



Réduction de modèle pour des structures complexes avec matériaux poro-viscoélastiques en utilisant des formulations symétriques

C. Coguenanff^a, C. Desceliers^b, C. Guigou Carter^a et P. Jean^a

^aCSTB, 24 rue Joseph Fourier, 38400 Saint-Martin-D'Hères, France

^bUniversité Paris-Est, Laboratoire MSME UMR 8208 CNRS, 5 Boulevard Descartes, 77454

Marne-La-Vallée, France

corentin.coguenanff@cstb.fr

Dans l'optique de soutenir l'usage du matériau bois dans la construction, une prévision fiable des performances acoustiques à l'échelle du système est nécessaire et ce dès la phase de conception. Un processus d'optimisation intégré multicritère peut alors être mis en place évitant surdimensionnements et manques de compétitivité. La complexité structurale intrinsèque aux systèmes constructifs bois amène de plus à choisir la méthode des éléments finis pour résoudre le problème dynamique couplé entre les domaines acoustiques structuraux et poreux avec une prise en compte fine des géométries et des frontières. Ce travail concernera les problématiques de réduction des équations poro-élastiques dans le cadre d'une démarche d'optimisation topologique.

1 Introduction

Les systèmes séparatifs à structure légère du bâtiment, murs ou planchers, sont des assemblages complexes associant les propriétés intrinsèques de chaque partition pour répondre à diverses contraintes : tenue dynamique, transferts thermiques minimaux, isolation acoustique etc. Une prévision de la performance acoustique de ces systèmes implique ainsi une description fine de domaines structuraux, acoustiques et poreux ainsi que de leurs couplages. La méthode des éléments finis associée à des méthodes de sous-structuration dynamique paraît ainsi bien adaptée à la résolution de ce problème multi-physique couplé.

Cet article s'attachera à l'obtention d'un modèle nominal réduit d'un système vibro-acoustique avec matériaux poro-élastiques par sous-structuration dynamique. La description de la partie structurale se fera classiquement au travers de son champ de déplacement, la partie acoustique sera décrite par un champ scalaire de pression et une formulation de Biot-Allard en déplacement-déplacement reprenant l'écriture proposée dans les travaux de thèse de Rumpler présentés dans [1] sera utilisée pour le sous-domaine poreux. Cette formulation symétrique permet de construire une base de réduction à partir des modes couplés entre les phases solides et fluides les plus à même de représenter le comportement dynamique associé au couplage fort entre ces dernières. Cependant, l'absence de rigidité au cisaillement de la partie fluide du poreux amène la présence d'un grand nombre de modes couplés basse fréquence qui rend la résolution du problème au valeur propre sur un système de grande taille très coûteuse. De plus, la non-diagonalisation de certains opérateurs entraîne un couplage entre les modes de la bande de fréquence étudiée et des modes hors bande qui devront être calculés, augmentant alors la difficulté numérique. L'idée avancée dans ce travail est la décomposition en sous-domaines de la partie poreuse pour "filtrer" les modes de cisaillement fluide, améliorer la sparsité du problème numérique et ainsi rendre la réduction plus performante.

2 Formulation du problème dynamique

Les trois différents sous-domaines du système étudié occupent les domaines de l'espace Ω_S pour la partie structurale, Ω_F pour la partie fluide et Ω_P pour la partie poreuse dont les frontières respectives sont $\partial\Omega_S = \Gamma_u \cup \Gamma_n \cup \Gamma_{SF} \cup \Gamma_{SP}$, $\partial\Omega_F = \Gamma_{SF} \cup \Gamma_{FP}$ et $\partial\Omega_P = \Gamma_{SP} \cup \Gamma_{FP}$. Les champs retenus pour la description dynamique sont respectivement le champ de déplacement \mathbf{u}^S , le champ de pression acoustique p ainsi que les champs de déplacement structuraux et acoustiques homogénéisés \mathbf{u}^{Ps} et \mathbf{u}^{Pf} . Le couplage entre ces partitions s'écrit sur leurs frontières communes Γ_{SF} pour les parties structurales et fluides, Γ_{SP} pour les parties structurales et poreuses et

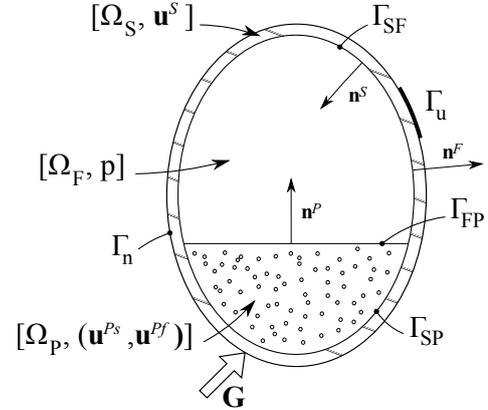


FIGURE 1 – Système vibro-acoustique avec partition poreuse

Γ_{FP} pour les parties fluides et poreuses. Des conditions de Dirichlet sont appliquées à la structure sur sa frontière Γ_u et des conditions de Neumann sur Γ_n .

