

Hiérarchisation de modèles mal conditionnés lors des problèmes inverses en acoustique

M. Griveaux et V. Martin

Institut Jean Le Rond d'Alembert, case 162, 4, Place Jussieu, 75005 Paris, France
vincent.martin@upmc.fr

Les problèmes inverses en acoustique s'appuient sur un modèle de propagation et sur des données de champs sonores mesurées. En fait, les modèles sont en général mal connus et ils sont définis *a priori*. Cependant, on peut espérer effectuer les traitements avec des modèles de diverses formes et tenter d'identifier le mieux adapté aux données disponibles. Pour ce faire, il faut disposer d'un moyen de hiérarchisation. L'interprétation géométrique des traitements au sens des moindres carrés fournit un angle adapté à cette fin. Le travail a déjà été effectué sur des modèles bien conditionnés. L'exposé d'aujourd'hui montre que des modèles mal conditionnés peuvent eux aussi être hiérarchisés. En effet, il a déjà été démontré que l'angle en question ne dépend pas de la régularisation et il était donc attendu que celle-ci influence la qualité du résultat de l'inversion mais non pas la capacité des modèles à plus ou moins bien révéler les vraies propagations. Les simulations numériques vérifient bien cette attente et apportent ainsi une information complémentaire importante.

1 Introduction

Les problèmes inverses en acoustique reposent souvent sur la connaissance de pressions mesurées par un réseau de microphones et d'un modèle de propagation des sources aux microphones, en d'autres termes, des fonctions de transfert entre les sources considérées et le réseau de microphones. Dès lors, les inconnues de ce type de problème sont les commandes appliquées (un débit ou une vitesse) aux sources qui sont à l'origine des pressions acquises.

Il a été démontré [1] que l'interprétation géométrique de problèmes inverses donne accès à un outil de hiérarchisation dans le cadre de modèles bien conditionnés et que ce dernier ne dépend pas en théorie de la régularisation [2]. Il faut alors vérifier pratiquement que la régularisation de modèles mal conditionnés ne modifie pas leur hiérarchisation.

Cette vérification fera l'objet de cet exposé où dans un premier temps, un cas simple sera étudié puis dans un second temps, une situation plus complexe sera abordée. Ce développement se terminera en mettant en relief l'outil géométrique présenté.

2 Contexte

On envisage les configurations dites sobres (cf. Fig.1, Fig.2 et Fig.4), car constituées de peu de sources et de microphones, ici, dans un demi-espace limité par une paroi rigide. Les modèles de propagation sont inexacts car le type des sources (monopôle ou dipôle avec une orientation fixe) n'est pas connu, et certains car leurs paramètres sont connus (célérité, position des sources, etc.) [1].

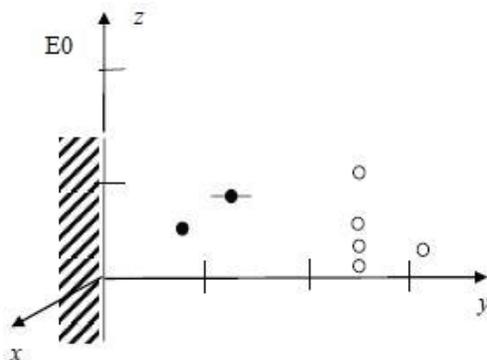


Figure 1: Modèle sobre de référence.

Le problème direct de telles configurations est défini comme suit :

$$p = Ev \quad (1)$$

où p est un vecteur de dimension m et v de dimension n . Quant à E , il s'agit d'une matrice de dimensions $m.n$.

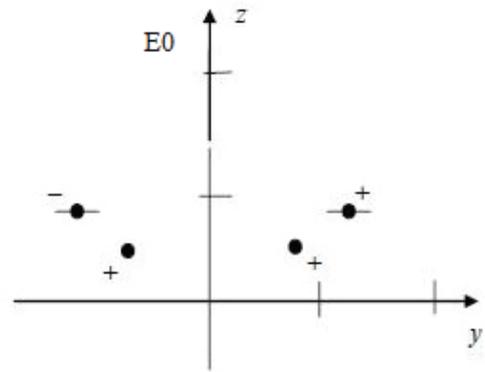


Figure 2: Modèle sobre de référence équivalent dans un espace non borné.

