



Modèle analytique pour le calcul de la transmission sonore à travers un cylindre poro-élastique

J. Magniez^a, M.A. Hamdi^a, J.-D. Chazot^a et B. Troclet^b

^aUniversité de Technologie de Compiègne, Rue du Dr Schweitzer, 60200 Compiègne, France

^bEADS Astrium ST, 51-61 Route de Verneuil, 78130 Les Mureaux, France
julien.magniez@utc.fr

Ce papier présente une solution analytique tridimensionnelle en coordonnées cylindriques des équations de Biot. Cette solution est déterminée à partir des équations de Biot mixtes en déplacement-pression. Une formulation exacte des champs de déplacement et de contrainte, décomposés sur les harmoniques cylindriques, est présentée. La solution proposée est utilisée pour le calcul de la transmission acoustique à travers une structure cylindrique présentant un revêtement poro-élastique. Une très bonne concordance est observée entre les résultats obtenus avec cette solution et ceux obtenus avec un modèle éléments finis.

1 Introduction

Les structures cylindriques multicouches sont très utilisées dans les domaines de l'aéronautique et de l'aérospatiale. On les trouve dans de nombreuses applications telles que les lanceurs spatiaux ou les avions. Ces structures, généralement conçues pour être aussi légères que possible, doivent également prendre en compte le problème de la transmission intérieure du bruit. En effet, la protection contre le bruit est toujours nécessaire dans de telles applications, que ce soit pour le confort des passagers ou pour la protection de la charge utile embarquée. Par conséquent, la transmission sonore à travers les structures cylindriques multicouches doit être étudiée précisément.

Afin d'augmenter le confort acoustique de manière significative, ces structures sont généralement recouvertes de matériaux poro-élastiques, que l'on trouve sous différentes formes : mousses, laines, feutres ou encore mousses métalliques. Constitués d'un squelette solide comportant des pores remplis d'air, ils permettent une bonne absorption de l'énergie acoustique.

De nombreux travaux ont été réalisés afin de modéliser le comportement de ces matériaux poro-élastiques. La littérature révèle d'ailleurs un très grand nombre de publications à ce sujet. Néanmoins, l'état de l'art montre qu'il existe principalement deux approches pour les modéliser : les modèles dits de fluide équivalents, et le modèle de Biot [1].

Dans le cas des modèles fluides équivalents, le matériau poro-élastique est modélisé comme un fluide dont les propriétés sont modifiées par la présence du squelette. Parmi eux, on trouve des modèles empiriques, dont le plus connu est celui de Delany & Bazley [2]. Des modèles théoriques de fluides équivalents ont également été développés. L'un des plus simples à mettre en oeuvre est le modèle à squelette rigide. Ce type de modèle prend en compte les effets visqueux et thermiques dus au squelette, tout en considérant ce dernier comme parfaitement rigide. Une autre possibilité est de considérer à l'inverse le squelette avec une rigidité nulle mais prenant en compte les effets inertiels de la phase solide : on parle alors de modèle Limp. Ce type de modèle est particulièrement adapté pour les matériaux souples tels que les laines.

Dans le cas du modèle de Biot, le mouvement du squelette est pris en compte à travers les équations de l'élasto-dynamique. Ce modèle fondamental, développé par Biot en 1956, voit le matériau poro-élastique comme la superposition de deux phases solides et fluides couplées. Ainsi, le modèle prend en compte les composantes cinématiques et dynamiques (déplacements et contraintes) des deux phases solides et fluides.

Les modèles de fluides équivalents sont régulièrement utilisés car ils donnent, dans certains cas, des résultats intéressants. Leur rapidité de mise en oeuvre est également appréciée. Cependant, dans de nombreuses applications,

le squelette est soumis à des vibrations et subit des déformations : c'est notamment le cas lorsque le matériau est précontraint ou lorsque celui-ci est soumis à une excitation mécanique. Dans ce cas, les modèles fluides équivalents ne sont plus adaptés et la théorie de Biot est alors susceptible d'être employée.

La transmission acoustique à travers des structures multicouches avec un revêtement poro-élastique est un bon exemple de cas où le squelette entre en vibrations. Des travaux ont été publiés sur la transmission sonore à travers des parois planes, en utilisant le modèle de Biot en déplacement [3] et en déplacement-pression [4]. En revanche, la transmission sonore à travers une structure cylindrique avec un revêtement poro-élastique modélisé avec la théorie de Biot n'a fait l'objet d'aucune publication à notre connaissance.

L'objectif de ce papier est de présenter une solution analytique des équations de Biot mixtes en coordonnées cylindriques. Le modèle sera ensuite utilisé afin de prédire la transmission sonore à travers une structure cylindrique présentant un revêtement poro-élastique. Nous présenterons tout d'abord les équations de Biot modifiées que nous décomposerons en la somme d'un potentiel scalaire et d'un potentiel vecteur. Après avoir déterminé ces deux potentiels, nous en déduirons la forme du champ de déplacement et du champ de contrainte dans le matériau. Enfin, le modèle sera validé par comparaison avec un modèle éléments finis.