2.1 Formulation faible du problème couplé

Le problème aux limites structural s'écrit avec \mathbf{u}^S , σ^S et ρ_S étant respectivement les champs de déplacement, tenseur de contraintes et densités restreints à Ω_S , avec la convention de sommation d'Einstein :

$$-\omega^2 \rho_S u_i^S - \sigma_{ij,j}^S(\mathbf{u}^S) = 0 \text{ dans } \Omega_S, \quad (1)$$

$$u_i^S = 0 \text{ sur } \Gamma_u, \quad (2)$$

$$u_i^S = u_i^{Ps} \text{ sur } \Gamma_{SP}, \quad (3)$$

$$u_i^S n_i^S = -u_i^{Pf} n_i^P \text{ sur } \Gamma_{SP}, \quad (4)$$

$$\sigma_{ij}^S(\mathbf{u}^S) n_j^S = G_i(\omega) \text{ sur } \Gamma_n, \quad (5)$$

$$\sigma_{ij}^S(\mathbf{u}^S) n_j^S = p n_i^F \text{ sur } \Gamma_{SF}, \quad (6)$$

$$\sigma_{ij}^S(\mathbf{u}^S) n_j^S = -[\sigma_{ij}^{Ps}(\mathbf{u}^{Ps}, \mathbf{u}^{Pf}) + \sigma_{ij}^{Pf}(\mathbf{u}^{Pf}, \mathbf{u}^{Ps})] n_j^P \text{ sur } \Gamma_{SP}. \quad (7)$$

Soit $C_{\Omega_S}^c$ l'espace des fonctions cinématiquement admissibles sur Ω_S et soit $\delta\mathbf{u}^S$ une fonction de $C_{\Omega_S}^c$. La méthode dite de la "fonction-test" associée aux équations sur le bord du domaine amène à :

$$\begin{aligned} & -\omega^2 \int_{\Omega_S} \rho_S u_i^S \overline{\delta u_i^S} d\Omega + \int_{\Omega_S} \sigma_{ij}^S(\mathbf{u}^S) \epsilon_{ij}^S(\overline{\delta\mathbf{u}^S}) d\Omega \\ & = \int_{\Gamma_n} G_i^S(\omega) \overline{\delta u_i^S} d\Gamma + \int_{\Gamma_{SF}} p n_i^F \overline{\delta u_i^S} d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma_{SP}} \sigma_{ij}^{Ps}(\mathbf{u}^{Ps}) n_j^P \overline{\delta u_i^S} d\Gamma - \int_{\Gamma_{SP}} \sigma_{ij}^{Pf}(\mathbf{u}^{Pf}) n_j^P \overline{\delta u_i^S} d\Gamma, \end{aligned} \quad (8)$$

avec :

$$\epsilon_{ij}^S = \frac{1}{2}(u_{i,j}^S + u_{j,i}^S). \quad (9)$$

La loi de comportement en théorie de la visco-élasticité linéaire sans mémoire s'écrit de plus :

$$\sigma_{ij}^S(\mathbf{u}^S) = a_{ijkl}^S \epsilon_{kh}^S(\mathbf{u}^S) + i\omega b_{ijkl}^S \epsilon_{kh}^S(\mathbf{u}^S). \quad (10)$$

Le problème aux limites acoustique dissipatif s'écrit (voir par exemple [2]) avec p , c_F et ρ_F étant respectivement les champ de pression, célérité du son et densités restreints à Ω_F :

$$-\omega^2 \frac{p}{\rho_F c_F^2} - i\omega \tau \frac{p_{,ii}}{\rho_F} - \frac{p_{,ii}}{\rho_F} = 0 \text{ dans } \Omega_F, \quad (11)$$

$$(1 + i\omega \tau) p_{,i} n_i^F = -\omega^2 \rho_F u_i^S n_i^S \text{ sur } \Gamma_{SF}, \quad (12)$$

$$(1 + i\omega \tau) p_{,i} n_i^F = -\omega^2 \rho_F [\phi u_i^{Pf} + (1 - \phi) u_i^{Ps}] n_i^P \text{ sur } \Gamma_{FP}. \quad (13)$$

Dans le cas de pertes visqueuses en cisaillement au sein du fluide on a, avec η_F le coefficient de viscosité dynamique de l'air :

$$\tau = \frac{1}{\rho_F c_F^2} \frac{4}{3} \eta_F. \quad (14)$$

Soit $C_{\Omega_F}^c$ l'espace des fonctions admissibles sur Ω_F , sans conditions particulières sur les bords. Soit δp une fonction "test" de $C_{\Omega_F}^c$. En suivant la même méthode que pour la partition structurale on introduit la forme variationnelle faible :

$$\begin{aligned} & -\omega^2 \frac{1}{\rho_F c_F^2} \int_{\Omega_F} p \delta p d\Omega + (1 + i\omega \tau) \frac{1}{\rho_F} \int_{\Omega_F} p_{,i} \delta p_{,i} d\Omega \\ & = \omega^2 \int_{\Gamma_{SF}} u_i^S n_i^F \delta p d\Gamma + \omega^2 \int_{\Gamma_{FP}} [\phi u_i^{Pf} + (1 - \phi) u_i^{Ps}] n_i^F \delta p d\Gamma. \end{aligned} \quad (15)$$

