



## **Modélisation du piano et couplage cordes-chevalet**

A. Chaigne

UME - ENSTA ParisTech, 828 boulevard des Maréchaux, 91762 Palaiseau Cedex, France  
antoine.chaigne@ensta.fr

Un modèle numérique de grand piano a récemment été développé (Chabassier et coll., Jasa, 2013). Des techniques numériques spécifiques ont été mises en œuvre de manière à rendre compte du régime de fonctionnement non linéaire des cordes (non-linéarité géométrique). Cependant le modèle, dans sa version actuelle, ne permet pas de reproduire les changements de polarisation observés sur la plupart des pianos réels et qui déterminent de manière cruciale l'évolution temporelle des sons. On présente deux aspects de la physique de piano susceptibles de conduire à des changements de polarisation : les conditions aux limites de type "zig-zag" au chevalet et la dynamique propre de ce dernier. On décrit les résultats d'expériences menées sur un piano et sur un banc de mesures dédié qui permettent de mieux comprendre à quelles conditions les changements de polarisation surviennent. On rapproche les résultats expérimentaux des simulations obtenues à l'aide d'un modèle simplifié destiné à reproduire les conditions aux limites de type "zig-zag" et on propose une stratégie pour améliorer la description de la dynamique du chevalet.

## 1 Introduction

Un modèle physique de grand piano a été récemment développé [1]. Celui-ci couple entre eux le marteau, les cordes, la table d'harmonie et l'air ambiant. Outre les couplages, une spécificité du modèle provient de la prise en compte de la non-linéarité géométrique des cordes. En conséquence, un modèle original de couplage entre les cordes et le chevalet a également dû être écrit, afin de permettre la transmission des efforts transversaux et longitudinaux à la table d'harmonie. Afin de résoudre ce modèle, et donc de pouvoir simuler des sons de piano, des schémas numériques originaux ont dû être développés afin de garantir la stabilité de la solution et de satisfaire les critères exigeants en termes de dispersion fréquentielle [2, 3]. Un résumé du modèle ainsi que quelques simulations sont présentés en section 2 ci-dessous. L'analyse en section 3 montre l'aptitude du modèle à reproduire plusieurs effets importants des sons de piano, comme les partiels fantômes et les précurseurs, qui dépendent de l'amplitude du mouvement des cordes. Cependant le modèle actuel ne rend pas compte du changement de polarisation observé dans leur mouvement. Or, cette propriété est cruciale car elle influence l'enveloppe temporelle des sons. On propose donc en section 4 deux extensions possibles du modèle, de manière à pouvoir reproduire ces phénomènes. La première est fondée sur les résultats d'une étude expérimentale portant sur les conditions aux limites de type "zig-zag" observées sur de nombreux pianos, et qui montre que celles-ci sont responsables d'un changement de polarisation de la corde [4]. La deuxième extension repose, elle, sur une modélisation plus générale du mouvement du chevalet : le principe de base consiste à considérer que chaque élément de chevalet couplé à l'extrémité de la corde est un solide rigide susceptible de se déplacer selon trois axes de translation et trois axes de rotation. Quelques expériences préliminaires sur un banc de corde isolé, et des mesures effectuées sur une table d'harmonie de piano droit, permettent d'étayer la pertinence de ces extensions.

## 2 Un modèle de piano

### 2.1 Résumé des principes physiques

Le modèle présenté ici permet de calculer le son d'une note de piano dans le domaine temporel, à partir de l'instant initial où le marteau frappe la corde avec une

