



Ondes de Choc de Cisaillement Focalisées dans les Solides Mous

B. Giammarinaro^a, F. Coulouvat^b et G. Pinton^a

^aUPMC, CNRS UMR 7190, 4 place Jussieu, 75252 Paris, France

^bInstitut Jean le Rond d'Alembert, 4 place Jussieu, 75252 Paris, France

giam@dalembert.upmc.fr

La cause de certaines lésions cérébrales appelées axonales diffuses, conséquences des traumatismes crâniens, reste encore mal comprise. Une hypothèse serait qu'elles résultent de la focalisation par la forme du crâne d'ondes de choc de cisaillement. Dans cette hypothèse, l'étude de l'élasticité non linéaire dans les tissus biologiques comme le cerveau s'avère indispensable. A cette fin, on étudie ici la focalisation à deux dimensions d'ondes de choc de cisaillement polarisées transverses et modélisées dans le cadre de l'approximation paraxiale. La non-linéarité décrite est cubique, introduisant ainsi une physique des chocs de cisaillement différente de celle des chocs de compression. Une équation de type KZK généralisée est résolue par un schéma numérique à pas fractionnés du second ordre utilisant des méthodes aux différences finies en régime temporel pour la diffraction et la non-linéarité, alors que l'absorption est traitée dans le domaine fréquentiel. Le schéma est validé dans le cas non linéaire par une loi de similitude de Guiraud pour le cas d'une caustique cuspidée. La focalisation résultant de la courbure du crâne est ensuite simulée pour un milieu de propagation référencé. Les champs de vitesse sont analysés pour différentes amplitudes de choc.

Introduction

Les traumatismes crâniens sont la cause de nombreux cas de décès ou d'incapacités de longue durée consécutives à des accidents de circulation [18], sportifs comme pour la boxe [20], ou des attentats [16]. L'impact crânien pourrait produire des ondes de choc se propageant dans le cerveau et entraînant dans celui-ci des lésions cérébrales. Comme tous les tissus mous biologiques, le cerveau est un milieu quasi-incompressible, pour lequel la vitesse des ondes de compression, proche de celle de l'eau (1500m/s) est très grande devant celle des ondes de cisaillement [23, 19] de l'ordre de 2.5m/s. Par ailleurs, des études d'impact balistique [14] ont mesuré des accélérations de déplacement global d'un crâne correspondant à des vitesses de l'ordre de 8m/s. Pour les ondes de cisaillement se propageant dans ces conditions, le nombre de Mach est très élevé et on s'attend à ce que les effets d'élasticité non linéaire jouent un rôle prédominant. En outre, la géométrie courbe du crâne peut aussi conduire à des effets de focalisation. L'objectif de la présente étude est donc d'étudier ces effets de focalisation non linéaire en cisaillement pour des tissus biologiques. Les ondes de choc de cisaillement ont été observées pour la première fois relativement récemment [4, 3] grâce au développement des méthodes d'imagerie échographique rapide, entraînant ainsi le développement des équations de propagation pour les ondes planes en élasticité non linéaire dans les milieux mous supposés incompressibles [22]. Ces équations sont semblables à celles de l'acoustique des chocs compressibles, mais avec une non-linéarité cubique au lieu de quadratique. Les modèles d'onde plane ont ensuite été étendus à la propagation tri-dimensionnelle dans le cadre de l'approximation paraxiale [21]. En cas de polarisation transverse linéaire, les équations obtenues se réduisent à une équation de type Khokhlov-Zabolotskaya-Kuznetsov [10] avec une non-linéarité cubique. Cette constatation autorise l'utilisation de méthodes de résolution déjà implémentées pour l'équation KZK [11]. Ainsi, a été étudié le cas de la réflexion de Mach pour des ondes de cisaillement [13].

La première partie de ce papier présente le modèle théorique utilisé, ainsi que les méthodes de résolution numérique associées. Dans la seconde partie, ces méthodes seront validées en insistant plus particulièrement sur la spécificité des non-linéarités cubiques. Dans une troisième partie, on présentera une première simulation traitant de la focalisation en cisaillement non linéaire dans une configuration représentative d'un traumatisme crânien. Notons que les simulations existantes d'ondes de choc dans le cerveau [19] ne prennent pas en compte l'élasticité non

linéaire des tissus.

1 Modèles théoriques et numériques

Dans les solides incompressibles, l'équation pour la propagation non linéaire à deux dimensions des ondes de cisaillement polarisées linéairement dans le cadre de l'approximation paraxiale standard [21] est :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial X \partial T} = \frac{c_T}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{\beta}{3c_0^3} \frac{\partial^2 V^3}{\partial T^2} + a(T)V. \quad (1)$$

Ici, V est la vitesse particulière selon l'axe de polarisation Z , transverse au plan de propagation (X, Y) . La variable $T = t - X/c_T$ est le temps retardé dans la direction principale de propagation X avec t la variable temporelle et c_T la célérité des ondes de cisaillement linéaires dans un milieu de masse volumique ρ . Ici, nous introduisons un opérateur $a(\tau)V$ linéaire de dispersion et d'absorption. Cette forme empirique permet d'utiliser des lois d'absorption plus proches de celles mesurées dans les solides mous.