Suivant la théorie de Biot-Allard employant les grandeurs et notations détaillées dans [3], le problème aux limites sur le domaine poreux s'écrit avec \mathbf{u}^{Ps} , \mathbf{u}^{Pf} , σ^{Ps} , σ^{Pf} , ρ_{Ps} et ρ_{Pf} étant respectivement les champ de déplacement, tenseurs de contraintes et densités des phases solides et fluides restreints à Ω_p , et ϕ , σ , α_∞ , Λ et Λ' étant respectivement les grandeurs intrinsèques relatives à la porosité, permittivité au passage de l'air, tortuosité, viscosité et aux effets thermiques.

$$\begin{aligned} & -\omega^2 [(1 - \phi) \rho_{Ps} u_i^{Ps} + \rho_a u_i^{Pf}] \\ & + i\omega b(\omega) (u_i^{Ps} - u_i^{Pf}) \\ & - \sigma_{ij}^{Ps}(\mathbf{u}^{Ps}, \mathbf{u}^{Pf}) = 0 \text{ dans } \Omega_p, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & -\omega^2 [\phi \rho_{Pf} u_i^{Pf} + \rho_a u_i^{Ps}] \\ & + i\omega b(\omega) (u_i^{Pf} - u_i^{Ps}) \\ & - \sigma_{ij}^{Pf}(\mathbf{u}^{Pf}, \mathbf{u}^{Ps}) = 0 \text{ dans } \Omega_p, \end{aligned} \quad (17)$$

$$u_i^{Ps} = u_i^S \text{ sur } \Gamma_{SP}, \quad (18)$$

$$u_i^{Pf} n_i^{Pf} = -u_i^S n_i^S \text{ sur } \Gamma_{SP}, \quad (19)$$

$$[\sigma_{ij}^{Ps}(\mathbf{u}^{Ps}, \mathbf{u}^{Pf}) + \sigma_{ij}^{Pf}(\mathbf{u}^{Pf}, \mathbf{u}^{Ps})] n_j^P = -\sigma_{ij}^S(\mathbf{u}^S) n_j^S \text{ sur } \Gamma_{SP}, \quad (20)$$

$$\sigma_{ij}^{Ps}(\mathbf{u}^{Ps}, \mathbf{u}^{Pf}) n_j^P = (1 - \phi) p n_i^F \text{ sur } \Gamma_{FP}, \quad (21)$$

$$\sigma_{ij}^{Pf}(\mathbf{u}^{Pf}, \mathbf{u}^{Ps}) n_j^P = \phi p n_i^F \text{ sur } \Gamma_{FP}, \quad (22)$$

avec ρ_a et $b(\omega)$ les coefficients de couplage inertiel et visqueux entre les deux phases du poreux, donnés par :

$$\rho_a = \phi \rho_f (\alpha_\infty - 1), \quad (23)$$

$$b(\omega) = \sigma \phi^2 \left[1 + \frac{i\omega 4\alpha_\infty^2 \eta_F \rho_F}{\sigma^2 \Lambda^2 \phi^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (24)$$

Toujours en suivant la même démarche que pour la partition structurale on obtient la forme faible couplant les équations de la phase solide :

$$\begin{aligned} & -\omega^2 \int_{\Omega_p} [(1 - \phi) \rho_{Ps} u_i^{Ps} + \rho_a u_i^{Pf}] \overline{\delta u_i^{Ps}} d\Omega \\ & + i\omega b(\omega) \int_{\Omega_{Ps}} (u_i^{Ps} - u_i^{Pf}) \overline{\delta u_i^{Ps}} d\Omega \\ & + \int_{\Omega_{Ps}} \sigma_{ij}^{Ps}(\mathbf{u}^{Ps}, \mathbf{u}^{Pf}) \epsilon_{ij}^{Ps}(\overline{\delta \mathbf{u}^{Ps}}) d\Omega \\ & = \int_{\Gamma_{SP}} \sigma_{ij}^{Ps}(\mathbf{u}^{Ps}, \mathbf{u}^{Pf}) n_j^P \overline{\delta u_i^{Ps}} d\Gamma + \int_{\Gamma_{FP}} (1 - \phi) p n_i^F \overline{\delta u_i^{Ps}} d\Gamma, \end{aligned} \quad (25)$$

et de la phase fluide :

$$\begin{aligned} & -\omega^2 \int_{\Omega_p} [\phi \rho_{Pf} u_i^{Pf} + \rho_a u_i^{Ps}] \overline{\delta u_i^{Pf}} d\Omega \\ & + i\omega b(\omega) \int_{\Omega_{Ps}} (u_i^{Pf} - u_i^{Ps}) \overline{\delta u_i^{Pf}} d\Omega \\ & + \int_{\Omega_p} \sigma_{ij}^{Pf}(\mathbf{u}^{Pf}, \mathbf{u}^{Ps}) \epsilon_{ij}^{Pf}(\overline{\delta \mathbf{u}^{Pf}}) d\Omega \\ & = \int_{\Gamma_{SP}} \sigma_{ij}^{Pf}(\mathbf{u}^{Pf}, \mathbf{u}^{Ps}) n_j^P \overline{\delta u_i^{Pf}} d\Gamma + \int_{\Gamma_{FP}} \phi p n_i^F \overline{\delta u_i^{Pf}} d\Gamma. \end{aligned} \quad (26)$$

