

Etude de la propagation acoustique dans un cristal phononique formé de réseaux périodiques de cylindres circulaires répartis dans une matrice viscoélastique

P. Méresse^a, Y. Renou^a, J. Vasseur^b, A.-C. Hladky-Hennion^b et C. Audoly^a

^aDCNS Research, Le Mourillon BP403, 83055 Toulon, France

^bIEMN, Lille, UMR 8520 CNRS, ISEN, 41 Boulevard Vauban, 59046 Lille, France
pierre.meresse@gmail.com

Les structures périodiques, aussi appelées cristaux phononiques, permettent de sélectionner certaines gammes de fréquences pour lesquelles les ondes se propageant dans le matériau deviennent évanescentes. Ces gammes de fréquence sont appelées bandes interdites de Bragg. Les conditions d'apparition de bandes interdites à des fréquences basses par rapport à la longueur d'onde sont étudiées ici pour deux types d'inclusions réparties selon un motif carré dans une matrice viscoélastique souple : l'inclusion molle (ou cavité vide), et l'inclusion massive. Dans le cas des inclusions molles, le fort coefficient de diffusion de l'inclusion affecte la propagation à basse fréquence. Dans le cas des inclusions massives, des modes liés aux inclusions apparaissent et peuvent amener à la création de bandes interdites situées en deçà des bandes interdites de Bragg.

1 Introduction

Les cristaux phononiques sont des structures périodiques qui, sous certaines conditions, peuvent présenter des bandes de fréquences dans lesquelles les ondes sont évanescentes [1]. Les applications potentielles sont nombreuses (filtrage, isolation, absorption) mais se limitent généralement à des bandes de fréquences pour lesquelles les ondes ont une longueur d'onde de l'ordre du pas du réseau périodique : c'est la bande interdite de Bragg. Lorsqu'il s'agit de traiter un cas au niveau des fréquences plus basses, la dépendance longueur d'onde-pas du réseau entraîne des dimensions imposantes pour le cristal. Plus récemment, un nouveau concept de matériau acoustique a été proposé par Ping Sheng. Il fait appel à des résonances locales dans le matériau pour faire apparaître des bandes interdites à de très basses fréquences, relativement aux dimensions de la structure [2]. Il convient de s'intéresser aux phénomènes qui interviennent dans les structures en réseau pour des fréquences inférieures à la bande interdite de Bragg : il s'agit des bandes interdites d'hybridation.

Cet article propose d'exploiter les courbes de dispersion $\omega = f(k)$ pour mettre en évidence les mécanismes qui entrent en jeu dans le cristal phononique défini. Le cas d'un cristal constitué de polyuréthane chargé d'inclusions d'air sera étudié avant d'observer le cas d'une même matrice chargée d'inclusions en acier. Pour chaque cas, les courbes de dispersion seront tracées sans considérer les pertes visqueuses dans un premier temps. Dans un second temps, la prise en compte de ces pertes amènera à une représentation différente. L'influence de ces pertes est constatée et l'interaction des modes de la structure sera observée.

2 Matériau à inclusions d'air

2.1 Cas sans pertes

Une matrice polyuréthane est chargée périodiquement d'inclusions d'air selon un réseau carré de côté a (Figure 1). Les inclusions ont une section circulaire de diamètre $D = 0,4a$ et sont infinies dans une direction de l'espace.

Le polyuréthane utilisé possède les paramètres suivants, issus des courbes fournies par le fabricant : module d'Young $E=9.9045 \times 10^7 (1+0.12i)$ Pa ; coefficient de Poisson $\nu=0.49333 (1 - i 1.7 \times 10^{-3})$; $\rho=1100 \text{ kg/m}^3$, ce qui correspond à une vitesse des ondes longitudinales $c_l=1513 \text{ m/s}$ et celle des ondes transversales $c_t=174 (1+0.06i) \text{ m/s}$.

