire et la partie réelle de ce k_fb nous renseigne sur l'amortissement du mode : le mode se prononce beaucoup plus lorsque $\left(\frac{\Im[k_fb]}{\Re[k_fb]}\right)$ est faible en valeur absolue.

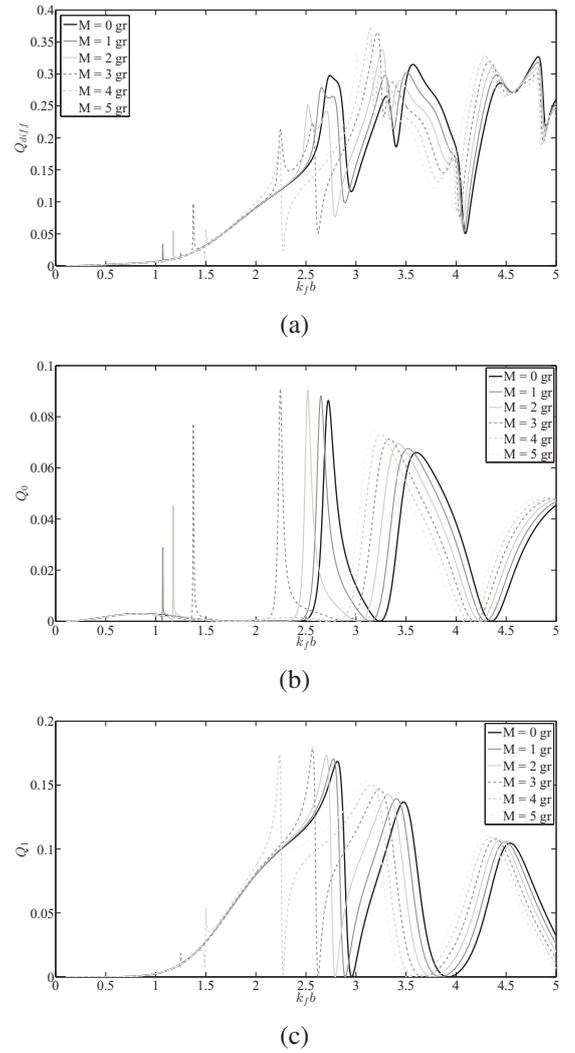


FIGURE 4 – (a) : section efficace de diffusion globale du trou noir acoustique étudié en fonction de la masse ajoutée. Deux sections efficaces élémentaires sont présentées : (b) et (c) correspondent à Q_0 et Q_1 respectivement. Ces courbes sont calculées pour une pulsation de résonance du système masse-ressort fixée $\omega_0 = \sqrt{k/M}$. La raideur k du ressort utilisée pour la simulation numérique est donc donnée par la relation $k = M\omega_0^2$.

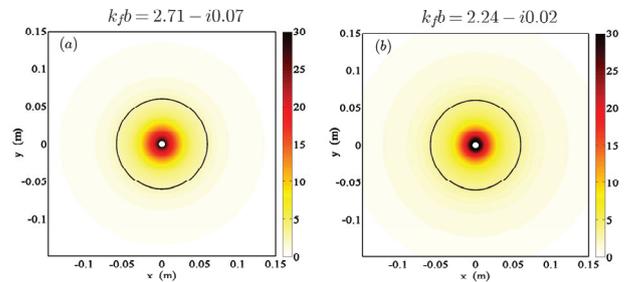


FIGURE 5 – deux modes piégés sont présentés en dB. (a) : trou noir sans masse ajoutée, (b) : trou noir avec une masse de 3 grammes.

4 Conclusions

Un modèle analytique de la diffusion des ondes de flexion par un trou noir acoustique, couplé à un système

masse-ressort est présenté dans ce papier. Le comportement de ce trou noir est étudié en analysant les variations de la section efficace de diffusion en fonction de la fréquence. Les résultats montrent que le trou noir sans masse est un diffuseur pénétrable résonant à hautes fréquences. Il est montré qu'il est possible de modifier ce comportement en attachant une masse à l'extrémité libre du trou noir : la présence de la masse crée une résonance locale à basses fréquences caractérisée par l'augmentation de la section efficace de diffusion, et permet de contrôler les modes du système couplé. Cette étude a montré que les modes piégés du trou noir sont décalés vers les basses fréquences lorsque la masse augmente.

Remerciement

Ce papier constitue une partie du travail de thèse de doctorat d'Omar AKLOUCHE, qui se déroule au Laboratoire d'Acoustique de L'université du Maine (LAUM). Les auteurs tiennent à remercier l'Institut de Recherche Technologique Jules Verne (IRT JV) qui a financé cette thèse, et remercient également les partenaires industriels et académiques qui ont participé et assuré le bon déroulement du projet VIBROLEG dans lequel cette thèse s'inscrit.

Références

- [1] A. Leissa, *Vibration of Plates*, N70-18461, NASA, 1969.
- [2] H. Conway, Some special solutions for the flexural vibration of discs of varying thickness, *Archive of Applied Mechanics* 26 (6) (1958) 408–410.
- [3] C. Mow, Y. Pao, *The diffraction of elastic waves and dynamic stress concentrations*, Taylor and Francis Group, 1973.
- [4] A. Norris, C. Vemula, Scattering of flexural waves on thin plates, *Journal of sound and vibration* 181 (1) (1995) 115–125.
- [5] O. Aklouche, A. Pelat, S. Maugeais, F. Gautier, Scattering of flexural waves by a pit of quadratic profile inserted in an infinite thin plate, *Journal of Sound and Vibration* (2016) JSV-D-15-01071R1.
- [6] O. Aklouche, A. Pelat, S. Maugeais, F. Gautier, Scattering of flexural waves from an acoustic black hole in an infinite thin plate, *Medyna* 2013, Marrakech 23–25 april 2013.
- [7] M. Géradin, D. Rixen, *Théorie des vibrations : application à la dynamique des structures*, Vol. 2, Masson Paris, 1993.