2 Formulation des équations de Biot mixtes

Les équations de Biot classiques en déplacement, faisant intervenir simultanément le déplacement du squelette et de la phase fluide s'écrivent [5] :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^s = (\rho_{11} \ddot{\mathbf{U}}^s + \rho_{12} \ddot{\mathbf{U}}^f) + \tilde{b} (\dot{\mathbf{U}}^s - \dot{\mathbf{U}}^f), \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^f = (\rho_{12} \ddot{\mathbf{U}}^s + \rho_{22} \ddot{\mathbf{U}}^f) + \tilde{b} (\dot{\mathbf{U}}^f - \dot{\mathbf{U}}^s), \quad (2)$$

où \mathbf{U}^s et \mathbf{U}^f sont respectivement le champ de déplacement de la phase solide (squelette) et de la phase fluide. Les termes $\dot{\mathbf{U}}$ et $\ddot{\mathbf{U}}$ représentent respectivement les champs de vitesse et d'accélération. Les masses volumiques apparentes ρ_{11} , ρ_{12} et ρ_{22} s'expriment en fonction de la masse volumique du matériau constituant le squelette ρ_s et de la masse volumique du fluide interstitiel ρ_f :

$$\rho_{12} = (1 - \alpha_\infty) \phi \rho_f, \quad (3)$$

$$\rho_{11} = (1 - \phi) \rho_s - \rho_{12}, \quad (4)$$

$$\rho_{22} = \phi \rho_f - \rho_{12} = \alpha_\infty \phi \rho_f, \quad (5)$$

avec ϕ la porosité du matériau poreux et α_∞ la tortuosité. Le terme \tilde{b} est un coefficient traduisant les effets de dissipation visqueuse dans le matériau poreux. En utilisant

la formulation de Johnson *et al.* et avec une convention temporelle en $e^{-i\omega t}$ il s'exprime [5] :

$$\tilde{b} = \sigma\phi^2 \sqrt{1 - i\omega \frac{4\alpha_\infty^2 \rho_f \eta_f}{\phi^2 \sigma^2 \Lambda^2}}, \quad (6)$$

avec η_f la viscosité dynamique du fluide interstitiel, σ la résistivité et Λ la longueur caractéristique visqueuse. Enfin, σ^s et σ^f sont les tenseurs des contraintes dans les phases solide et fluide respectivement, et sont définis par :

$$\sigma^s = \left[(P - 2\mu) \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^s) + Q \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^f) \right] \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}^s, \quad (7)$$

$$\sigma^f = (-\phi p) \mathbf{I} = \left[Q \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^s) + R \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^f) \right] \mathbf{I}, \quad (8)$$

où p correspond à la pression interstitielle dans les pores du matériau poreux, μ au module de cisaillement (deuxième coefficient de Lamé) du squelette sous vide et $\boldsymbol{\varepsilon}^s$ (respectivement $\boldsymbol{\varepsilon}^f$) au tenseur des déformations dans la phase solide (respectivement fluide). De plus, \mathbf{I} correspond à la matrice identité et P , Q et R sont les coefficients élastiques classiques utilisés dans la théorie de Biot. Pour la plupart des matériaux poro-élastiques, le squelette est beaucoup plus souple que le matériau dont il est constitué. On a alors [5] :

$$P = (\lambda + 2\mu) + \frac{(1 - \phi)^2}{\phi} K_f, \quad (9)$$

$$Q = (1 - \phi) K_f, \quad (10)$$

$$R = \phi K_f. \quad (11)$$

Ces coefficients sont reliés à λ , le premier coefficient de Lamé du squelette sous vide, et à K_f , le module d'élasticité isostatique du fluide interstitiel. Les dissipations thermiques dans le fluide interstitiel sont prises en compte à travers le terme K_f grâce au modèle de Champoux-Allard ([5]) :

$$K_f = \frac{\gamma_f P_0}{\gamma_f - (\gamma_f - 1) \left(1 - \frac{8\eta_f \sqrt{1 - i\rho_f \frac{\text{Pr}\Lambda^2\omega}{16\eta_f}}}{i\Lambda^2 \text{Pr}\omega\rho_f} \right)^{-1}}, \quad (12)$$

avec γ_f le rapport des chaleurs spécifiques, P_0 la pression atmosphérique, Pr le nombre de Prandtl et Λ' la longueur caractéristique thermique.

En suivant la méthode présentée par Hamdi *et al.* [6], les équations de Biot en déplacement (1) et (2) peuvent se réécrire sous une forme mixte faisant intervenir le déplacement de la phase solide \mathbf{U}^s et la pression interstitielle p , à partir de l'élimination du déplacement de la phase fluide \mathbf{U}^f . Avec une convention temporelle $e^{-i\omega t}$ ces équations s'écrivent [6] :

$$\tilde{\rho}\omega^2 \mathbf{U}^s + \nabla \cdot (\hat{\boldsymbol{\sigma}}^s - \alpha\phi p \mathbf{I}) + \beta \nabla(\phi p) = 0, \quad (13)$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\tilde{\rho}_{22}\omega^2} \nabla(\phi p) - \beta \mathbf{U}^s \right) + \frac{\phi p}{R} + \alpha \nabla \cdot \mathbf{U}^s = 0, \quad (14)$$

où les masses volumiques effectives suivantes ont été introduites :

$$\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_{11} - \frac{(\tilde{\rho}_{12})^2}{\tilde{\rho}_{22}}, \quad (15)$$

$$\tilde{\rho}_{11} = \rho_{11} - \frac{\tilde{b}}{i\omega}, \quad (16)$$

$$\tilde{\rho}_{22} = \rho_{22} - \frac{\tilde{b}}{i\omega}, \quad (17)$$

$$\tilde{\rho}_{12} = \rho_{12} + \frac{\tilde{b}}{i\omega}. \quad (18)$$

Ces deux équations font intervenir deux facteurs α et β , qui couplent les deux phases du matériau poreux : α correspond au facteur de couplage élastique et β au facteur de couplage inertiel :

$$\alpha = 1 + \frac{Q}{R} \quad \text{et} \quad \beta = 1 + \frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}}. \quad (19)$$