La structure est modélisée par la méthode des éléments finis via le logiciel ATILA [3]. Le logiciel permet notamment de faire une analyse modale des structures périodiques, offrant ainsi une représentation du diagramme de dispersion

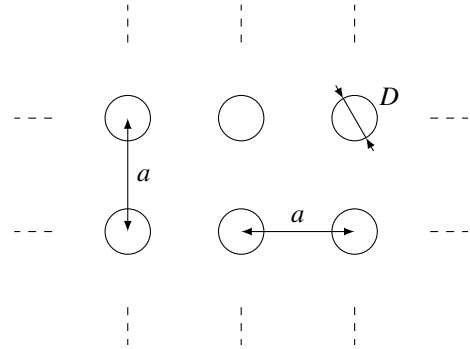


FIGURE 1 – Schéma du réseau périodique d'inclusions

$\omega = f(k)$ sans considérer les pertes dans le matériau (Figure 2). Ici, et pour toutes les figures à suivre, la notation normalisée pour la pulsation réduite est $\tilde{\omega} = \omega \times a/c_l$. Ce premier résultat théorique sert ici de support à toutes les représentations des courbes de dispersion calculées par la suite. Sur cette première représentation n'apparaît aucune bande interdite absolue, c'est-à-dire aucune gamme de fréquence pour laquelle il n'existe pas de solution à la relation $\tilde{\omega} = f(k)$ dans toutes les directions.

La pente à l'origine de la courbe de dispersion correspond à la célérité de l'onde dans le matériau en régime quasi-statique. La branche longitudinale est identifiée comme celle ayant la pente la plus élevée à l'origine.

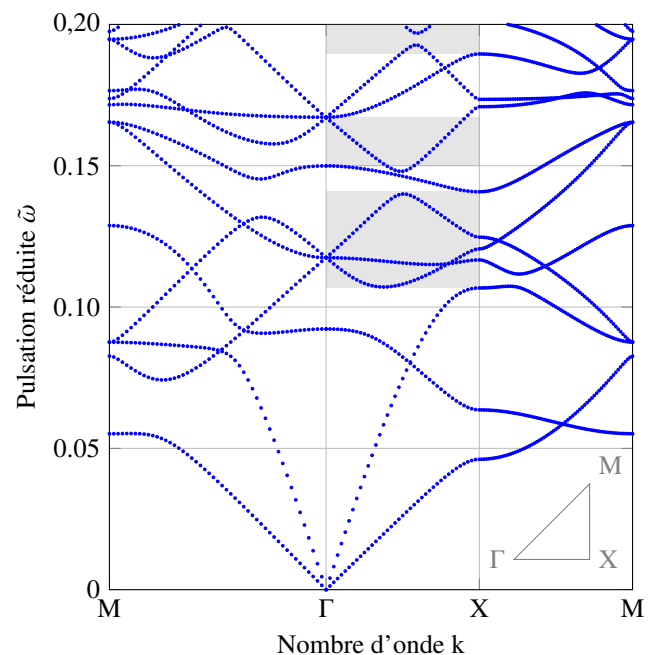


FIGURE 2 – Analyse modale du cristal à inclusion d'air. La partie grisée correspond à une bande interdite pour le mode longitudinal.

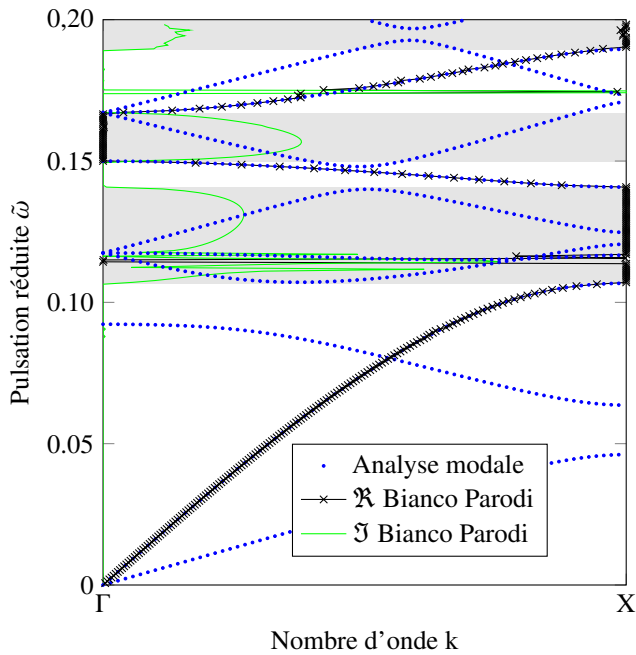


FIGURE 3 – Courbe de dispersion du cristal à inclusion d’air sans pertes - Les points bleus correspondent au calcul ATILA (Figure 2).