L'expression de la densité d'énergie repose sur les invariants de Landau et Lifschitz [8]. Ils autorisent la séparation entre les ondes de cisaillement et de compression pour un milieu isotrope. Dans un milieu quasi-incompressible, on a l'expression :

$$E = \mu I_2 + \frac{A}{3} I_3 + D I_2^2, \quad (2)$$

où $I_2 = Tr(\mathbf{u}^2)$, $I_3 = Tr(\mathbf{u}^3)$ et \mathbf{u} le tenseur des déformations. Dans l'expression ci-dessus, $\mu = \rho c_T^2$ est le module de cisaillement, et A et D sont respectivement les constantes élastiques du troisième et quatrième ordre. Le paramètre β pour les non-linéarités cubiques est une combinaison de ces constantes élastiques [22]

$$\beta = \frac{3}{2} \left(1 + \frac{\frac{A}{2} + D}{\mu} \right). \quad (3)$$

Eq.(1) est une généralisation de l'équation KZK [10] pour des non-linéarités ici cubiques, au lieu de quadratiques pour les ondes de compression.

Eq.(1) est réécrite en vue d'une résolution numérique par différences finies [11], en utilisant les variables sans dimension définies pour une caustique cuspidée [5] :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \int \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} d\tau + \gamma \frac{\partial v^3}{\partial \tau} + A(\tau)v \quad (4)$$

avec $A(\tau)v = \int_{-\infty}^{\tau} a(\tau')v(\tau')d\tau'$. Les nouvelles variables sont définies par :

$$\begin{cases} x = \frac{X}{L_x}, & L_x = \left(\frac{4R_0}{27k_0}\right)^{1/2} \\ y = \frac{Y}{L_y}, & L_y = \left(\frac{R_0}{27k_0^2}\right)^{1/4} \\ \tau = \omega_0 T \\ v = \frac{V}{V_0} \\ \gamma = \end{cases} \quad (5)$$

où R_0 est le paramètre caractérisant la géométrie de la caustique, V_0 est l'amplitude de la vitesse émise, k_0 et ω_0 sont respectivement le nombre d'onde et la fréquence angulaire centrale du signal émis.

La méthode numérique de résolution de Eq.(4) repose sur un schéma à pas fractionnés séparant les opérateurs de diffraction, non linéaires et d'absorption. Les opérateurs de diffraction et non linéaires sont traités dans le domaine temporel alors que l'opérateur d'absorption est traité dans le domaine fréquentiel afin d'inclure naturellement les lois d'absorption empiriques mesurées dans les solides mous. Globalement le schéma est d'ordre 2, et afin de conserver cet ordre, nous utilisons un schéma à pas fractionnés du second ordre [17] qui s'écrit :

$$v(x + \Delta x) = L_{D,\Delta x/2} \circ L_{A,\Delta x/2} \circ L_{N,\Delta x} \circ L_{A,\Delta x/2} \circ L_{D,\Delta x/2}(v(x)) \quad (6)$$

où $L_{O,\Delta x}$ décrit la solution d'une sous-équation $\partial v/\partial x = O(v)$ sur la distance de propagation Δx . Cette méthode introduit naturellement les opérateurs de diffraction ($L_{D,\Delta x} = \int \partial^2 v/\partial y^2 d\tau$), non linéaires ($L_{N,\Delta x} = \gamma \partial v^3/\partial \tau$), et d'absorption ($L_{A,\Delta x} = A(\tau)v$). Le symbole \circ est utilisé pour décrire l'ordre d'utilisation des opérateurs de droite à gauche pour le second membre de Eq.(6).

L'étape intermédiaire de diffraction est effectuée dans le domaine temporel par une méthode aux différences finies similaire à celle de Lee et Hamilton [11] mais avec une approximation de l'intégrale par la méthode des trapèzes, et un avancement en x selon un schéma semi-implicite inconditionnellement stable de Crank-Nicolson, l'ensemble étant donc ici du second ordre. Le calcul de l'absorption et de la dispersion s'effectue dans le domaine spectral en utilisant une Transformée de Fourier Temps-Fréquence (TF) $\hat{v}(\omega)$ de la vitesse particulière $v(\tau)$ et en appliquant la loi d'absorption :

$$L_{A,\Delta x}(v(x, y, \tau)) = TF^{-1} \left[\hat{v}(x, y, \omega) e^{-\alpha(\omega)\Delta x} \right], \quad (7)$$