Le tenseur $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^s$ correspond au tenseur des contraintes du squelette sous vide :

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^s = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^s) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}^s, \quad (20)$$

qui correspond à la relation contrainte-déformation classique pour un matériau élastique. Notons enfin que le déplacement de la phase fluide \mathbf{U}^f , éliminé à partir des équations (1) et (2), peut s'écrire en fonction de la pression interstitielle p et du déplacement du squelette \mathbf{U}^s :

$$\mathbf{U}^f = \frac{1}{\tilde{\rho}_{22}\omega^2} \nabla(\phi p) - \frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}} \mathbf{U}^s. \quad (21)$$

La formulation mixte (\mathbf{U}^s, p) présente de nombreux avantages par rapport à la formulation en déplacement $(\mathbf{U}^s, \mathbf{U}^f)$, notamment avec la méthode des éléments finis, où elle permet de réduire le nombre de degrés de liberté par nœuds de 6 à 4 pour un modèle en trois dimensions.

Nous proposons maintenant de résoudre les équations de Biot mixtes (13) et (14) en coordonnées cylindriques. La section suivante présente la méthode aboutissant aux solutions analytiques de ces équations.

3 Résolution analytique des équations de Biot mixtes en coordonnées cylindriques

3.1 Equations des ondes dans le matériau poro-élastique

Les équations des ondes s'obtiennent en exprimant le tenseur des contraintes en fonction des déplacements, dans les équations de Biot mixtes. En substituant (20) dans la première équation de Biot mixte (13), on obtient, pour un milieu homogène :

$$\tilde{\rho}\omega^2 \mathbf{U}^s + (\lambda + 2\mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{U}^s) - \tilde{\gamma} \nabla(\phi p) - \mu \nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{U}^s = 0, \quad (22)$$

avec

$$\tilde{\gamma} = \alpha - \beta. \quad (23)$$

La solution est obtenue en utilisant la décomposition de Helmholtz suivante pour le déplacement du squelette :

$$\mathbf{U}^s = \nabla\varphi^s + \nabla \wedge \boldsymbol{\psi}^s, \quad (24)$$

où φ^s et $\boldsymbol{\psi}^s = (\psi_r^s, \psi_\theta^s, \psi_z^s)$ sont respectivement le potentiel scalaire et le potentiel vecteur liés au squelette. Dans ce cas, en introduisant l'équation (24) dans (22), il vient :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left((\lambda + 2\mu) \Delta \varphi^s - \tilde{\gamma} \phi p + \tilde{\rho}\omega^2 \varphi^s \right) \\ + \nabla \wedge \left(-\mu \nabla \wedge \nabla \wedge \boldsymbol{\psi}^s + \tilde{\rho}\omega^2 \boldsymbol{\psi}^s \right) = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

De même, en introduisant l'équation (24) dans la seconde équation de Biot mixte (14) on obtient :

$$\frac{\Delta(\phi p)}{\tilde{\rho}_{22}\omega^2} + \frac{\phi p}{R} + \tilde{\gamma} \Delta \varphi^s = 0. \quad (26)$$

Finalement, l'utilisation des relations (25) et (26) nous donne le système d'équations suivant :

$$(\lambda + 2\mu)\Delta\varphi^s - \tilde{\gamma}\phi p + \tilde{\rho}\omega^2\varphi^s = 0, \quad (27)$$

$$\frac{\Delta(\phi p)}{\tilde{\rho}_{22}\omega^2} + \frac{\phi p}{R} + \tilde{\gamma}\Delta\varphi^s = 0, \quad (28)$$

$$-\mu\nabla \wedge \nabla \wedge \psi^s + \tilde{\rho}\omega^2\psi^s = 0. \quad (29)$$

La présence des deux équations (27) et (28) traduit le fait qu'il existe deux ondes longitudinales (ou de compression-dilatation) distinctes qui se propagent dans le matériau poreux. L'équation (29) montre, quant à elle, qu'une seule onde de cisaillement se propage.

Les deux premières équations nous permettent d'obtenir le potentiel scalaire φ^s et la pression interstitielle p . La dernière nous donne l'expression du potentiel vecteur ψ^s . La résolution de ces équations fait l'objet des paragraphes suivants.

3.2 Détermination du potentiel scalaire φ^s

Le potentiel scalaire φ^s - et en conséquence la pression interstitielle p - s'obtient en résolvant le système d'équations :

$$(\lambda + 2\mu)\Delta\varphi^s - \tilde{\gamma}\phi p + \tilde{\rho}\omega^2\varphi^s = 0, \quad (30)$$

$$\frac{\Delta(\phi p)}{\tilde{\rho}_{22}\omega^2} + \frac{\phi p}{R} + \tilde{\gamma}\Delta\varphi^s = 0. \quad (31)$$

En substituant le terme ϕp de l'équation (30) dans l'équation (31) et en multipliant le tout par $\tilde{\gamma}$, on obtient :

$$\frac{\Delta((\lambda + 2\mu)\Delta\varphi^s + \tilde{\rho}\omega^2\varphi^s)}{\tilde{\rho}_{22}\omega^2} + \frac{(\lambda + 2\mu)\Delta\varphi^s + \tilde{\rho}\omega^2\varphi^s}{R} + \tilde{\gamma}^2\Delta\varphi^s = 0. \quad (32)$$