La bande interdite de Bragg est due à la périodicité de la structure. Elle intervient lorsque la branche de propagation du mode longitudinal arrive en bord de zone de Brillouin ($\Re(k)=1$ ou 0). La première bande interdite de Bragg est située aux alentours de $\tilde{\omega} = 0,12$. Lorsqu’une bande interdite intervient, la partie réelle de k est fixe tandis qu’une partie imaginaire apparaît. L’onde alors définie est évanescente.

La résolution des courbes de dispersion peut aussi se faire via la méthode différentielle de Bianco & Parodi [4]. Cette méthode utilise les coefficients de réflexion et transmission dans un fluide pour différentes épaisseurs de la structure - 5 et 6 couches dans cette étude. De cette information est déduit le comportement propre à la cellule élémentaire, et *in fine* le nombre d’onde k en fonction de la fréquence. Du fait de l’étude en milieu fluide pour une onde incidente normale (direction $\Gamma - X$), les informations retrouvées ne concernent que les ondes longitudinales. Les résultats sont présentés figure 3.

Dans ces conditions, la bande interdite de Bragg est visible sur le diagramme de la figure 3 dans la gamme

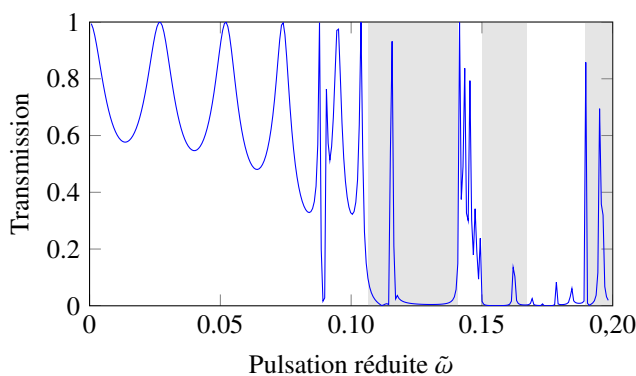


FIGURE 4 – Transmission du cristal à inclusion d’air de 6 couches sans pertes

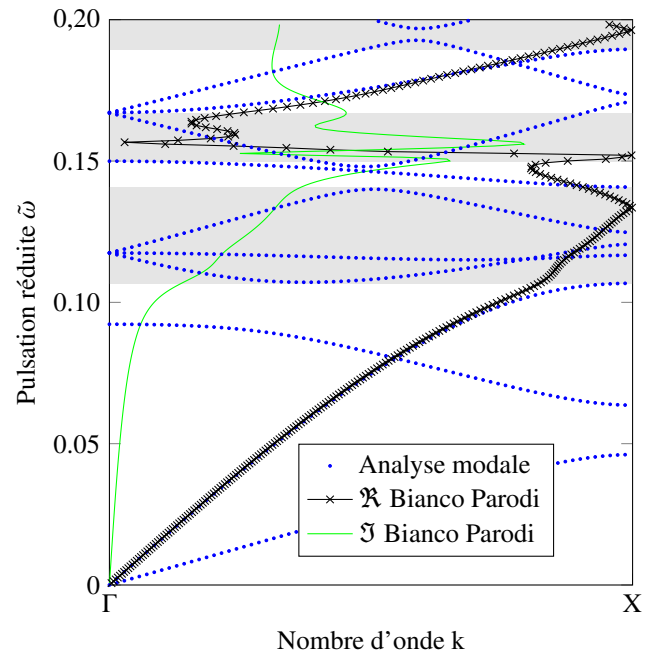


FIGURE 5 – Courbe de dispersion du cristal à inclusion d’air avec les pertes visqueuses - Les points bleus correspondent au calcul ATILA (Figure 2).