avec $\alpha(\omega)$ le coefficient complexe d'absorption et de dispersion linéaire à la fréquence angulaire ω . L'opérateur non linéaire apparaît comme une loi de conservation similaire à l'équation de Burgers non visqueuse mais avec une non-linéarité cubique au lieu de quadratique. La méthode sélectionnée est le schéma hybride de MacDonald et Ambrosiano [12], combinant un schéma au premier ordre dissipatif près des chocs, et un schéma du second ordre dispersif loin de ceux-ci. Cependant, le limiteur de flux initialement utilisé est remplacé par le limiteur de flux "minmod". Contrairement au schéma pour la diffraction, le schéma non linéaire est explicite et doit satisfaire une condition de stabilité de type CFL [1] :

$$\left| 3\gamma v_{max}^2 \frac{\Delta x}{\Delta \tau} \right| \leq 1 \quad (8)$$

où v_{max} est le maximum de la vitesse particulière, Δx et $\Delta \tau$ respectivement les pas en x et τ . Il s'agit d'une condition restrictive car elle implique que la stabilité dépend de l'amplitude de la vitesse calculée localement, ce qui peut devenir pénalisant en cas de forte focalisation. Cependant, la condition de stabilité dans le cas des milieux absorbants est moins contraignante en présence d'absorption car, l'amplitude maximale étant moins élevée, le maillage n'a pas besoin d'être aussi fin.

2 Validation

2.1 Cas non linéaire 1D

La résolution numérique pour l'équation de conservation cubique à une dimension :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \gamma \frac{\partial v^3}{\partial \tau} \quad (9)$$

est illustrée sur Fig.(1). Elle montre, dans le cas d'une onde sinusoïdale en $x = 0$, le signal calculé après une propagation sur deux fois la distance de choc. Celle-ci est ici $L_x = \frac{c_T^3}{\beta \omega_0 v_0^2}$. L'algorithme de capture du choc est implémenté en utilisant deux limiteurs de flux : celui de Boris et Book initialement proposé [2], et le limiteur de flux "minmod". Les algorithmes donnent des solutions de la forme attendue avec une succession périodique de chocs "positifs" et "négatifs" typiques des non-linéarités cubiques. Cependant, le limiteur de Boris et Book mène à un artefact numérique, aplanissant localement la forme d'onde juste avant chaque choc. Cet artefact est supprimé avec l'utilisation du limiteur "minmod".

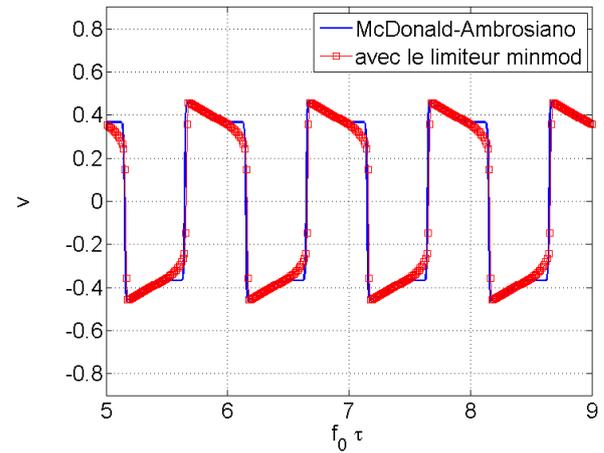


FIGURE 1 – Signaux, à la position $x = 2L_x$, calculés pour le cas d'une onde plane sinusoïdale en entrée de fréquence f_0 en utilisant le schéma de MacDonald-Ambrosiano avec le limiteur de flux "minmod" (ligne avec marqueurs) ou celui de Boris and Book (ligne sans marqueur).

2.2 Cas non linéaire 2D : loi de similitude de Guiraud

L'algorithme de résolution pour Eq.(4) peut être validé dans un cas non linéaire sans dissipation ($A = 0$). En effet, dans ce cas, une loi de similitude non linéaire peut être

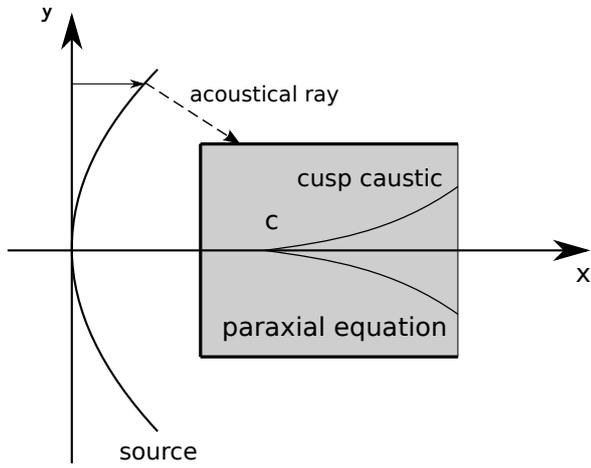


FIGURE 2 – Domaine de calcul utilisé pour une caustique cuspidée avec C le point caustique géométrique