La loi de comportement des deux phases du matériau poreux s'écrit, en utilisant la convention de Voigt pour représenter les tenseurs du second ordre par des vecteurs :

$$\begin{cases} \sigma^{Ps} = \left(\lambda_{Ps} [D] + 2\mu_{Ps} [D'] + K_{Pf}(\omega) \frac{(1 - \phi)^2}{\phi} [D] \right) \epsilon^{Ps} \\ \quad + K_{Pf}(\omega) (1 - \phi) [D] \epsilon^{Pf}, \\ \sigma^{Pf} = K_{Pf}(\omega) \phi [D] \epsilon^{Pf} + K_{Pf}(\omega) (1 - \phi) [D] \epsilon^{Ps}, \end{cases} \quad (27)$$

avec de plus :

$$K_{Pf}(\omega) = \frac{P_0}{1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \left[1 + \frac{8\eta_F}{i\omega \text{Pr} \Lambda^2 \rho_F} \left(1 + \frac{i\omega \text{Pr} \Lambda^2 \rho_F}{16\eta_F} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{-1}}, \quad (28)$$

et :

$$[D] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (29)$$

$$[D'] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Suivant [1] $K_{Pf}(\omega)$ est décomposé en la somme de sa limite statique et d'une partie dépendante de la fréquence tel que :

$$K_{Pf}(\omega) = P_0 + (K_{Pf}(\omega) - P_0) = P_0 + \tilde{K}(\omega) \quad (31)$$

Les relations contraintes-déformations couplées (Eq.27) se réécrivent alors :

$$\begin{cases} \sigma^{Ps} = [D_1^{Pss}] \epsilon^{Ps} + [D_1^{Psf}] \epsilon^{Ps} \\ \quad + \tilde{K}(\omega) ([D_2^{Pss}] \epsilon^{Ps} + [D_2^{Psf}] \epsilon^{Ps}), \\ \sigma^{Pf} = [D_1^{Pff}] \epsilon^{Pf} + [D_1^{Psf}] \epsilon^{Ps} \\ \quad + \tilde{K}(\omega) ([D_2^{Pff}] \epsilon^{Pf} + [D_2^{Psf}] \epsilon^{Ps}), \end{cases} \quad (32)$$

avec :

$$[D_1^{Pss}] = \lambda_{Ps} [D] + 2\mu_{Ps} [D'] + P_0 \frac{(1-\phi)^2}{\phi} [D], \quad (33)$$

$$[D_2^{Pss}] = \frac{(1-\phi)^2}{\phi} [D], \quad (34)$$

$$[D_1^{Pff}] = P_0 \phi [D], \quad (35)$$

$$[D_2^{Pff}] = \phi [D], \quad (36)$$

$$[D_1^{Psf}] = P_0 (1-\phi) [D], \quad (37)$$

$$[D_2^{Psf}] = (1-\phi) [D]. \quad (38)$$

2.2 Discrétisation et réduction du modèle nominal

La méthode des éléments finis permet d'obtenir une équation matricielle associée au modèle nominal global, laquelle s'écrit :

$$(-\omega^2 [M^s] + i\omega [D^s] + [K_1^s] + \tilde{K}(\omega) [K_2^s]) \{\mathbf{u}^s\} = \{\mathbf{f}^s\}. \quad (39)$$

En séparant les degrés de libertés internes aux différents domaines (indice I) et degrés de libertés à l'interface (indice Γ) de telle manière que :

$$\{\mathbf{u}^s\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_I^s \\ \mathbf{U}_\Gamma^s \\ \mathbf{U}_I^p \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix}, \quad (40)$$

les différentes matrices élément-finis s'écrivent :

$$[M^s] = \begin{bmatrix} [M_{II}^s] & [M_{I\Gamma}^s] & [0] & [0] \\ [M_{\Gamma I}^s] & [M_{\Gamma\Gamma}^s] + [M_{\Gamma\Gamma}^p] & [M_{\Gamma I}^p] & [0] \\ [0] & [M_{I\Gamma}^p] & [M_{II}^p] & [0] \\ -[C_I^s]^T & -[C_\Gamma^s]^T - [C_\Gamma^p]^T & -[C_I^p]^T & [M^F] \end{bmatrix}, \quad (41)$$

$$[D^s] = \begin{bmatrix} [D_{II}^s] & [D_{I\Gamma}^s] & [0] & [0] \\ [D_{\Gamma I}^s] & [D_{\Gamma\Gamma}^s] + [D_{\Gamma\Gamma}^p] & [D_{\Gamma I}^p] & [0] \\ [0] & [D_{I\Gamma}^p] & [D_{II}^p] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [D^F] \end{bmatrix}, \quad (42)$$

$$[K_1^s] = \begin{bmatrix} [K_{II}^s] & [K_{I\Gamma}^s] & 0 & [C_I^s] \\ [K_{\Gamma I}^s] & [K_{\Gamma\Gamma}^s] + [K_{\Gamma\Gamma}^p] & [K_{\Gamma I}^p] & [C_\Gamma^s] + [C_\Gamma^p] \\ 0 & [K_{I\Gamma}^p] & [K_{II}^p] & [C_I^p] \\ 0 & 0 & 0 & [K^F] \end{bmatrix}, \quad (43)$$

$$[K_2^s] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [K_{2,\Gamma}^p] & [K_{2,\Gamma I}^p] & 0 \\ 0 & [K_{2,I\Gamma}^p] & [K_{2,II}^p] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (44)$$