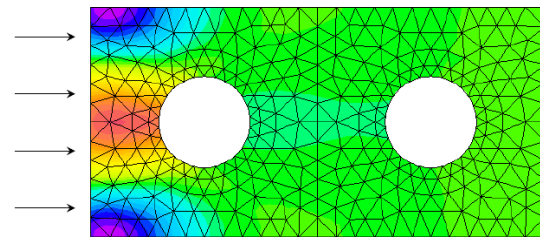


FIGURE 6 – Déplacement de la structure à l’interface excitée à $\tilde{\omega} = 0,09$. Les flèches représentent l’onde incidente.

$0,106 < \tilde{\omega} < 0,140$. C’est une bande interdite dans la direction $\Gamma - X$ (incidence normale) pour les ondes longitudinales. Les branches de l’analyse modale (ATILA) qui ne correspondent pas aux résultats *Bianco-Parodi* sont des branches transversales. Les résultats de l’analyse modale et de l’étude différentielle sont en très bon accord sur les branches longitudinales. La perturbation à la pulsation 0,114 est due à une résonance de l’inclusion d’air.

L’interprétation peut se faire avec l’appui du coefficient

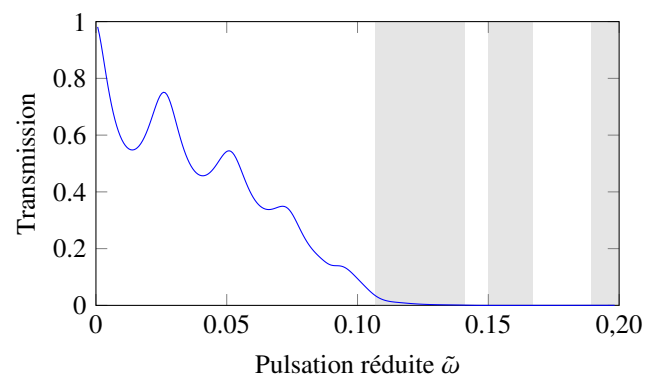


FIGURE 7 – Transmission du cristal à inclusion d’air de 6 couches avec les pertes visqueuses

de transmission d'une plaque infinie d'épaisseur $6 \times a$ correspondant à six rangées du réseau (Fig. 4). La transmission est quasi-nulle sur la gamme de pulsation réduite 0,106 - 0,140 où s'applique la bande interdite de Bragg. On note un pic dans la bande interdite pour $\tilde{\omega} = 0,114$ à cause de la résonance de l'inclusion. Un autre creux apparaît dans la transmission pour $\tilde{\omega} = 0,09$. Il s'agit d'un effet d'interface de la plaque visible figure 6, difficilement décelable sur le diagramme de dispersion mais opérant du fait de la dimension finie du cas modélisé.

2.2 Cas avec pertes visqueuses

En prenant en considération les pertes visqueuses dans la polyuréthane utilisé, les solutions pour k ne sont plus réelles pures ou imaginaires avec une partie réelle fixée à 0 ou 1 mais deviennent complexes. Cela se traduit par une atténuation des ondes même dans une bande passante, et une propagation possible (bien que fortement atténuée) dans les bandes interdites.

La nouvelle courbe de dispersion (Fig. 5) représente différemment les informations de la structure. Par exemple, une résonance apparaît dans le cas sans pertes (figure 3) de manière prononcée à $\tilde{\omega} = 0.114$. Lors de la résolution prenant en compte les pertes visqueuses de la matrice, la courbe est lissée et l'effet de résonance est plus difficile à observer, figure 5. Quant à la bande interdite de Bragg, elle n'est pas clairement définie. Les solutions font apparaître des ondes fortement atténuées, car la partie imaginaire est plus élevée dans ces fréquences. La partie imaginaire reste d'ailleurs forte au-delà de la gamme de la bande interdite de Bragg.

Ces pertes influent sur le coefficient de transmission de la plaque infinie d'épaisseur $6 \times a$ (Fig. 7). La courbe est fortement lissée et la transmission reste quasi-nulle pour les fréquences supérieures à celles de la bande interdite de Bragg. Ce dernier point est une conséquence de la partie imaginaire élevée du nombre d'onde qui subsiste au-delà de la bande interdite.