établie pour le cas particulier d'une caustique cuspidée, pour laquelle les conditions aux limites aux bords du domaine numérique appliquées suffisamment loin du point focal, sont définies par [5] :

$$v(x, y, \tau) = \frac{1}{\sqrt{|6\alpha^2 - x|}} F(\tau + \alpha y + \alpha^2 x - \alpha^4) \quad (10)$$

où $\alpha(x, y)$ est l'unique racine réelle du polynôme $4\alpha^3 - 2\alpha x - y = 0$ et F une onde de choc de type marche définie par :

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 & t > 0. \end{cases} \quad (11)$$

Comme F n'a pas de temps caractéristique, il existe une solution auto-similaire : il s'agit d'une généralisation de la loi de similitude de Guiraud établie pour les non-linéarités quadratiques, pour les caustiques de type "pli" [7] puis pour les caustiques cuspidées [5]. La similitude est établie en introduisant les variables auto-similaires (notées avec une barre supérieure) :

$$\begin{cases} v &= \gamma^{-1/4} \bar{v} \\ x &= \gamma^{1/2} \bar{x} \\ y &= \gamma^{3/4} \bar{y} \\ \tau &= \gamma \bar{\tau} \\ \alpha &= \gamma^{1/4} \bar{\alpha}. \end{cases} \quad (12)$$

Le changement de variables Eq.(12) rend l'Eq.(4) ainsi que les conditions aux limites Eq.(10) indépendante du paramètre d'amplitude γ . En réintroduisant les variables physiques avec dimensions, la première équation de Eq.(12) montre que le champ de vitesse focalisé varie comme la puissance 1/2 de l'amplitude du champ en entrée, soit une puissance différente du cas des non-linéarités quadratiques (puissance 1/2 au lieu de 2/3 [5]). La loi de similitude est vérifiée numériquement en résolvant Eq.(4) et les conditions aux limites Eq.(10) pour différentes valeurs du paramètre γ . Le résultat est ensuite réexprimé en fonction des variables auto-similaires pour tester l'auto-similarité de la solution numérique. Notons que la solution numérique est calculée sur un domaine fixe en variables sans dimension (x, y, τ) pour les différentes valeurs du paramètre γ . Cependant, afin de suivre la dépendance des variables Eq.(12) en fonction du paramètre γ , il est nécessaire d'augmenter le nombre de points de maillage quand γ diminue.

Fig.(3) montre la position, l'instant et l'amplitude du maximum du champ de vitesse, tracé en variables auto-similaires pour des valeurs du paramètre γ comprises entre 0,05 et 1. Notons que ce point est localisé sur l'axe $y = 0$ à cause de la symétrie, mais non sur le point focal géométrique $x = 0$ en raison de la diffraction et des effets non linéaires. Les résultats montrent que la relation de similitude de Guiraud est vérifiée car les paramètres en variables auto-similaires sont bien constants. Cependant, les variables position et amplitude du point focal vérifient la loi de similitude de Guiraud avec une meilleure précision que la variable temporelle. Celle-ci en effet peut atteindre une variation de l'ordre de 10%, en particulier pour les simulations faiblement non linéaires. Fig.(4) montre la forme de l'onde calculée au point du maximum d'amplitude pour trois valeurs du paramètre γ . Les trois formes d'onde temporelles sont extrêmement similaires mais celle correspondant à la plus petite valeur de γ est légèrement décalée en temps. On peut observer la dispersion numérique responsable du signal non physique présent avant le choc. Comme le schéma numérique introduit aussi de la dissipation numérique avec la partie non linéaire, la combinaison de la dispersion et de la dissipation numériques explique possiblement le comportement moins bon de la variable temporelle qui s'avère plus sensible aux erreurs de dispersion numérique. Une autre source d'erreur réside dans les conditions aux limites qui sont sur un domaine fixe alors qu'elles devraient théoriquement être appliquées à une distance infinie du point focal. Ainsi, la condition de longues distances pour les conditions aux limites est mieux satisfaite pour les simulations numériques dans le cas des faibles valeurs de γ . Cependant, au vu de l'excellent comportement pour l'amplitude v , on peut en conclure que la loi de similitude de Guiraud est satisfaite, ce qui complète l'étape de validation du code.

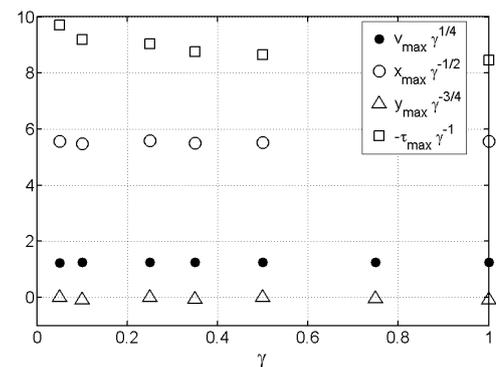


FIGURE 3 – Valeurs des variables auto-similaires \bar{x} (cercle), \bar{y} (triangle), \bar{v} (disque), $-\bar{\tau}$ (carré) du point d'amplitude maximale pour différentes valeurs de γ .