Les équations de la partie structurale et de l'interface entre Ω_s et Ω_p sont projetées sur les modes structuraux à interface libre obtenus en cherchant N_r^s couples $(\lambda_j^s, \varphi_j^s)$ de $(\mathbb{R}^{++}, \mathbb{R}^{n_s})$, n_s nombre de degrés de liberté structuraux, solutions du problème aux valeurs propres (Eq.45). La concaténation des vecteurs φ_j^s donne la matrice $[\Phi^s]$. On a donc :

$$([K^s] - \lambda_j^s [M^s]) \varphi_j^s = \{\mathbf{0}\}. \quad (45)$$

Les équations de la partie acoustique sont projetées sur les modes de cavité à parois rigides obtenus en cherchant N_r^f couples $(\lambda_j^f, \varphi_j^f)$ de $(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{n_f})$, n_f nombre de degrés de liberté acoustiques, solutions du problème aux valeurs propres (Eq.46). La concaténation des vecteurs φ_j^f donne la matrice $[\Phi^f]$. On a donc :

$$([K^f] - \lambda_j^f [M^f]) \varphi_j^f = \{\mathbf{0}\}. \quad (46)$$

La résolution du problème aux valeurs propres (Eq.47) portant sur des matrices symétriques définies positives donne N_r^p couples $(\lambda_j^p, \varphi_j^p)$ de $(\mathbb{R}^{++}, \mathbb{R}^{n_{p,i}})$, $n_{p,i}$ nombre de degrés de liberté internes du poreux. La concaténation des φ_j^p permet d'obtenir la matrice $[\Phi^p]$. On a donc :

$$([K_{I,II}^p] - \lambda_j^p [M_{II}^p]) \varphi_j^p = \{\mathbf{0}\}. \quad (47)$$

Suivant la méthode de Craig-Bampton le champ de déplacement admissible sur la partition poreuse s'exprime sur la base de modes propres à interface fixe complétée par un opérateur de relèvement statique, tel que l'on puisse construire la matrice de transformation :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{U}_I^s \\ \mathbf{U}_\Gamma^s \\ \mathbf{U}_I^p \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Phi_I^s] & [0] & [0] \\ [\Phi_\Gamma^s] & [0] & [0] \\ [S_{cb}^{SP}] & [\Phi^p] & [S_{cb}^{FP}] \\ [0] & [0] & [\Phi^f] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}^s \\ \mathbf{q}^p \\ \mathbf{q}^f \end{Bmatrix} = [H] \begin{Bmatrix} \mathbf{q}^s \\ \mathbf{q}^p \\ \mathbf{q}^f \end{Bmatrix}. \quad (48)$$

Les opérateurs de relèvement statique lient la réponse statique des degrés de libertés internes à un déplacement (ou une pression pour le couplage avec le fluide) imposé sur les degrés de liberté de bord, s'écrivent de plus :

$$[S_{cb}^{SP}] = -[K_{I,II}^p]^{-1} [K_{I,\Gamma}^p] [\Phi_\Gamma^s], \quad (49)$$

$$[S_{cb}^{FP}] = -[K_{I,II}^p]^{-1} [C_\Gamma^p] [\Phi^f]. \quad (50)$$

2.3 Problématiques relatives à la réduction des équations de la phase poreuse

Rumpler a montré dans [1] que les vecteurs propres réels solutions du problème aux valeurs propres (Eq.47) constituent une base performante pour une réduction, avec pour avantages d'utiliser les modes couplés entre phases solides et fluides du poreux et une facilité d'obtention du point de vue numérique. Cette démarche présente cependant deux inconvénients importants.

Premièrement l'absence de résistance au cisaillement de la phase fluide du poreux (voir (Eq.29) et (Eq.36)) induit l'existence de nombreux modes basses fréquences couplés

à rapprocher des modes de circulation observés dans les formulations purement acoustiques (Fig.7 pour un exemple tiré du cas d'application). Dans le cadre de l'acoustique différentes solutions ont été proposées pour pallier à ce problème, par exemple dans [4], en imposant une rigidité artificielle, ou [5], par un procédé d'intégration réduite et de projection de la matrice de masse, et plus récemment dans [6] et [7], par un choix de fonctions d'interpolation respectant une contrainte d'irrationalité ou par imposition a posteriori de cette dernière. Cependant il est montré par Davidsson [8] et Horlin [9] que l'ajout d'une contrainte d'irrotationnalité du fluide dans le cas des poreux ne permet pas de représenter l'intégralité du comportement dynamique du fait des couplages existant entre les deux phases.

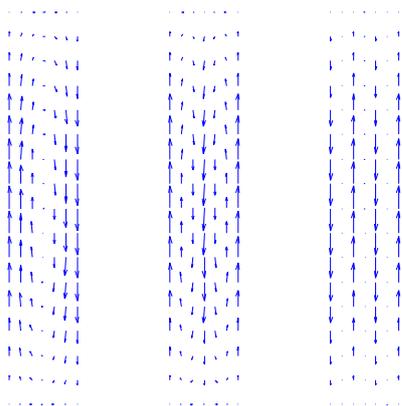


FIGURE 2 – Exemple de modes de cisaillement de la phase poreuse tiré du cas d'application.