vitesse d'impact imposée. Le mécanisme complexe qui, dans un piano réel, transmet l'action du pianiste depuis la touche jusqu'au marteau est ignoré ici. Le modèle de corde inclut les termes de non-linéarité géométrique dus aux grands déplacements, la raideur intrinsèque du matériau et les mécanismes d'amortissement interne. Les effets de grands déplacements sont visibles dès que l'amplitude du mouvement devient supérieure ou égale au diamètre de la corde : ils sont présents dans un grand nombre de situations, y compris pour des sons *mezzoforte*, voire *piano*. La non-linéarité induit un couplage entre les polarisations transversales et longitudinale de la corde. Dans le domaine temporel, ceci se traduit par l'apparition d'un précurseur qui excite la table d'harmonie avant l'onde transversale. Dans le domaine spectral, la non-linéarité géométrique engendre des raies supplémentaires dues à des combinaisons (quadratiques et cubiques) entre les fréquences propres des cordes : les partiels fantômes. L'amplitude de ces partiels augmente rapidement avec l'amplitude du mouvement et sont nettement audibles. La raideur intrinsèque de la corde est prise en compte ici à l'aide d'un modèle de Timoshenko. Celui-ci est plus précis que le modèle d'Euler-Bernoulli dans le haut du spectre (au-delà de quelques kHz) et il possède, en outre, de meilleures propriétés mathématiques [3]. Le modèle de marteau utilisé ici est standard : il est défini comme un ressort dissipatif non linéaire [6]. Le modèle géométrique de chevalet est construit de manière à permettre la transmission des efforts transversaux et longitudinaux de corde à la table d'harmonie. Il repose à la fois sur les angles formés par les plans des deux portions de la corde avec l'horizontale et sur la courbure de la table (voir la Figure 1). Le modèle autorise également la prise en compte de la vibrations des "longueurs mortes" des cordes. Par contre, il n'autorise pas de mouvement du chevalet hors du plan vertical. En l'état actuel, ce modèle permet

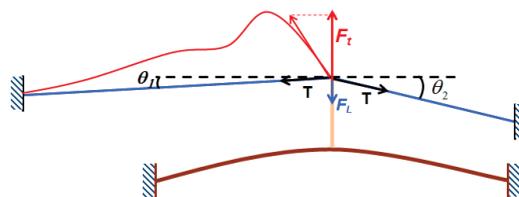


FIGURE 1 – Modèle de couplage corde-table d'harmonie permettant la transmission des composantes transversale ( $F_t$ ) et longitudinale ( $F_L$ ) de la corde.

de reproduire les précurseurs temporels et les partiels fantômes observables sur les sons de piano réels [5]. En omettant les termes de raideur et d'amortissements pour plus de clarté, le modèle de corde s'écrit :

Conditions au limites (côté agrafe  $x = x_a$ ) : (1)

$$u_s(x = x_a, t) = v_s(x = x_a, t) = \frac{\partial \varphi_s}{\partial x}(x = x_a, t) = 0,$$

Conditions initiales : (2)

$$\begin{cases} u_s(x, t = 0) = v_s(x, t = 0) = \varphi_s(x, t = 0) = 0, \\ \frac{\partial u_s}{\partial t}(x, t = 0) = \frac{\partial v_s}{\partial t}(x, t = 0) = \frac{\partial \varphi_s}{\partial t}(x, t = 0) = 0. \end{cases}$$

Mouvement non linéaire de la corde :

$$\begin{cases} \rho A \frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ EA \frac{\partial u_s}{\partial x} - \frac{(EA - T_0) \frac{\partial u_s}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u_s}{\partial x}\right)^2 + \left(1 + \frac{\partial v_s}{\partial x}\right)^2}} \right] \\ + AG\kappa \frac{\partial}{\partial x} \left( \varphi_s - \frac{\partial u_s}{\partial x} \right) = S, \\ \rho A \frac{\partial^2 v_s}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ EA \frac{\partial v_s}{\partial x} - \frac{(EA - T_0) \left(1 + \frac{\partial v_s}{\partial x}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial u_s}{\partial x}\right)^2 + \left(1 + \frac{\partial v_s}{\partial x}\right)^2}} \right] \\ = 0, \\ \rho I \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial x^2} + AG\kappa \left( \varphi_s - \frac{\partial u_s}{\partial x} \right) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

où  $u_s$  est le déplacement vertical de la corde,  $v_s$  son déplacement longitudinal, et  $\varphi_s$  l'angle formé par la section droite des cordes avec le plan perpendiculaire à celles-ci. le terme source  $S$  représente l'action du marteau, localisée en temps et en espace. En l'état actuel, seule une des deux polarisations transversales de la corde est considérée. La prise en compte de la polarisation horizontale  $w_s$ , qui est gouvernée par une équation formellement identique à celle de  $u_s$ , prendra tout son sens dès lors que le modèle dynamique du chevalet autorisera également un déplacement dans cette direction (cf. la section 4). Le modèle de table d'harmonie est une plaque orthotrope de Reissner-Mindlin (l'équivalent 2D de Timoshenko) d'épaisseur variable où le chevalet et les raidisseurs sont représentés par des hétérogénéités de masse et de raideur (voir la Figure 2). Le champ acoustique 3D autour de l'instrument est calculé dans une "boîte virtuelle" anéchoïque, où l'absorption des parois est obtenue artificiellement à l'aide de PML (Perfectly Matched Layers, ou couches absorbantes adaptées) [7]. La ceinture du piano est considérée comme un obstacle rigide : il s'agit, là encore, d'une approximation car, dans la réalité, celle-ci est le siège de vibrations perceptibles, surtout dans le registre grave. Le couplage entre la table d'harmonie et le champ sonore est assuré par la continuité de la vitesse normale à l'interface.