Après quelques manipulations, l'expression précédente se met sous la forme [4] :

$$\Delta\Delta\varphi^s + \omega^2 B\Delta\varphi^s + \omega^4 C\varphi^s = 0, \quad (33)$$

avec

$$B = \frac{\tilde{\rho}_{22}}{R} + \frac{\tilde{\rho}}{\lambda + 2\mu} + \tilde{\gamma}^2 \frac{\tilde{\rho}_{22}}{\lambda + 2\mu}, \quad (34)$$

et

$$C = \frac{\tilde{\rho}\tilde{\rho}_{22}}{R(\lambda + 2\mu)}. \quad (35)$$

L'équation (33) se factorise sous la forme :

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c_1^2}\right)\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c_2^2}\right)\varphi^s = 0, \quad (36)$$

avec

$$c_1^2 = \frac{2}{B + \sqrt{B^2 - 4C}}, \quad (37)$$

et

$$c_2^2 = \frac{2}{B - \sqrt{B^2 - 4C}}. \quad (38)$$

c_1 et c_2 sont les célérités des ondes longitudinales (ou de compression-dilatation) lentes et rapides. Compte-tenu de la forme de l'équation (36), le potentiel scalaire φ^s se décompose en la somme de deux potentiels φ_1^s et φ_2^s tels que :

$$\varphi^s = \varphi_1^s + \varphi_2^s. \quad (39)$$

En utilisant la précédente relation, l'équation (36) admet deux solutions vérifiant :

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c_j^2}\right)\varphi_j^s = 0, \quad j = 1, 2. \quad (40)$$

On reconnaît ici l'équation de propagation usuelle des ondes longitudinales (ou de compression-dilatation) se propageant à la célérité c_j . La solution générale de φ_j^s peut être obtenue en utilisant la technique de séparation de variable :

$$\varphi_j^s(r, \theta, z, t) = R_j(r)\Theta_j(\theta)Z_j(z)e^{-i\omega t}, \quad j = 1, 2, \quad (41)$$

qui, dans le cas d'un cylindre infini suivant l'axe z , peut se décomposer sur les harmoniques cylindriques :

$$\varphi_j^s(r, \theta, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} R_{j,n}(r) \cos(n\theta)e^{ik_z z - i\omega t}, \quad j = 1, 2, \quad (42)$$

avec k_z le nombre d'onde axial et n l'indice du mode circonférentiel. Les solutions des composantes $R_{j,n}(r)$ dans la direction radiale du cylindre s'expriment à l'aide des fonctions de Bessel cylindriques. Finalement, le potentiel scalaire φ^s se mettra sous la forme :

$$\varphi^s(r, \theta, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_1 J_n(q_1 r) + A_2 Y_n(q_1 r) + A_3 J_n(q_2 r) + A_4 Y_n(q_2 r)] \cos(n\theta)e^{ik_z z - i\omega t}, \quad (43)$$

où J_n et Y_n sont respectivement les fonctions de Bessel de première et deuxième espèce d'ordre n , et où

$$q_j^2 = \frac{\omega^2}{c_j^2} - k_z^2, \quad j = 1, 2. \quad (44)$$

Notons que les quatre termes A_1 , A_2 , A_3 et A_4 sont les amplitudes inconnues liées aux ondes longitudinales.

Connaissant l'expression du potentiel scalaire φ^s , il est maintenant possible d'en déduire la pression interstitielle p . Cette dernière s'exprime, à partir de l'équation (30), de la manière suivante :

$$\tilde{\gamma}\phi p = (\lambda + 2\mu)\Delta\varphi^s + \tilde{\rho}\omega^2\varphi^s. \quad (45)$$

Après quelques manipulations algébriques, la pression interstitielle, décomposée sur les harmoniques cylindriques, se met sous la forme :

$$p(r, \theta, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\omega^2}{\tilde{\gamma}\phi} \left(\tilde{\rho} - \frac{\lambda + 2\mu}{c_1^2} \right) (A_1 J_n(q_1 r) + A_2 Y_n(q_1 r)) + \frac{\omega^2}{\tilde{\gamma}\phi} \left(\tilde{\rho} - \frac{\lambda + 2\mu}{c_2^2} \right) (A_3 J_n(q_2 r) + A_4 Y_n(q_2 r)) \right) \cos(n\theta)e^{ik_z z - i\omega t}. \quad (46)$$

Notons que la pression interstitielle s'exprime à l'aide des quatre amplitudes inconnues A_1 , A_2 , A_3 et A_4 , liées aux ondes longitudinales dans le matériau poro-élastique.