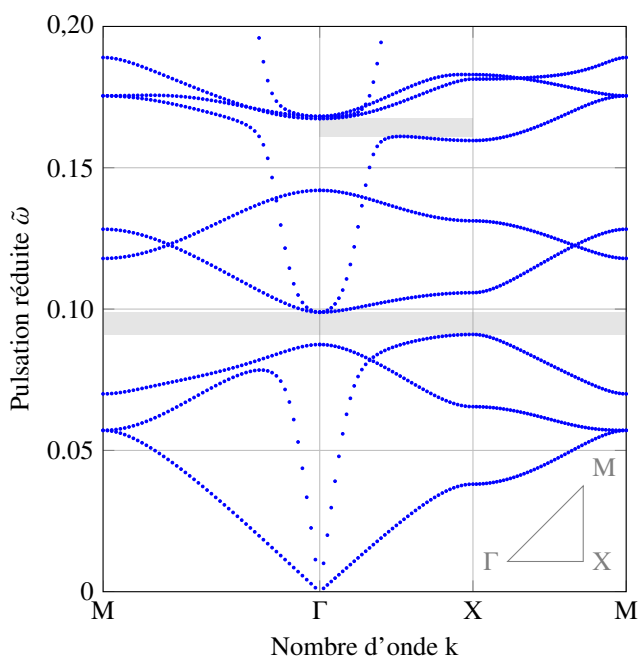


FIGURE 8 – Analyse modale du cristal à inclusion en acier

3 Matériau à inclusions massiques

3.1 Cas sans pertes

Dans cette partie, le matériau possède les mêmes caractéristiques, à savoir le polyuréthane dont les données sont précisées dans la section 2.1 et la structure représentée figure 1. Les dimensions sont conservées. Seules les inclusions diffèrent. Il s'agit désormais de tiges en acier de longueur infinie et de diamètre D .

Au vu de l'analyse modale de ce nouveau cristal (Fig. 8), la pente à l'origine de la branche longitudinale laisse présager une bande interdite de Bragg plus de deux fois plus haut en fréquence par rapport au cristal précédent. Cependant, pour une pulsation réduite comprise dans l'intervalle $0,09 < \tilde{\omega} < 0,10$, il existe une bande interdite absolue, c'est-à-dire une gamme de fréquence dans laquelle il n'existe aucune solution à $\tilde{\omega} = f(k)$ quelle que soit la direction de propagation (M Γ X M). Plus haut en fréquence, à partir de $\tilde{\omega} = 0,16$, une autre bande interdite est présente dans la direction Γ - X jusque $\tilde{\omega} = 0,17$. Ces résultats sont similaires à ceux présentés par Ping Sheng [2]. Les bandes plates ont pu être obtenues à l'aide des inclusions présentes dans la matrice.

La résolution à l'aide de la méthode Bianco & Parodi, figure 9, permet de mieux visualiser ces bandes interdites dans la propagation des ondes longitudinales. Les résultats obtenus sont à nouveau en bon accord avec l'analyse modale. La branche longitudinale n'est pas continue jusqu'à la bande interdite de Bragg comme dans le cas de la section précédente. La perturbation à $\tilde{\omega} = 0,13$ est due à un effet d'interface semblable à celui du cristal à inclusions d'air.

La courbe de transmission sur une plaque d'épaisseur $6 \times a$ (Figure 10) retranscrit les informations lues sur la courbe de dispersion, à savoir les bandes interdites autour de $\tilde{\omega} = 0,09$ et $\tilde{\omega} = 0,16$. Également on retrouve l'influence de l'effet d'interface pour $\tilde{\omega} = 0,13$, dont le champ de déplacement correspondant est représenté figure 11.