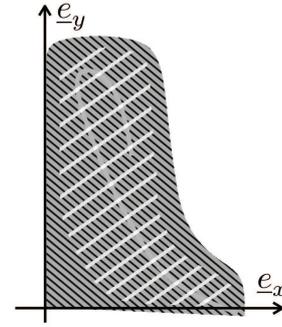


FIGURE 2 – Modèle de table d'harmonie d'un grand piano. Les lignes noires indiquent la direction des fibres, et les blanches représentent les raidisseurs. La courbe grise représente le chevalet.

## 2.2 Simulations numériques

Des méthodes numériques spécifiques sont utilisées pour discrétiser chaque sous-système et les différents couplages. Afin de garantir la stabilité de l'algorithme aux temps longs, les schémas numériques sont basés sur une formulation discrète de l'énergie, cohérente avec l'énergie continue du système. S'agissant d'un instrument à oscillations libres, cette énergie décroît avec le temps en raison des amortissements. Par ailleurs, la formulation discrète des couplages est conservative, et obéit au principe de réciprocité [8]. Pour les cordes, deux schémas différents sont adoptés : l'un pour la partie linéaire du mouvement, et l'autre pour la partie non linéaire. Ce dernier a fait l'objet d'un développement original qui s'applique à la classe particulière d'équations baptisée "système hamiltonien d'équation d'ondes" [2]. Pour la partie linéaire, deux schémas implicites différents (schémas en  $\theta$ ) sont utilisés : le premier, pour l'onde transversale, est conditionnellement stable et permet une réduction appréciable de la dispersion numérique. Le second, inconditionnellement stable, est utilisé pour les ondes longitudinales et de cisaillement. Bien que la dispersion numérique soit supérieure dans ce dernier cas, ceci n'a que peu de conséquences car la plupart des composantes spectrales de ces ondes sont situées au-delà du champ audible. La condition de stabilité applicable à la partie linéaire conduit à une valeur du pas de temps égale à  $\Delta t = 10^{-6}$  s. Pour le couplage corde-marteau, on utilise une formulation non linéaire à trois pas de temps. Pour la table d'harmonie, on effectue une décomposition modale une fois pour toutes (à géométrie et matériaux donnés). On effectue ensuite une discrétisation en temps du système différentiel obtenu pour les déplacements généralisés. À ce stade, il est commode d'introduire des termes d'amortissements mode par mode (obtenus, par exemple, à partir de l'analyse de signaux réels ou de résultats publiés dans la littérature) afin d'améliorer le réalisme sonore des simulations. En pratique, il faut calculer environ 2400 modes entre 0 et 10 kHz pour la table d'harmonie d'un grand piano Steinway D. Pour le couplage corde-table d'harmonie, on écrit la continuité de la composante verticale de vitesse au point de contact sur le chevalet, et on ajoute une condition de nullité pour la composante de vitesse horizontale de celui-ci.

Les inconnues de la corde et de la table sont calculées sur des grilles temporelles entrelacées :  $\{n\Delta t\}$  pour les cordes et  $\{(n + 1/2)\Delta t\}$  pour la table (cf. la figure 3). Enfin, on utilise des éléments finis d'ordre élevé pour

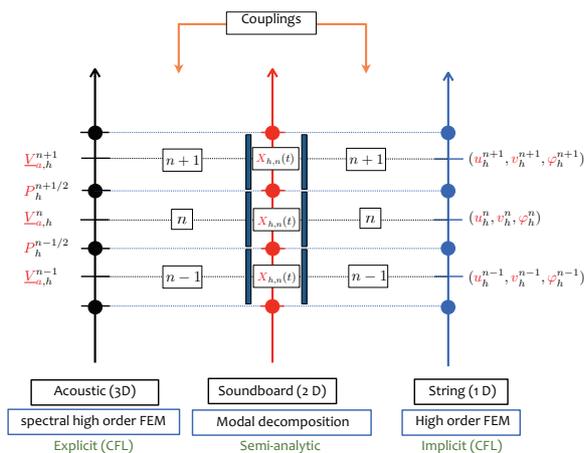


FIGURE 3 – Principe général du schéma de discrétisation du modèle de piano.