3.3 Détermination du potentiel vecteur ψ^s

Le potentiel vecteur s'obtient en résolvant l'équation vectorielle (29). La forme de cette équation est identique à celle d'un matériau élastique. Cette constatation traduit le fait que l'onde de cisaillement est identique dans le cas d'un matériau poro-élastique et dans le cas d'un matériau

élastique. En conséquence, la méthode de résolution, identique à celle développée pour un matériau élastique n'est pas reproduite ici. Nous rappellerons simplement la forme finale du potentiel vecteur, qui se met sous la forme suivante dans le cas d'un matériau poro-élastique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_r^s(r, \theta, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{ik_z}{q_3} (B_1 J_{n-1}(q_3 r) + B_2 Y_{n-1}(q_3 r)) \right. \\ \quad \left. + \frac{2n}{q_3 r} (C_1 J_n(q_3 r) + C_2 Y_n(q_3 r)) \right) \sin(n\theta) e^{ik_z z - i\omega t} \\ \psi_\theta^s(r, \theta, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{ik_z}{q_3} (B_1 J_{n-1}(q_3 r) + B_2 Y_{n-1}(q_3 r)) \right. \\ \quad \left. + 2C_1 J'_n(q_3 r) + 2C_2 Y'_n(q_3 r) \right) \cos(n\theta) e^{ik_z z - i\omega t} \\ \psi_z^s(r, \theta, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (B_1 J_n(q_3 r) + B_2 Y_n(q_3 r)) \sin(n\theta) e^{ik_z z - i\omega t} \end{array} \right. , \quad (47)$$

avec

$$q_3^2 = \frac{\omega^2}{c_3^2} - k_z^2, \quad (48)$$

et

$$c_3^2 = \frac{\mu}{\tilde{\rho}}. \quad (49)$$

Nous avons de plus la condition supplémentaire $B_1 = B_2 = 0$ pour $n = 0$. Connaissant maintenant l'expression du potentiel scalaire et du potentiel vecteur, il est possible de déterminer le champ de déplacement de la phase solide et de la phase fluide dans le matériau. Ceci fait l'objet de la partie suivante.

3.4 Champs de déplacements solides et fluides

Le champ de déplacement de la phase solide, défini précédemment par $\mathbf{U}^s = \nabla \varphi^s + \nabla \wedge \boldsymbol{\psi}^s$, s'obtient en introduisant dans cette équation les expressions générales de φ^s (équation (43)) et de $\boldsymbol{\psi}^s$ (équation (47)). Tous calculs faits, l'expression générale du champ de déplacement de la phase solide s'écrit :

$$\mathbf{U}^s = \left\{ \begin{array}{l} U_r^s(r, \theta, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} U_r^{s,n}(r) \cos(n\theta) e^{ik_z z - i\omega t} \\ U_\theta^s(r, \theta, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} U_\theta^{s,n}(r) \sin(n\theta) e^{ik_z z - i\omega t} \\ U_z^s(r, \theta, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} U_z^{s,n}(r) \cos(n\theta) e^{ik_z z - i\omega t} \end{array} \right. , \quad (50)$$

où les termes $U_r^{s,n}(r)$, $U_\theta^{s,n}(r)$ et $U_z^{s,n}(r)$ sont définis par :

$$\begin{aligned} U_r^{s,n}(r) &= A_1 q_1 J'_n(q_1 r) + A_2 q_1 Y'_n(q_1 r) + A_3 q_2 J'_n(q_2 r) \\ &+ A_4 q_2 Y'_n(q_2 r) + B_1 \left(\frac{n}{r} J_n(q_3 r) + \frac{k_z^2}{q_3} J_{n-1}(q_3 r) \right) \\ &+ B_2 \left(\frac{n}{r} Y_n(q_3 r) + \frac{k_z^2}{q_3} Y_{n-1}(q_3 r) \right) - 2ik_z C_1 J'_n(q_3 r) \\ &- 2ik_z C_2 Y'_n(q_3 r), \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} U_\theta^{s,n}(r) &= -A_1 \frac{n}{r} J_n(q_1 r) - A_2 \frac{n}{r} Y_n(q_1 r) - A_3 \frac{n}{r} J_n(q_2 r) \\ &- A_4 \frac{n}{r} Y_n(q_2 r) - B_1 \left(q_3 J'_n(q_3 r) + \frac{k_z^2}{q_3} J_{n-1}(q_3 r) \right) \\ &- B_2 \left(q_3 Y'_n(q_3 r) + \frac{k_z^2}{q_3} Y_{n-1}(q_3 r) \right) + 2ik_z C_1 \frac{n}{q_3 r} J_n(q_3 r) \\ &+ 2ik_z C_2 \frac{n}{q_3 r} Y_n(q_3 r), \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} U_z^{s,n}(r) &= ik_z A_1 J_n(q_1 r) + ik_z A_2 Y_n(q_1 r) + ik_z A_3 J_n(q_2 r) \\ &+ ik_z A_4 Y_n(q_2 r) - ik_z B_1 J_n(q_3 r) - ik_z B_2 Y_n(q_3 r) \\ &- 2C_1 q_3 J_n(q_3 r) - 2C_2 q_3 Y_n(q_3 r), \end{aligned} \quad (53)$$

avec la condition supplémentaire $B_1 = B_2 = 0$ pour $n = 0$.

Le champ de déplacement de la phase fluide \mathbf{U}^f s'obtient à partir de l'équation (21). Dans le cas de l'étude de la transmission sonore, seule la composante radiale du champ de déplacement de la phase fluide est utilisée. En introduisant dans cette équation les expressions de la pression interstitielle p (équation (46)) et du champ de déplacement de la phase solide \mathbf{U}^s (équations (50) et (51)), on obtient tous calculs faits l'expression générale du champ de déplacement de la phase fluide :

$$U_r^f(r, \theta, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} U_r^{f,n}(r) \cos(n\theta) e^{ik_z z - i\omega t}, \quad (54)$$

où le terme $U_r^{f,n}(r)$ est défini par :