Le problème inverse de tel système est en général surdimensionné puisque $m > n$ (le nombre d'équations est supérieur au nombre d'inconnues). Ce système peut être résolu par une minimisation au sens des moindres carrés [3,4]:

$$\min_v \|Ev - p\|^2 \quad (2)$$

dont la solution est [3]:

$$v_{opt} = (E^*E)^{-1}E^*p = E^\dagger p \quad (3)$$

où E^* et E^\dagger sont respectivement la transposée conjuguée et la pseudo-inverse de la matrice E .

La hiérarchisation s'appuie sur un angle Ψ obtenu via l'interprétation géométrique du problème inverse (cf. Fig.3), ainsi défini :

$$\cos \psi = \frac{\|\hat{p}\|}{\|p\|} = \frac{\|EE^\dagger p\|}{\|p\|} \quad (4)$$

où \hat{p} est la projection de p dans l'espace des pressions que la matrice E est capable d'engendrer.

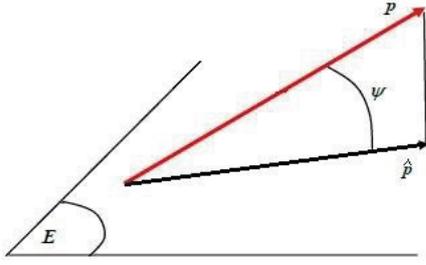


Figure 3: Visualisation géométrique du problème inverse.

Il a déjà été démontré [1,2] que la hiérarchisation de modèles sobres, certains mais inexacts dû à la non connaissance du type des sources dans le cas de problèmes bien conditionnés est possible grâce à cet angle Ψ . En effet, celui-ci rend accessible une relation d'ordre entre les différentes configurations à comparer.

3 Cas d'un modèle sobre

Le modèle de référence est constitué de 2 sources: - un dipôle et un monopôle, - d'une paroi réfléchissante et d'un réseau de 5 microphones. Les différentes configurations à hiérarchiser (avec les sources images qui simulent la paroi réfléchissante) et la situation de référence sont représentées Fig.1, Fig.2 et Fig.4.

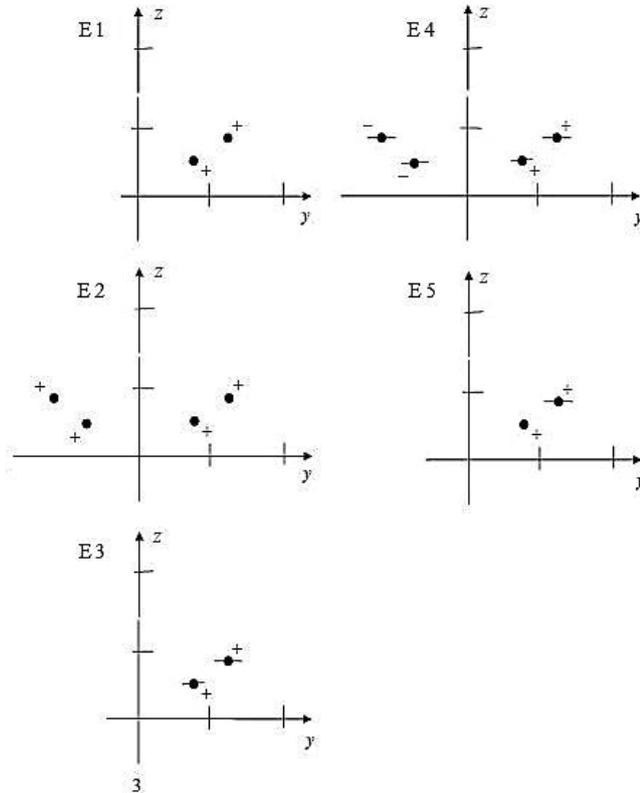


Figure 4: Modèles sobres à hiérarchiser.

Il est ici admis, que la seule inexactitude se situe au niveau du type des sources: monopôle ou dipôle orienté selon l'axe (Oz). Les modèles adoptés, sont identiques à ceux utilisés dans [1] à la différence près, que les sources ont été rapprochées afin d'obtenir des problèmes mal conditionnés. La régularisation d'un modèle s'effectue en

contrôlant par un paramètre ε le résultat recherché lors de la minimisation de la distance entre la pression mesurée et son estimation :

$$\min_v \|Ev - p\|^2 + \varepsilon \|v\|^2 \quad (5)$$

dont la solution est :

$$v_{opt} = (E^*E + \varepsilon I)^{-1}E^*p \quad (6)$$

Ce paramètre ε optimal est défini comme étant le minimum de la courbure de la courbe représentant $\log\|v\|^2$ en fonction de $\log\|Ev - p\|^2$ [5].