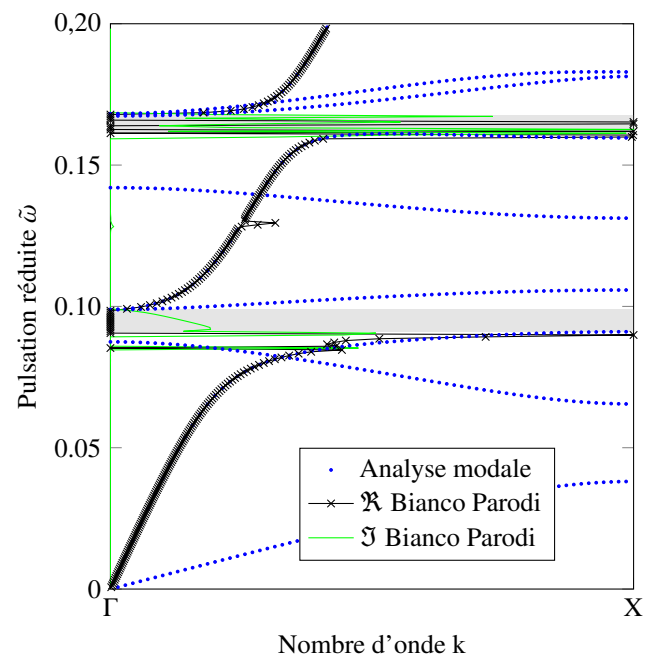


FIGURE 9 – Courbe de dispersion du cristal à inclusion en acier sans pertes - Les points bleus correspondent au calcul ATILA (Figure 8).

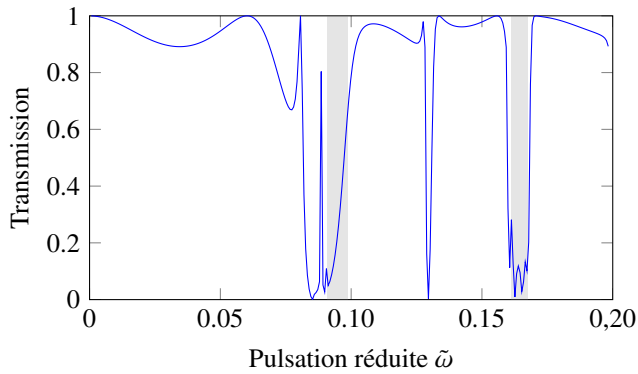


FIGURE 10 – Transmission du cristal à inclusion d'acier de 6 couches sans pertes

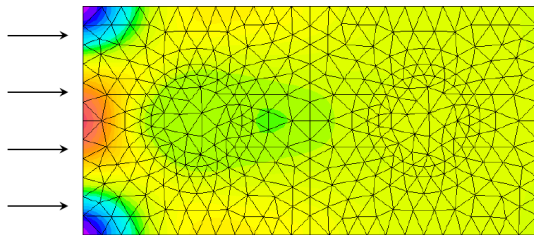


FIGURE 11 – Déplacement de la structure à l'interface excitée à $\bar{\omega} = 0,13$. Les flèches représentent l'onde incidente.

3.2 Cas avec pertes visqueuses

La résolution de la relation de dispersion a aussi été effectuée en considérant les pertes propres à la matrice polyuréthane à l'aide de la méthode *Bianco-Parodi*. Les résultats sont tracés figure 12. Bien que les bandes d'arrêt ne présentent pas des valeurs $\Re(k) = 0$ ou 1, leur effet est prononcé dans la propagation des ondes longitudinales, à $\bar{\omega} = 0,09$ et 0,16. La courbe de résultats est lissée, ce qui notamment rend plus difficile à voir la perturbation qui était à $\bar{\omega} = 0,13$ due à l'interface.

Le lissage dû aux pertes visqueuses se retrouve dans la transmission d'un panneau infini d'épaisseur $6 \times a$ similaire aux précédents (Fig. 13). Trois creux sont clairement identifiés. Deux proviennent des bandes interdites pour $\bar{\omega} = 0,09$ et $\bar{\omega} = 0,16$. Le creux de la bande à $\bar{\omega} = 0,09$ est décalé vers les basses fréquences, ce qui est en cours d'analyse. Ici, du fait de la dimension finie du cristal, l'effet d'interface est présent et est à l'origine du creux central en transmission autour de $\bar{\omega} = 0,13$.