3 Focalisation non linéaire dans le cerveau

Le schéma numérique a été validé pour des cas de propagation faiblement à fortement non linéaire. Il peut maintenant être utilisé pour simuler des configurations plus réalistes. L'objectif de cette partie est donc de présenter un cas de focalisation dans un solide mou, suivant une

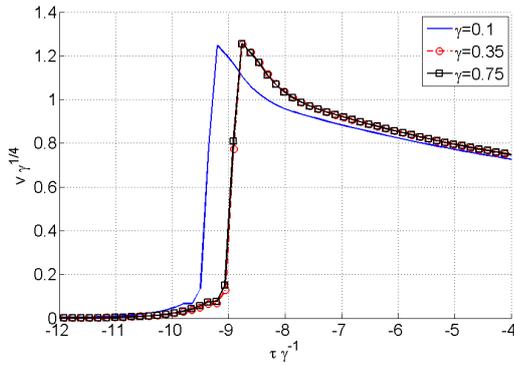


FIGURE 4 – Vitesse particulière en variables auto-similaires calculée au point d’amplitude maximale pour $\gamma = 0.1$ (ligne), $\gamma = 0.35$ (cercle) et $\gamma = 0.75$ (carré).

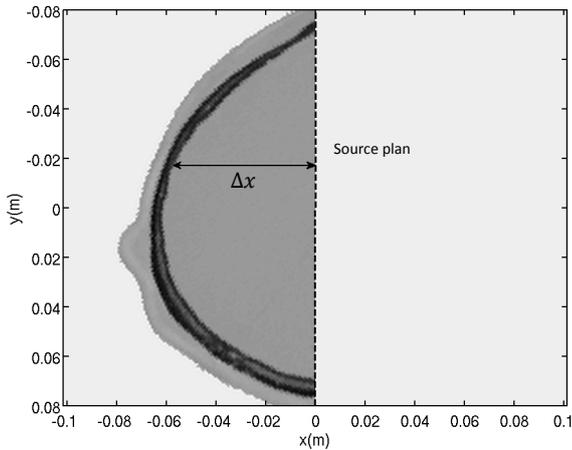


FIGURE 5 – Partie de crâne utilisée dans les simulations

configuration (géométrie et milieu) plus réaliste quant à approcher un traumatisme crânien. L’Eq.(1) supposant une source plane, la géométrie du crâne est approchée par la méthode des temps de retard : chaque point du plan de la source émet ainsi la même onde mais avec un déphasage défini par le décalage temporel $\Delta T(y) = \Delta X(Y)/c_T$ où $\Delta X(Y)$ représente la distance entre le point d’ordonnée Y et le plan source (cf Fig.(5)). La géométrie du crâne utilisée provient d’images d’un crâne humain obtenues par IRM, et interpolées à deux dimensions par des polynômes d’ordre 50 afin de supprimer les effets de pixellisation de la source. La Fig.(5) montre le résultat de cette interpolation qui permet de clairement distinguer l’os (foncé), la peau à l’extérieur et le cerveau à l’intérieur (grisé). La surface intérieure de l’os est alors choisi comme source. Cette surface intérieure présente ainsi un rayon de courbure moyen de l’ordre de $5cm$ pouvant induire des effets de focalisation, mais également des irrégularités à des échelles plus petites de l’ordre du millimètre qui pourraient entraîner des fluctuations du champ.

Pour les simulations, il faudrait utiliser les propriétés élastiques du cerveau. Cependant, elles ne sont pas toutes déterminées, notamment les paramètres non linéaires. Le module de cisaillement et la densité de la matière grise ont été évalués à $\mu = 6.4kPa$ et $\rho = 1.04$ [19]. Cela donne ainsi une vitesse de propagation $c_T = 2.48m/s$. Comme on ne connaît pas de mesures des paramètres élastiques non linéaires de la matière grise, on utilise un milieu de

substitution documenté [15] ayant des propriétés élastiques similaires : ce milieu est un gel Agar-Gélatine contenant 5% de gélatine et 3% d’agar. Ses paramètres non linéaires ont été mesurés par des méthodes d’acousto-élasticité [6] (constante élastique du troisième ordre A) et d’acoustique non linéaire (paramètre β) [15]. Le module de cisaillement est dans ce cas $\mu = 6.6kPa$, la vitesse de propagation $c_T = 2.52m/s$ et le coefficient non linéaire $\beta = 4$. Le coefficient d’absorption à la fréquence $f_0 = 100Hz$ est $\alpha(f_0) = 8.6Np/m$. La loi d’absorption est une loi empirique, linéaire en fonction de la fréquence :