$$\begin{aligned} U_r^{f,n}(r) &= A_1 q_1 \mu_1 J'_n(q_1 r) + A_2 q_1 \mu_1 Y'_n(q_1 r) + A_3 q_2 \mu_2 J'_n(q_2 r) \\ &+ A_4 q_2 \mu_2 Y'_n(q_2 r) + B_1 \mu_3 \left(\frac{n}{r} J_n(q_3 r) + \frac{k_z^2}{q_3} J_{n-1}(q_3 r) \right) \\ &+ B_2 \mu_3 \left(\frac{n}{r} Y_n(q_3 r) + \frac{k_z^2}{q_3} Y_{n-1}(q_3 r) \right) - 2ik_z \mu_3 C_1 J'_n(q_3 r) \\ &- 2ik_z \mu_3 C_2 Y'_n(q_3 r), \end{aligned} \quad (55)$$

avec μ_1 et μ_2 les termes liés aux ondes de compression et définis par :

$$\mu_j = \frac{1}{\tilde{\gamma} \tilde{\rho}_{22}} \left(\tilde{\rho} - \frac{\lambda + 2\mu}{c_j^2} - \tilde{\gamma} \tilde{\rho}_{12} \right), \quad j = 1, 2, \quad (56)$$

et μ_3 le terme lié à l'onde de cisaillement qui s'écrit :

$$\mu_3 = -\frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}}. \quad (57)$$

On constate, à travers la présence des termes B_1 , B_2 , C_1 et C_2 dans le champ de déplacement \mathbf{U}^f , que l'effet de l'onde de cisaillement se retrouve dans la phase fluide. Cependant, l'origine de cette onde est purement solidienne et est due au déplacement du squelette \mathbf{U}^s .

3.5 Tenseurs des contraintes

3.5.1 Tenseur des contraintes total

Le tenseur des contraintes total dans le matériau poreux, noté $\boldsymbol{\sigma}^t$, s'écrit en fonction du tenseur des contraintes du squelette sous vide $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^s$ exprimé précédemment :

$$\boldsymbol{\sigma}^t = \hat{\boldsymbol{\sigma}}^s - \alpha \phi p \mathbf{I}. \quad (58)$$

Dans la suite, la notation $\hat{\sigma}^f$ sera introduite, et définie telle que :

$$\hat{\sigma}^f = -\alpha\phi\mathbf{I}, \quad (59)$$

ce qui permet de réécrire l'équation (58) sous la forme :

$$\sigma^t = \hat{\sigma}^s + \hat{\sigma}^f. \quad (60)$$

C'est cette dernière relation que nous utiliserons pour le calcul des contraintes.

3.5.2 Tenseur des contraintes liées au squelette $\hat{\sigma}^s$

Dans le cas de l'étude de la transmission sonore, seules les composantes suivantes des contraintes liées au squelette sont utilisées : $\hat{\sigma}_{rr}^s$, $\hat{\sigma}_{r\theta}^s$ et $\hat{\sigma}_{rz}^s$. En utilisant la relation contrainte-déformation, la relation déformation-déplacement et l'expression du champ \mathbf{U}^s (équations (50) et (51)-(53)) on obtient l'expression générale de ces contraintes :

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{rr}^s(r, \theta, z, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\sigma}_{rr}^{s,n}(r) \cos(n\theta) e^{ik_z z - i\omega t} \\ \hat{\sigma}_{r\theta}^s(r, \theta, z, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\sigma}_{r\theta}^{s,n}(r) \sin(n\theta) e^{ik_z z - i\omega t}, \quad (61) \\ \hat{\sigma}_{rz}^s(r, \theta, z, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\sigma}_{rz}^{s,n}(r) \cos(n\theta) e^{ik_z z - i\omega t} \end{aligned}$$

où les termes $\hat{\sigma}_{rr}^{s,n}(r)$, $\hat{\sigma}_{r\theta}^{s,n}(r)$ et $\hat{\sigma}_{rz}^{s,n}(r)$ sont définis, tous calculs faits, par :