Après régularisation, le modèle E_ε [2] est défini par:

$$E_\varepsilon = U\Lambda_\varepsilon V^* \quad (7)$$

Les matrices U et V sont obtenues par décomposition en valeurs singulières de E i.e. $E=U\Lambda V^*$ [5]. De même, en sachant que

$$\Lambda_\varepsilon^\dagger = (\Lambda^* \Lambda + \varepsilon I_n)^{-1} \Lambda^* \quad (8)$$

est une matrice $n.m$ diagonale sur les n premières lignes, on en déduit que Λ_ε est une matrice $m.n$ dont les valeurs singulières sont les inverses de celles de $\Lambda_\varepsilon^\dagger$.

L'angle ψ_ε est défini à partir du modèle régularisé tel que

$$\cos \psi_\varepsilon = \frac{\|E_\varepsilon E_\varepsilon^\dagger p\|}{\|p\|} \quad (9)$$

Il est alors remarquable que ψ_ε ne dépend pas de ε [2]. La démarche suivie reste identique à [1], où, à partir de divers débits nominaux (centrés autour d'une valeur de référence arbitraire), des pressions sont engendrées par le modèle de référence. La pression acquise au microphone M est de la forme [6]

$$p(M) = -i\rho\omega q_m \left(\frac{e^{-ikr'_m}}{4\pi r'_m} + \frac{e^{-ikr_m}}{4\pi r_m} \right) - k^2 \rho c d q_d \left[\cos \theta \left(1 - \frac{i}{kr_d} \right) \frac{e^{-ikr_d}}{4\pi r_d} - \cos \theta' \left(1 - \frac{i}{kr'_d} \right) \frac{e^{-ikr'_d}}{4\pi r'_d} \right] \quad (10)$$

où ρ est la densité de l'air, ω la pulsation, k le nombre d'onde, c la vitesse du son, d la distance entre les 2 pôles du dipôle considéré, q_m et q_d le débit respectivement du monopôle et du dipôle considéré, r_m et r_d la distance de la source (monopôle respectivement dipôle) au microphone M , r'_m et r'_d la distance de la source image (monopôle respectivement dipôle) au microphone M , θ est l'angle entre l'axe du dipôle et le vecteur entre le dipôle et le microphone M et θ' est l'angle entre l'axe du dipôle image et le vecteur entre le dipôle image et le microphone M .

Chacune de ces pressions correspond à un test i.e., le calcul d'un Ψ pour la pression considérée. La hiérarchisation des modèles peut être obtenue par un seul essai mais, afin de consolider le propos, le choix d'exécuter plusieurs essais sembla approprié. La régularisation des modèles ainsi effectuée ne modifie d'aucune façon la hiérarchisation préalablement réalisée (cf. Fig.5 et Fig.6). La relation d'ordre est conservée i.e. la configuration $E1$ est

la plus proche de la situation de référence $E0$ tandis que le modèle $E4$ est le plus éloigné.

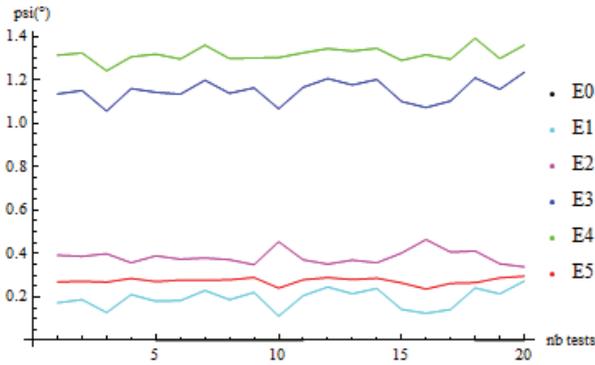


Figure 5: Hiérarchisation des modèles sobres avant régularisation.

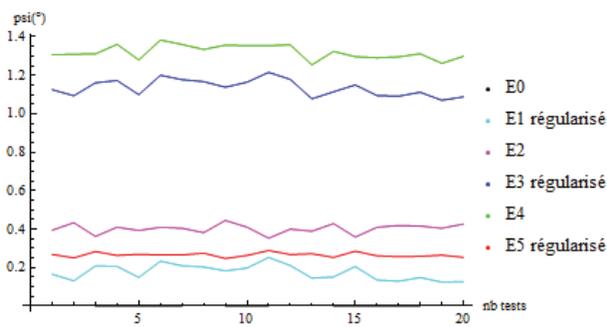


Figure 6: Hiérarchisation des modèles sobres après régularisation.