$$\alpha(f) = \alpha(f_0) \frac{f}{f_0}. \quad (13)$$

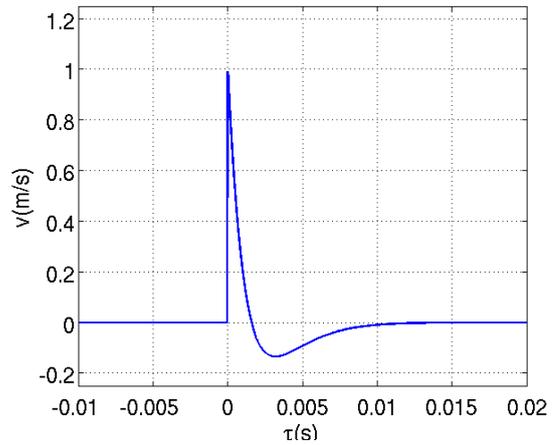


FIGURE 6 – Onde de Kinney présentée pour $v_{max} = 1m/s$

Pour les simulations, le signal temporel émis est une onde de Kinney caractéristique d’une onde de choc [9] et définie comme un signal impulsionnel avec un choc initial suivi d’une onde de détente et d’une phase de recompression :

$$V_0(T) = V_{max} \left(1 - \frac{T}{t_d} \right) e^{-a \frac{T}{t_d}} H(T) \quad (14)$$

Ici, t_d est la durée de la phase positive, a est un coefficient sans dimension caractéristique de la phase de recompression et $H(T)$ est la fonction de Heaviside (cf Fig.(6)). Les paramètres choisis sont $a = 1$ et $t_d = 1.59 \times 10^{-3}s$ de façon à obtenir une moyenne nulle et une fréquence centrale proche de $f_0 = 100Hz$ correspondant à des temps caractéristiques observés lors d’expériences sur des porcs placés dans des tubes à choc [16]. Les vitesses de déplacement globales d’un crâne mesurées dans une étude d’impact balistique [14] ont été montrées pouvant atteindre des valeurs de l’ordre de $8m/s$. La vitesse maximale V_{max} utilisée dans cette étude sera donc au plus $8m/s$. Cette valeur correspond donc à des propagations fortement non linéaires, avec des nombres de Mach proches de 3.

Les simulations présentées sont effectuées avec une fréquence d’échantillonnage temporel de $9000Hz$, soit des signaux de $N_t = 1201$ points. La fréquence d’échantillonnage doit permettre de contenir suffisamment de hautes fréquences pour observer les chocs. La difficulté de l’onde de Kinney est son spectre qui est théoriquement infini. La direction transverse Y est échantillonnée sur $N_y = 690$ points tandis que la direction de propagation selon X est calculée sur $N_x = 3240$ points mais sous-échantillonnée à

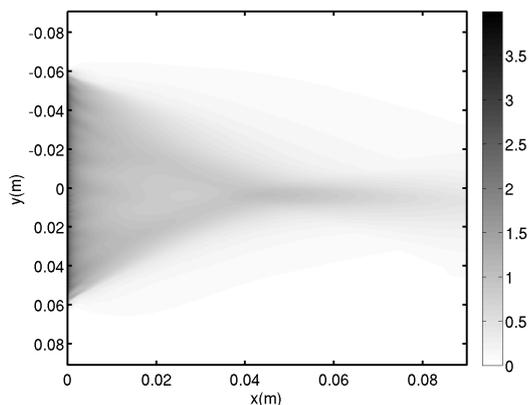


FIGURE 7 – Vitesse particulière maximale calculée sur le domaine de propagation pour $V_{max} = 4m/s$.

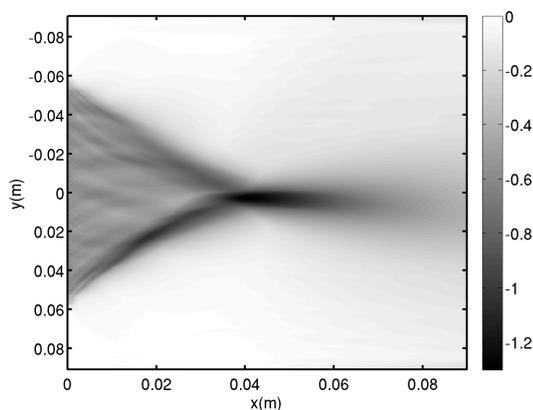


FIGURE 8 – Vitesse particulière minimale calculée sur le domaine de propagation pour $V_{max} = 4m/s$.

810 points sur les figures. Le nombre de points de calcul selon X est évalué pour satisfaire la condition de stabilité Eq.(8).