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{rr}^{s,n}(r) &= A_1 \left(-\lambda \frac{\omega^2}{c_1^2} J_n(q_1 r) + 2\mu q_1^2 J_n''(q_1 r) \right) - 4\mu i k_z q_3 C_1 J_n''(q_3 r) \\ &+ A_2 \left(-\lambda \frac{\omega^2}{c_1^2} Y_n(q_1 r) + 2\mu q_1^2 Y_n''(q_1 r) \right) - 4\mu i k_z q_3 C_2 Y_n''(q_3 r) \\ &+ A_3 \left(-\lambda \frac{\omega^2}{c_2^2} J_n(q_2 r) + 2\mu q_2^2 J_n''(q_2 r) \right) \\ &+ A_4 \left(-\lambda \frac{\omega^2}{c_2^2} Y_n(q_2 r) + 2\mu q_2^2 Y_n''(q_2 r) \right) \\ &+ 2\mu B_1 \left(\frac{nq_3}{r} J_n'(q_3 r) - \frac{n}{r^2} J_n(q_3 r) + k_z^2 J_{n-1}(q_3 r) \right) \\ &+ 2\mu B_2 \left(\frac{nq_3}{r} Y_n'(q_3 r) - \frac{n}{r^2} Y_n(q_3 r) + k_z^2 Y_{n-1}'(q_3 r) \right), \quad (62) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{r\theta}^{s,n}(r) &= -A_1 \frac{2\mu n}{r} q_1 \left(J_n'(q_1 r) - \frac{J_n(q_1 r)}{q_1 r} \right) \\ &- A_2 \frac{2\mu n}{r} q_1 \left(Y_n'(q_1 r) - \frac{Y_n(q_1 r)}{q_1 r} \right) \\ &- A_3 \frac{2\mu n}{r} q_2 \left(J_n'(q_2 r) - \frac{J_n(q_2 r)}{q_2 r} \right) \\ &- A_4 \frac{2\mu n}{r} q_2 \left(Y_n'(q_2 r) - \frac{Y_n(q_2 r)}{q_2 r} \right) \\ &- B_1 \mu \left(q_3^2 (J_n(q_3 r) + 2J_n''(q_3 r)) + k_z^2 J_{n-2}(q_3 r) \right) \\ &- B_2 \mu \left(q_3^2 (Y_n(q_3 r) + 2Y_n''(q_3 r)) + k_z^2 Y_{n-2}(q_3 r) \right) \\ &+ 4\mu i k_z C_1 \frac{n}{r} \left(J_n'(q_3 r) - \frac{J_n(q_3 r)}{q_3 r} \right) \\ &+ 4\mu i k_z C_2 \frac{n}{r} \left(Y_n'(q_3 r) - \frac{Y_n(q_3 r)}{q_3 r} \right), \quad (63) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{rz}^{s,n}(r) &= 2\mu i k_z A_1 q_1 J_n'(q_1 r) + 2\mu i k_z A_2 q_1 Y_n'(q_1 r) \\ &+ 2\mu i k_z A_3 q_2 J_n'(q_2 r) + 2\mu i k_z A_4 q_2 Y_n'(q_2 r) \\ &+ B_1 \frac{i k_z \mu}{q_3} \left(q_3^2 J_{n+1}(q_3 r) + k_z^2 J_{n-1}(q_3 r) \right) \\ &+ B_2 \frac{i k_z \mu}{q_3} \left(q_3^2 Y_{n+1}(q_3 r) + k_z^2 Y_{n-1}(q_3 r) \right) \\ &+ 2\mu C_1 (k_z^2 - q_3^2) J_n'(q_3 r) + 2\mu C_2 (k_z^2 - q_3^2) Y_n'(q_3 r), \end{aligned} \quad (64)$$

avec la condition supplémentaire $B_1 = B_2 = 0$ pour $n = 0$.

3.5.3 Tenseur des contraintes liées au fluide $\hat{\sigma}^f$

Les composantes du tenseur des contraintes liées au fluide interstitiel $\hat{\sigma}^f$ s'obtiennent à partir de l'équation (59). Seuls les termes diagonaux sont non nuls. On obtient alors :

$$\hat{\sigma}_{rr}^f = \hat{\sigma}_{\theta\theta}^f = \hat{\sigma}_{zz}^f = -\alpha\phi p. \quad (65)$$

Dans le cas de l'étude de la transmission sonore, seule la composante $\hat{\sigma}_{rr}^f$ est utilisée. En introduisant l'expression de p donnée par l'équation (46), on obtient l'expression de cette contrainte, qui s'écrit :

$$\hat{\sigma}_{rr}^f(r, \theta, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\sigma}_{rr}^{f,n}(r) \cos(n\theta) e^{ik_z z - i\omega t}, \quad (66)$$

où le terme $\hat{\sigma}_{rr}^{f,n}(r)$ est défini, tous calculs faits, par :

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{rr}^{f,n}(r) &= -A_1 \omega^2 \frac{\alpha}{\tilde{\gamma}} \left(\tilde{\rho} - \frac{\lambda + 2\mu}{c_1^2} \right) J_n(q_1 r) \\ &- A_2 \omega^2 \frac{\alpha}{\tilde{\gamma}} \left(\tilde{\rho} - \frac{\lambda + 2\mu}{c_1^2} \right) Y_n(q_1 r) \\ &- A_3 \omega^2 \frac{\alpha}{\tilde{\gamma}} \left(\tilde{\rho} - \frac{\lambda + 2\mu}{c_2^2} \right) J_n(q_2 r) \\ &- A_4 \omega^2 \frac{\alpha}{\tilde{\gamma}} \left(\tilde{\rho} - \frac{\lambda + 2\mu}{c_2^2} \right) Y_n(q_2 r). \quad (67) \end{aligned}$$

Bien que le champ de déplacement de la phase fluide \mathbf{U}^f fasse intervenir les termes B_1 , B_2 , C_1 et C_2 liés à l'onde de cisaillement, on remarque à travers cette expression que les contraintes liées à la phase fluide sont uniquement fonction des termes A_1 , A_2 , A_3 et A_4 , liés aux ondes longitudinales dans le matériau poro-élastique.

4 Résultats

Dans un premier temps, la solution analytique des équations de Biot en coordonnées cylindriques développée précédemment est validée par comparaison avec un modèle éléments finis. Le problème étudié ici correspond à la transmission sonore à travers un cylindre bicouche, constitué d'une couche élastique en aluminium de 5mm d'épaisseur, et d'un revêtement poro-élastique de 20mm d'épaisseur dont les propriétés sont données en référence [4]. L'excitation est une onde plane ayant une amplitude égale à 1 Pa. Le calcul de la transmission est réalisé à partir de la méthode des matrices de transfert, dont la démarche, basée sur l'utilisation des déplacements et des contraintes présentés précédemment, est donnée en référence [5]. Le cylindre considéré est de longueur infinie.