D'autre part les équations projetées sont celles de (Eq.39), les sous-matrices $[D_{II}^P]$ et $[K_{2,II}^P]$ imparfaitement diagonalisées amènent à des couplages forts (Figure 3) entre modes de fréquences propres éloignées : un nombre important de modes hors bande d'étude doit donc être pris en compte pour assurer la convergence.

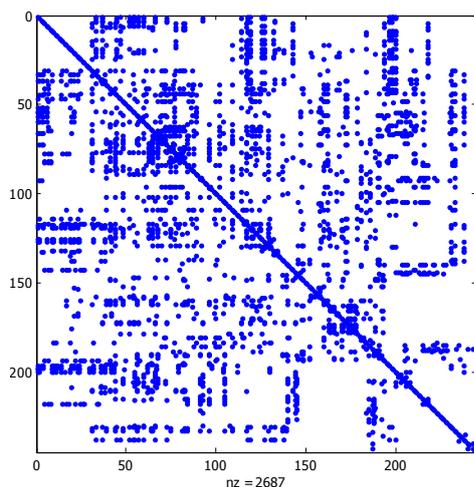


FIGURE 3 – Diagonalisation imparfaite d'une matrice $[K_{2,II}^P]$ projetée, issue de la décomposition de domaine effectuée pour le cas d'application.

La construction de cette base pour un système de grande taille devient ainsi coûteuse car de nombreux modes sont présents sur la bande d'étude et de nombreux modes doivent être calculés hors de la bande d'étude. Le processus de résolution est de plus désavantagé par la mauvaise sparsité.

La solution proposée dans ce travail consiste à construire la base de réduction de la phase poreuse par décomposition de domaine en utilisant la sous-structuration de Craig-Bampton. Le domaine poreux est ainsi décomposé en sous-domaines et le champ de déplacement admissible sur ces derniers s'exprime sur la base des modes à interface fixe complétée par un opérateur de relèvement statique. Si la taille de la base finale à convergence est de taille comparable sans réduction des interfaces, le temps dédié à sa construction est grandement diminué (problèmes aux valeurs propres sur sous-domaines de taille moindre) avec de plus l'avantage d'être parallélisable. D'autre part, du fait que les couplages entre sous-domaines poreux se fassent uniquement au travers de leurs interfaces communes, la sparsité de la matrice réduite est grandement améliorée : la diagonalisation imparfaite ne porte alors que sur un sous-domaine, soit sur un bloc de la matrice de rigidité dynamique, et non pas sur son intégralité. Cette démarche est de plus particulièrement intéressante dans le cas des systèmes multi-couches, dont les épaisseurs comportent peu de degrés de liberté, et qui peuvent donc être décomposées en créant des interfaces de faibles dimensions.

3 Cas d'application

La performance d'un mur à structure légère est évaluée en conditions de laboratoire. Le système dynamique dans sa totalité comprend ainsi une salle dite "d'émission", l'élément à évaluer et une salle dite de "réception" (Figure 4). La salle d'émission a pour dimensions 5.850m x 4.320m x 3.000m, la salle de réception 5.390m x 3.800m x 2.800m et le mur évalué 3.800m x 2.550m.

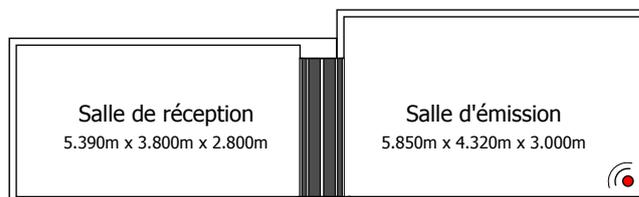


FIGURE 4 – Dispositif d'évaluation de l'indice d'affaiblissement acoustique d'une paroi.

Le mur considéré est un système dit double séparatif (Figure 5), conçu symétrique autour d'une lame d'air il ne présente pas de chemin de transmission structural direct. Il est composé d'une ossature principale de dix-huit montants en bois (neuf de chaque côté) uniformément répartis et entre lesquels est disposé un isolant poreux, de deux panneaux de contreventement en OSB, d'une ossature secondaire de dix-huit tasseaux verticaux (entre lesquels un vide d'air est laissé) sur lesquels viennent s'appuyer les quatre plaques de parement en plâtre BA13. Tous les contacts sont supposés parfaits, les éléments d'ossature encastés à leurs extrémités et les plaques en appuis simples sur leurs bords.

Les éléments finis volumiques solide (ossature et phase poreuse structurale) et de coques minces (plâtre et OSB) avec degré de liberté de rotation normal sont construits suivant les références [10], [11] et [12]. L'intégration réduite des contraintes de cisaillement et une flexibilité corrigée des éléments de coque permettent d'éviter les phénomènes de blocages. Les éléments utilisés pour discrétiser les phases

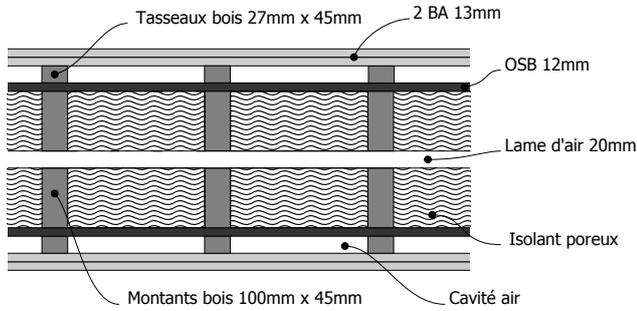


FIGURE 5 – Vue en coupe verticale du mur étudié.

fluides acoustiques et poreuses sont iso-paramétriques à intégration complète.