Fig.(7) présente la vitesse maximale calculée en tout point du domaine de propagation pour $V_{max} = 4m/s$. Elle montre une faible focalisation de l'onde pour la vitesse maximale lors de la propagation. Ceci est dû 1) à la forte dissipation non linéaire du choc initialement présent et 2) à la forte absorption des ondes de cisaillement aux fréquences élevées contenues dans le choc. Cependant, la Fig.(8) représentant la vitesse minimale, montre que celle-ci au contraire focalise de manière significative avec une amplification d'un facteur 3 environ. La partie négative du signal initial ne présentant pas de choc, elle est focalisée par les effets de courbure géométrique du crâne. En amplitude à la source, la phase négative est environ 10 fois plus faible que la phase positive. Les non-linéarités étant cubiques, elles sont donc 100 fois plus faibles pour la phase négative et donc ne sont pas suffisantes pour contrebalancer les effets de focalisation géométrique. La distance de choc peut être estimée égale à $0,4mm$ pour la phase positive et $4cm$ pour la phase négative. Ce résultat selon lequel on a focalisation pour la phase négative mais pas pour la phase positive, est obtenu pour toutes les amplitudes initiales en vitesse de $1m/s$ à $7m/s$. Les oscillations transverses du champ proche en amont de la focalisation sont également clairement visibles sur la vitesse minimale et résultent des fluctuations

à échelle millimétrique de la paroi intérieure du crâne.

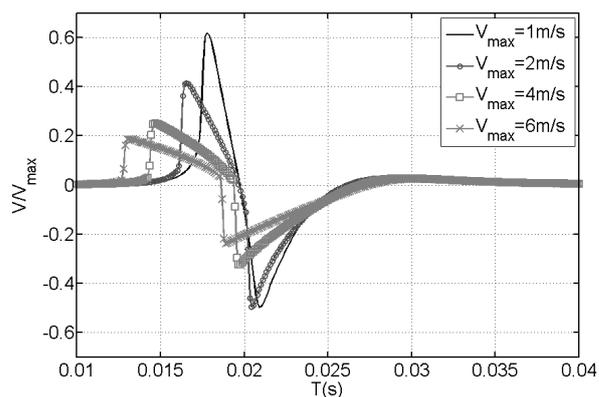


FIGURE 9 – Vitesse particulière normée mesurée au point de focal pour $V_{max} = 1m/s$ (noir), $V_{max} = 2m/s$ (cercle), $V_{max} = 4m/s$ (carré) et $V_{max} = 6m/s$ (croix)

Fig.(9) présente la vitesse particulière calculée au point focal en vitesse minimale. Le choc initial apparaît ainsi très fortement atténué lors de la propagation sous l'action des effets non linéaires et donc diminue en valeur relative lorsque l'amplitude de l'onde initiale augmente. Au contraire, les effets non linéaires sont moins prononcés pour la phase négative. Pour une vitesse initiale de $1m/s$ (soit une vitesse négative initiale de $0.1m/s$), la distance de choc d'une onde plane calculée pour la vitesse initiale négative est de l'ordre de $63cm$ et la phase négative ne présente pas de choc au point focal. Pour une vitesse initiale de $4m/s$ (soit une vitesse négative initiale de $0.4m/s$), la distance de choc calculée de manière similaire est de l'ordre de $4cm$ soit de l'ordre à la distance focale, et la phase négative présente clairement un choc au point focal. En raison des non-linéarités cubiques, celui-ci apparaît comme un choc "négatif" (la vitesse diminue à travers le choc). Notons également que pour les amplitudes les plus élevées, l'amplitude du choc "négatif" est plus élevée que celle du premier choc.

Conclusion

L'équation de propagation à deux dimensions des ondes de cisaillement non linéaires pour une polarisation linéaire transverse dans les tissus biologiques supposés quasi incompressibles, peut être approchée par une équation paraxiale de type KZK, mais avec une non-linéarité cubique au lieu de quadratique. La résolution numérique est effectuée à l'aide d'un schéma à pas fractionnés du second ordre séparant les opérateurs de diffraction, non linéaire, et d'absorption/dispersion. Le schéma numérique sans l'opérateur d'absorption est validé numériquement dans le cas des caustiques cuspidées au moyen d'une loi de similitude de Guiraud. Un exemple de focalisation dans le cerveau est ensuite simulé en intégrant une géométrie de crâne humain obtenue par IRM. En l'absence de données sur les non-linéarités dans le cerveau, le milieu de propagation est choisi comme étant un gel Agar/Gélatine dont les propriétés linéaires sont voisines de celles du cerveau, et dont les propriétés non linéaires ont été mesurées. Le champ sur la surface interne du crâne est choisi comme une onde de choc standard avec une amplitude et une durée représentatives des données observées lors d'études

traumatologiques. La simulation montre que les effets non linéaires sont extrêmement dominants. Ils tendent à dissiper très fortement le choc positif initial, mais aussi à en créer un second sur la phase négative du signal et d'amplitude comparable au point focal.