Le modèle éléments finis dont nous disposons étant limité à deux dimensions, le cylindre est excité par une

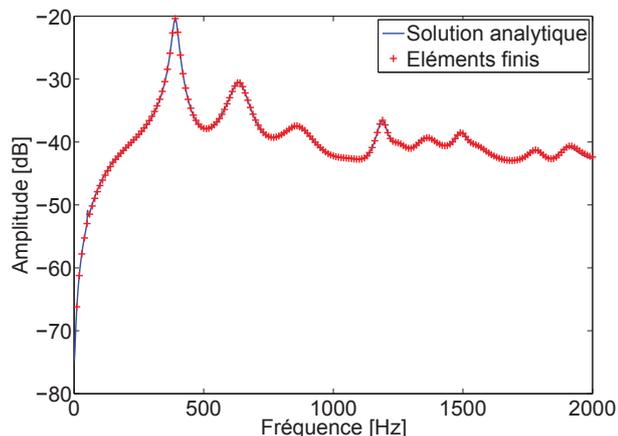


FIGURE 1 – Comparaison de la pression quadratique moyenne obtenue par méthode analytique et par méthode éléments finis pour un cylindre avec revêtement poro-élastique excité par une onde plane en incidence normale.

onde plane en incidence normale par rapport à son axe. Le modèle éléments finis consiste à placer le cylindre dans un domaine fluide rectangulaire sur lequel une condition de non-réflexion est imposée par l'ajout d'une couche de type PML (Perfectly Matched Layer). Le cylindre élastique, la couche poro-élastique et les milieux acoustiques internes et externes sont maillés par des éléments triangulaires à trois nœuds. La figure 1 présente la pression quadratique moyenne dans la cavité cylindrique obtenue par les deux méthodes. Une très bonne concordance est observée entre les résultats obtenus. D'autres configurations ont également été testées et ont donné des résultats similaires. La pertinence du modèle analytique est donc vérifiée. Notons de plus que le modèle analytique développé permet un gain en temps de calcul important par rapport à un modèle éléments finis. Celui-ci est donc particulièrement adapté au cas où de nombreux calculs sont nécessaires (étude paramétrique ou optimisation par exemple).

Le modèle développé peut maintenant être utilisé pour observer l'effet d'un revêtement poro-élastique sur la transmission acoustique. La figure 2 présente un exemple de TL (Transmission Loss) obtenu pour un cylindre en aluminium de 5mm d'épaisseur, avec et sans protection poro-élastique. La présence du matériau poro-élastique permet de réduire de manière significative la transmission acoustique à travers la structure cylindrique pour toute la gamme de fréquence d'étude. Le modèle analytique pourra ensuite être utilisé pour réaliser une étude paramétrique afin d'optimiser les propriétés des cylindres présentant un revêtement poro-élastique.

5 Conclusion

Une solution analytique en coordonnées cylindriques des équations de Biot mixtes a été proposée dans ce papier. Cette solution tridimensionnelle permet de caractériser le comportement d'un matériau poro-élastique à géométrie cylindrique. Le modèle développé a ensuite été validé dans le cadre de la transmission acoustique à travers une structure cylindrique présentant un revêtement poro-

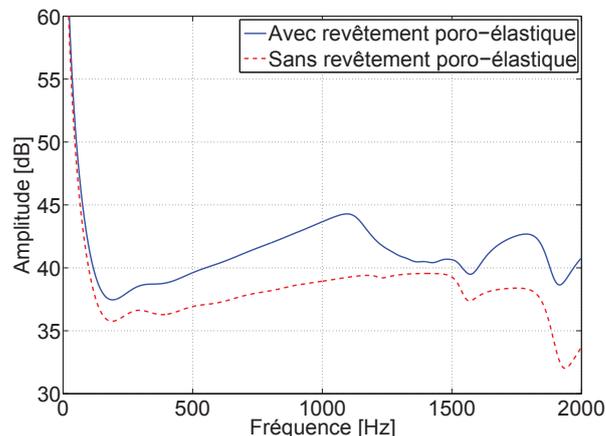


FIGURE 2 – Comparaison du TL pour un cylindre avec et sans revêtement poro-élastique excité par une onde plane en incidence normale.

élastique. Une très bonne concordance a été observée entre les résultats obtenus et un calcul par éléments finis. Cette solution constitue donc un outil de calcul particulièrement intéressant, qui sera par la suite utilisé pour optimiser les propriétés acoustiques des structures cylindriques présentant un revêtement poro-élastique.

Références

- [1] M. A. Biot, Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range, *Journal of the Acoustical Society of America* **28**, 168-178 (1956).
- [2] M. E. Delany and E. N. Bazley, Acoustical properties of fibrous absorbent materials, *Applied Acoustics* **3**, 105-116 (1970).
- [3] J. S. Bolton, N.-M. Shiao, and Y. J. Kang, Sound transmission through multi-panel structures lined with elastic porous materials, *Journal of Sound and Vibration* **191**, 317-347 (1996).
- [4] J. Kanfoud, M. A. Hamdi, F.-X. Becot and L. Jaouen, Development of an analytical solution of modified Biot's equations for the optimization of lightweight acoustic protection, *Journal of the Acoustical Society of America* **125**, 863-872 (2009).
- [5] J.-F. Allard and N. Atalla, *Propagation of sound in porous media : modelling sound absorbing materials, second edition*, Wiley (2009).
- [6] M. A. Hamdi, L. Mebarek, A. Omrani and N. Atalla, An efficient formulation for the analysis of acoustic and elastic waves propagation in porous-elastic materials, in *Proceedings of ISMA 25, International Conference on Noise and Vibration Engineering*, Louvain, Belgique, (2000).