4 Cas d'un modèle plus complexe

Le modèle adopté ici, est composé de 10 sources (cf. Fig.7) et d'un réseau de 20 microphones (cf. Fig.8). Les sources sont 3 dipôles orientés selon (Oy), 4 monopôles et 3 dipôles orientés selon (Oz). On utilise 2 commandes de même ordre de grandeur : une pour les dipôles et une autre pour les monopôles (pour les modèles à hiérarchiser, 2 commandes sont également utilisées : une pour les 3 premières et les 3 dernières sources, et une autre pour les 4 sources centrales).

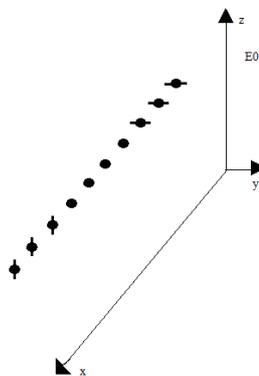


Figure 7: Modèle de référence – Sources.

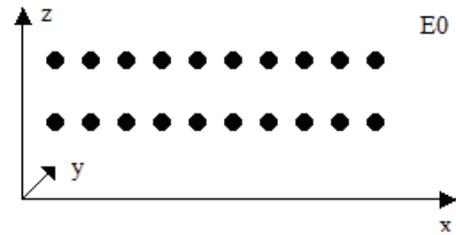


Figure 8: Modèles de référence - Réseau de microphones.

La hiérarchisation pré et post-régularisation de divers modèles (cf. Fig.9) est également conservée dans ce cas plus complexe, comme en témoignent les simulations (cf. Fig.10 et Fig.11). Le modèle $E1$ est le plus proche de la situation de référence $E0$ tandis que la configuration $E3$, composée de 10 dipôles orientés selon (Oz), est la plus éloignée.

Pour interpréter ces résultats, une réflexion possible est la suivante. Le rayonnement dans le modèle de référence est principalement dû aux 3 dipôles orientés selon (Oy) et les 4 monopôles, i.e. les 7 premières sources à partir de l'origine du repère (cf. Fig.7). En effet, les dipôles orientés selon (Oz) rayonnent peu dans la direction du réseau de microphones, contrairement aux autres sources. $E3$ est le modèle le plus aberrant car aucune source ne peut rayonner notablement dans la direction des microphones. Le modèle $E4$ est le plus proche de la situation de référence. Ce résultat est compréhensible car l'agencement des sources entre les 2 modèles est quasiment analogue (2 monopôles remplacent respectivement un dipôle orienté selon (Oy) et un autre orienté selon (Oz)). Quant aux modèles $E1$ et $E2$, l'ensemble des sources (vu par le réseau de microphones) peuvent rayonner significativement, ce qui présentement, est un inconvénient. En effet, pour se rapprocher de la configuration de référence les 3 dernières sources doivent rayonner peu dans la direction des microphones tandis que les 7 autres doivent rayonner. Ces 2 configurations ont en commun le rayonnement possible des sources centrales. Le modèle $E1$ est plus proche de $E0$ que ne l'est $E2$, car $E1$ est également constitué de 4 monopôles centraux.

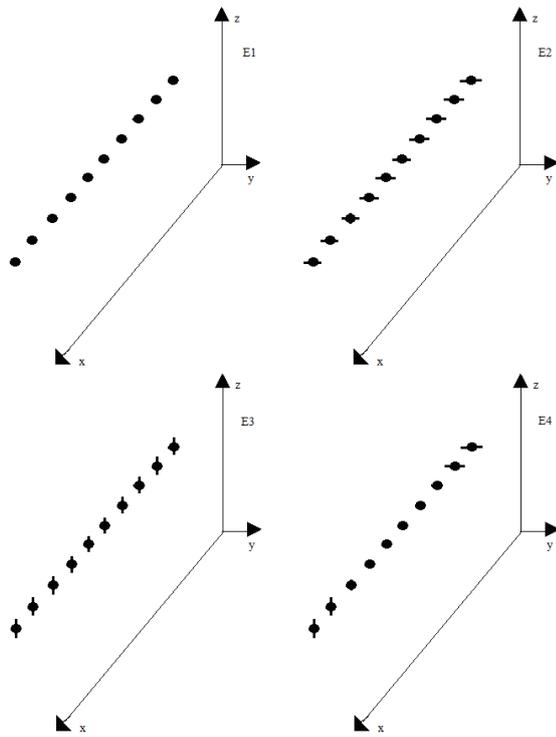


Figure 9: Modèles à hiérarchiser.