L'excitation du système est produite par une source acoustique d'intensité unitaire placée dans un coin inférieur de la pièce émettrice : le champ de pression incident définissant l'excitation structurale sur le mur ainsi que le niveau de pression quadratique moyen dans cette pièce (intégration sur le volume entier) sont calculés à partir de la solution analytique (Eq.51) de l'équation d'Helmholtz (Eq.11) sans dissipation dans une cavité parallélépipédique. La projection du champ de déplacement résultant sur la face du panneau en contact avec la pièce réceptrice sur les modes de cette dernière permet de calculer le niveau de pression quadratique moyen associé sur tout le volume. Le rapport des deux niveaux de pression quadratique moyens, noté R et exprimé en dB, est utilisé pour évaluer la performance du mur.

$$P_{Salle}(x, y, z) = \sum_{m,n,p} \mathcal{A}_{mnp} \cos\left(\frac{m\pi}{L_x}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L_y}y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{L_z}z\right) \quad (51)$$

La Figure 6 compare, pour le modèle nominal dont les paramètres sont données dans le Tableau 1, la solution obtenue avec la base de réduction proposée et la solution directe. La Figure 7 compare l'indice d'affaiblissement en tiers d'octave obtenu pour le modèle nominal avec une mesure effectuée en laboratoire.

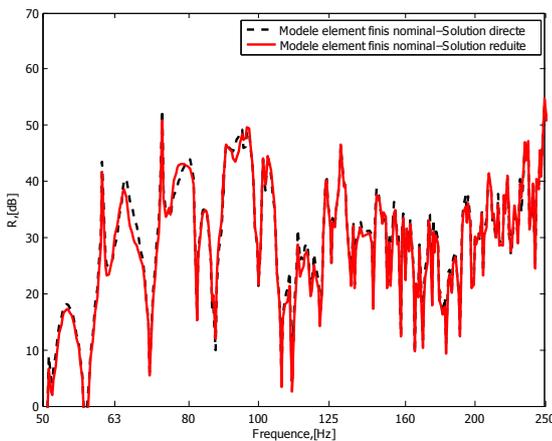


FIGURE 6 – Indice d'affaiblissement acoustique obtenu avec résolution directe et base réduite.

La base de réduction proposée permet ainsi une bonne représentation de la dynamique du système. Sur le domaine poreux 1160 modes couplés seraient nécessaires sur chacune des seize bandes d'isolant pour obtenir convergence. En décomposant ces domaines en quatre partitions 260 modes poreux sont alors nécessaires par partition, auxquels s'ajoutent 350 degrés de liberté d'interface.

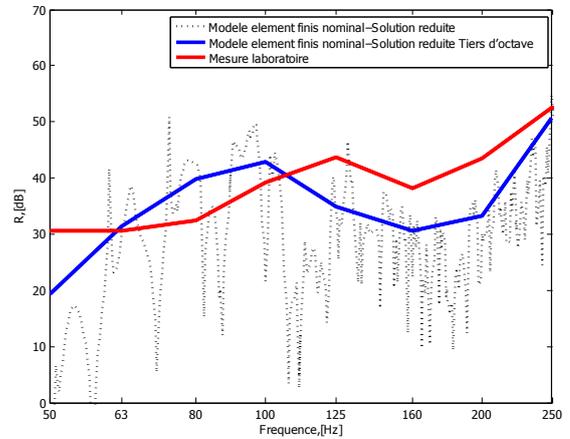


FIGURE 7 – Comparaison du modèle nominal prédictif et d'une mesure en laboratoire.

À titre de comparaison la performance d'une seconde configuration admissible lors d'un processus d'optimisation topologique est comparée à la mesure. Ce système (Figure 8) est en tout point identique au premier à l'exception de la position des plaques d'OSB servant de contreventement dans la cloison à double ossature.

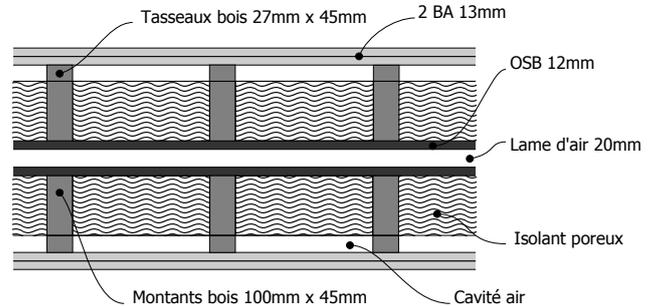


FIGURE 8 – Vue en coupe verticale de la seconde configuration étudiée.

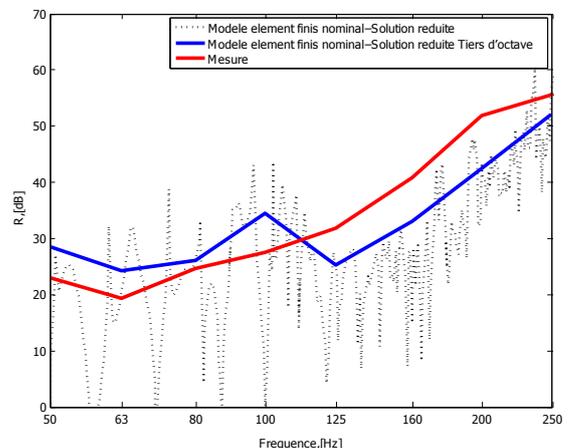


FIGURE 9 – Comparaison du modèle nominal prédictif et d'une mesure en laboratoire pour la deuxième configuration.