Références

- [1] T. Auger. *Modélisation et simulation numérique de la focalisation d'ondes de choc acoustiques en milieu en mouvement. Application à la focalisation du bang sonique en accélération*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 2001.
- [2] J.P. Boris and D.L. Book. Flux-corrected transport. I. SHASTA, A fluid transport algorithm that works. *J. Comp Phys.*, 11(1) :38–69, 1973.
- [3] S. Catheline, J-L. Gennisson, G. Delon, M. Fink, R. Sinkus, S. Abouelkaram, and J. Culioli. Measurement of viscoelastic properties of homogeneous soft solid using transient elastography : An inverse problem approach. *J. Acoust. Soc. Am.*, 116(6) :3734–3741, 2004.
- [4] S. Catheline, J-L. Gennisson, M. Tanter, and M. Fink. Observation of shock transverse waves in elastic media. *Physical Review Letters*, 91(16) :164301, 2003.
- [5] F. Coulouvrat. Focusing of weak acoustic shock waves at a caustic cusp. *Wave Motion*, 32(3) :233–245, 2000.
- [6] J-L. Gennisson, M. Rénier, S. Catheline, C. Barrière, J. Bercoff, M. Tanter, and M. Fink. Acoustoelasticity in soft solids : Assessment of the nonlinear shear modulus with the acoustic radiation force. *J. Acoust. Soc. Am.*, 122(6) :3211–3219, 2007.
- [7] J-P. Guiraud. Acoustique géométrique, bruit balistique des avions supersoniques et focalisation. *J. Mec.*, 4 :215–267, 1965.
- [8] M.F. Hamilton, Y.A. Ilinskii, and E.A. Zabolotskaya. Separation of compressibility and shear deformation in the elastic energy density (L). *J. Acoust. Soc. Am.*, 116 :41–44, 2004.
- [9] G.F. Kinney and K.J. Graham. Explosive shocks in air. *pringer-Verlag*, 282 p., 1, 1985.
- [10] V.P. Kuznetsov. Equations of nonlinear acoustics. *Sov. Phys. Acoust.*, 16(4) :467–470, 1971.
- [11] Y-S. Lee and M.F. Hamilton. Time-domain modeling of pulsed finite-amplitude sound beams. *J. Acoust. Soc. Am.*, 97(2) :906–917, 1995.
- [12] B.E. McDonald and J. Ambrosiano. High-order upwind flux correction methods for hyperbolic conservation laws. *J. Comp. Phys.*, 56(3) :448–460, 1984.
- [13] G. Pinton, F. Coulouvrat, J-L. Gennisson, and M. Tanter. Nonlinear reflection of shock shear waves in soft elastic media. *J. Acoust. Soc. Am.*, 127(2) :683–691, 2010.
- [14] D. Raymond, C. Van Ee, G. Crawford, and C. Bir. Tolerance of the skull to blunt ballistic temporo-parietal impact. *J. of Biomech.*, 42(15) :2479–2485, 2009.
- [15] M. Rénier, J-L. Gennisson, C. Barrière, D. Royer, et al. Fourth-order shear elastic constant assessment in quasi-incompressible soft solids. *Applied Physics Letters*, 93(10) :101912–101912, 2008.
- [16] J. K. Shridharani, G. W. Wood, M. B. Panzer, B.P. Capehart, M. K. Nyein, R. A. Radovitzky, and C. R. Bass. Porcine head response to blast. *Frontiers in Neurology*, 3, 2012.
- [17] G. Strang. On the construction and comparison of difference schemes. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 5(3) :506–517, 1968.
- [18] F. Tagliaferri, C. Compagnone, M. Korsic, F. Servadei, and J. Kraus. A systematic review of brain unjury epidemiology in Europe. *Acta Neurochirurgica*, 248(3) :255–268, 2006.
- [19] P. A. Taylor and C.C. Ford. Simulation of blast-induced early-time intracranial wave physics leading to traumatic brain injury. *Journal of Biomechanical Engineering*, 131(6) :61007, 2009.
- [20] T.J. Walilko, D.C. Viano, and C. A. Bir. Biomechanics of the head for olympic boxer punches to the face. *British Journal of Sports Medicine*, 39(10) :710–719, 2005.
- [21] M.S. Wochner, M.F. Hamilton, Y.A. Ilinskii, and E.A. Zabolotskaya. Cubic nonlinearity in shear wave beams with different polarizations. *J. Acoust. Soc. Am.*, 123(5) :2488–2495, 2008.
- [22] E.A. Zabolotskaya, M.F. Hamilton, Y.A. Ilinskii, and G D. Meegan. Modeling of nonlinear shear waves in soft solids. *J. Acoust. Soc. Am.*, 116(5) :2807–2813, 2004.
- [23] L. Zhang, K.H. Yang, and A.I. King. Comparison of brain responses between frontal and lateral impacts by finite element modeling. *Journal of Neurotrauma*, 18(1) :21–30, 2001.