4 Conclusion

Le cas d'un matériau à inclusions d'air a été étudié, dans un premier temps sans considérer les pertes visqueuses du matériau. Cette approche progressive a permis d'identifier clairement les phénomènes entrant en jeu lors d'un filtrage de fréquences. Il est apparu que ce type de matériau offre une fonction filtre passe-bas efficace pour des fréquences dont la longueur d'onde est du même ordre de grandeur que le pas du réseau.

Un autre cristal, de géométrie identique au précédent, contenant des inclusions d'acier laisse apparaître des bandes interdites bien inférieures en fréquence à la bande interdite de Bragg. La considération des pertes visqueuses permet de

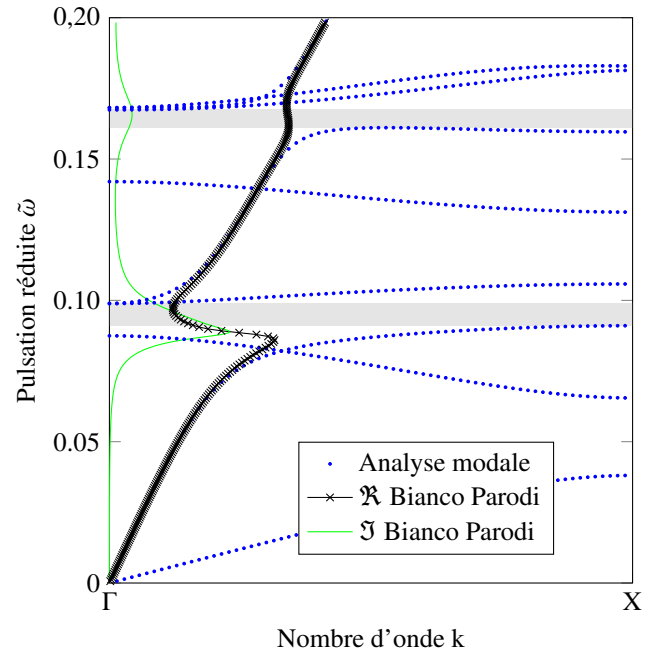


FIGURE 12 – Courbe de dispersion du cristal à inclusion en acier avec les pertes visqueuses - Les points bleus correspondent au calcul ATILA (Figure 8).

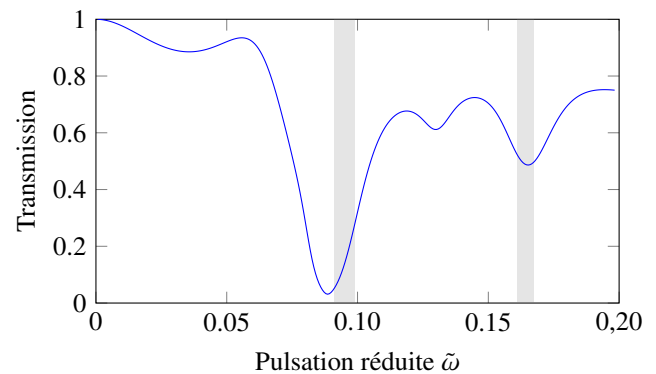


FIGURE 13 – Transmission du cristal à inclusion d'acier de 6 couches avec les pertes visqueuses

constater le comportement réel d'un tel matériau.

Remerciements

Les résultats présentés dans cet article sont issus des travaux d'une thèse DCNS avec le soutien financier de la Direction Générale de l'Armement.

Références

- [1] L. Brillouin *Wave Propagation in Periodic Structures*, Dover (1953).
- [2] P. Sheng, Z. Liu, X. Zhang, Y. Mao, Y.Y. Zhu, Z. Yang, C.T. Chan *Locally resonant sonic materials*, Science 289 (2000).
- [3] ATILA, Finite-Element Software Package for the analysis of 2D & 3D structures based on smart materials, Version 6.0.2 User's Manual (2010).
- [4] M. Bianco, P. Parodi *Determination of the propagation constant of uniform microstrip lines*, Alta Frequenza (1976).