Le modèle s'accorde ainsi relativement bien avec l'expérience compte tenu des grandes variabilités observées en basses fréquences et de la dépendance à l'excitation : en dessous de 100Hz les similitudes entre les singularités en fréquence sur les performances en bande fine de ces deux configurations marquent bien l'influence du comportement modal des salles. Tenir compte de ces variabilités est une des perspectives de ce travail de recherche.

TABLEAU 1 – Paramètres physiques du modèle sur la bande de fréquence d'étude.

| Paramètre | Valeur numérique |
|--|--|
| Mod. d'Young bois | 9.289 GPa |
| Coeff. Poisson bois | 0.39 |
| Densité bois | 420 kg/m ³ |
| Facteur de perte bois | 0.05 |
| Mod. d'Young OSB | 4.6 GPa |
| Coeff. Poisson OSB | 0.1 |
| Densité OSB | 650 kg/m ³ |
| Facteur de perte OSB | 0.05 |
| Mod. d'Young plâtre | 0.675 GPa |
| Coeff. Poisson plâtre | 0.1 |
| Densité plâtre | 725 kg/m ³ |
| Facteur de perte plâtre | 0.03 |
| Mod. d'Young isolant poreux | 400 kPa |
| Coeff. Poisson isolant poreux | 0 |
| Densité isolant poreux ρ_{Ps} | 70 kg/m ³ |
| Porosité isolant poreux ϕ | 0.9 |
| Perméabilité isolant poreux σ | 50000 N.s/m ⁴ |
| Tortuosité isolant poreux α_∞ | 1 |
| Long. car. visqueuse isolant poreux Λ | 60 μ m |
| Long. car. thermique isolant poreux Λ' | 150 μ m |
| Densité air ρ_F | 1.21 kg/m ³ |
| Célérité du son air c_F | 340 m/s |
| Nombre de Prandtl Pr | 0.72 |
| Coeff. viscosité dynamique air η_F | 1.81×10^{-5} N.s/m ² |

4 Conclusion

Une base pour la réduction des systèmes vibro-acoustiques dissipatifs avec matériaux poro-élastiques du bâtiment a été proposée, permettant la réduction des interfaces de grande taille entre partitions structurales et poreuses intrinsèques aux structures multi-couches. Une solution est de plus mise en avant pour dépasser les principaux inconvénients relatifs à la mise en œuvre, sur un système de taille réelle, de l'idée de Rumpler [1] d'utiliser les modes poro-élastiques couplés calculés sur les opérateurs exprimés en formulation déplacement-déplacement. La sous-structuration de Craig-Bampton appliquée sur le domaine poreux permet à la fois parallélisation du calcul et amélioration de la sparsité globale en localisant les couplages inertiels et visqueux, dus à la non-diagonalisation des opérateurs dépendants de la fréquence, sur les sous-domaines poreux.

Remerciements

Les auteurs remercient le département Recherche et Développement du CSTB pour le financement de ce travail.

Références

- [1] R. RUMPLER . *Efficient Finite Element Approach For Structural-Acoustic Applications Including 3D Modeling Of Sound Absorbing Porous Materials*. Thèse de doctorat, CNAM - KTH, 2012.
- [2] R. OHAYON, C. SOIZE . *Structural Acoustics and Vibration*. Academic Press, 1998.
- [3] J.F. ALLARD, N. ATALLA . *Propagation of Sound in Porous Media*. Wiley, 2009.
- [4] M. A. HAMDI, G. VERCHERY . A displacement method for the analysis of systems vibrations of coupled fluid-structure. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 13, 1978.
- [5] H. C. CHEN, R.L. TAYLOR . Vibration analysis of fluid-solid systems using a finite element displacement formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29, 1990.
- [6] A. BERMUDEZ, R. RODRIGUEZ . Finite element computation of the vibration modes of a fluid-solid system. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 119, 1994.
- [7] K.C. PARK, C.A. FELIPPA, R. OHAYON . Partitioned formulation of internal fluid-structure interaction problems by localized lagrange multipliers. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190, 2001.
- [8] P. DAVIDSSON . *Structure-Acoustic Analysis; Finite Element Modeling And Reduction Methods*. Thèse de doctorat, Lund Institute of Technology, 2006.
- [9] N.-E. HORLIN . A symmetric weak form of biot's equations based on redundant variables representing the fluid, using a helmholtz decomposition of the fluid displacement vector field. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 84, 2010.
- [10] W.R. CASE, E. VANDEGRIFT . Improved isoparametric solid and membrane elements. *In Proceedings Fourteenth NASTRAN Users' Colloquium*, 1986.
- [11] R.H. MACNEAL . A simple quadrilateral shell element. *Computers and Structures*, 8, 1978.
- [12] R.H. MACNEAL, R.L. HARDER . A refined four-noded membrane element with rotational degrees of freedom. *Computers and Structures*, 28, 1988.