5 Bilan de la vérification

Dès lors, la régularisation n'affecte pas le modèle considéré mais contrôle uniquement la vitesse engendrée comme le soulignent les 2 précédentes modélisations. La régularisation intervient dans l'espace des solutions mais pas dans celui des objectifs.

Au-delà, du développement mené jusqu'à présent, le potentiel de cet angle Ψ est particulièrement prometteur. En effet, il a été vérifié que la hiérarchisation par cet angle Ψ de modèles sobres, inexacts et incertains est conservée après l'adaptation d'un paramètre (la célérité en l'occurrence).

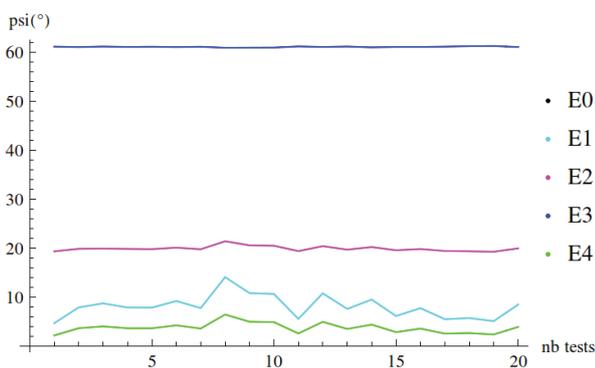


Figure 10: Hiérarchisation des modèles plus complexes avant régularisation.

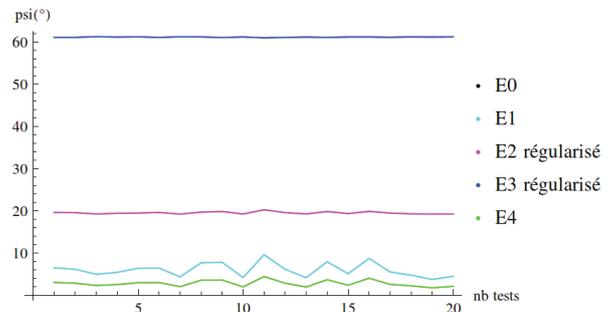


Figure 11: Hiérarchisation des modèles plus complexes après régularisation.

6 Conclusion

De cet exposé, 2 éléments sont à retenir. Dans un premier temps, il s'est avéré qu'un modèle inexact (de mauvaise forme) mais certain (de paramètres parfaitement connus), qu'il soit sobre ou plus complexe et mal conditionné n'est pas modifié fondamentalement dans sa forme par sa régularisation. Celle-ci, contrôle les solutions obtenues, via l'accroissement des valeurs singulières [5], mais ne change pas structurellement le modèle. Dans un second temps, cet angle Ψ , dont la définition est acquise par une approche géométrique du problème inverse, permet finalement de hiérarchiser des modèles inexacts et certains. Par ailleurs, les travaux menés actuellement, dont l'adaptation de l'ensemble des paramètres d'un modèle, peuvent laisser présager que cet angle permettra de trouver la modélisation la plus fine de la réalité. Après hiérarchisation et disposant donc d'un modèle le mieux adapté à la pression mesurée, l'étape suivante consiste à qualifier la qualité des vitesses des sources obtenues après inversion.

Références

- [1] V. Martin, J.R.F. Arruda, P.A.G. Zavala, Ranking of uncertain models in presence of erroneous objectives in inverse acoustic problems, *11th International Conference on Vibration Problems*, Lisbon (2013).
- [2] V. Martin, The fundamental elements in certain inverse acoustic problems: their roles and interactions, *J. Braz. Soc. Mech. Sci. & Eng.* vol.34 no.spe2, Rio de Janeiro (2012).
- [3] V. Martin, *Eléments d'acoustique générale*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne (2007).
- [4] G. Strang, *Linear algebra and its application*, third edition, Wellesley-Cambridge Press (1988).
- [5] P. C. Hansen, *Rank-Deficient and Discrete ill-Posed Problems, Numerical Aspects of Linear Inversion*, Society for Industrial and Applied Mathematics (1998).
- [6] P. M. Morse, K. U. Ingard, *Theoretical Acoustics*, McGraw-Hill, New-York (1968).