discrétiser la propagation acoustique. Ici encore, la vitesse acoustique et la pression sont calculées sur des grilles entrelacées. La figure 4 montre des résultats de

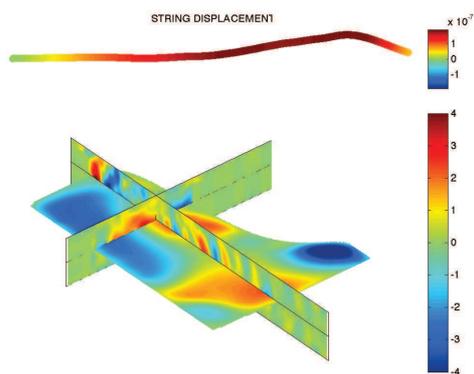


FIGURE 4 – Résultats de simulations pour la note C2 (Do 1 : fondamental 65 Hz) à l'instant  $t=3,21$  ms après l'attaque. Haut : déplacement transversal de la corde, le déplacement longitudinal étant représenté par des dégradés de couleurs (ou de gris). Bas : champ instantané de déplacement de la table d'harmonie et champ de pression. L'échelle du bas est celle de la pression (en Pa).

calcul pour la corde C2 (Do 1 : fondamental 65 Hz) à l'instant  $t=3,21$  ms après l'attaque par le marteau. La figure du haut montre le déplacement transversal de la corde, le déplacement longitudinal étant représenté par des dégradés de couleurs (ou de gris). La figure du bas montre le champ instantané de déplacement de la table d'harmonie et le champ de pression dans deux plans perpendiculaires qui se croisent au point d'attache de la corde C2 sur le chevalet.

## 3 Analyse des résultats

### 3.1 Partiels fantômes et modes de table

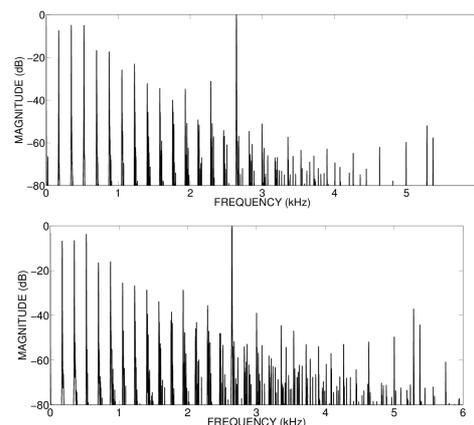


FIGURE 5 – Spectres simulés de la composante longitudinale du déplacement de la corde F3 (FA 2 : fondamental 175 Hz) pour des attaques douce (haut) et forte (bas). Le niveau 0 dB est défini par rapport au partiel de plus forte amplitude.

Les effets du couplage transverse-longitudinal sont visibles sur la figure 5 qui montre le spectre de la composante longitudinale du déplacement de la corde FA 2 (fondamental 175 Hz) dans les deux cas d'attaque douce et forte par le marteau. Pour l'attaque douce, la vitesse d'impact du marteau  $V_H=0,5$  m/s, et l'amplitude maximale du déplacement de la corde vaut 0,34 fois son diamètre. Pour l'attaque forte,  $V_H=3$  m/s et l'amplitude maximale vaut 2,1 fois le diamètre de la corde. Dans les deux cas, la fréquence dominante est le fondamental de la vibration longitudinale à 2,64 kHz. Le couplage est attesté par la présence de composantes transversales dans le spectre. D'autres composantes spectrales (les partiels fantômes) sont visibles entre les partiels transversaux, même pour une attaque douce. Une analyse fréquentielle fine montre que les fréquences de ces composantes sont des combinaisons linéaires des fréquences propres transversales et longitudinales. L'analyse théorique montre qu'elles sont le résultat de non-linéarités quadratiques et cubiques [1]. Des exemples de spectres obtenus à partir des signaux de pression simulés pour la note Ré $\sharp$ 0 (fondamental 39 Hz) sont présentés sur la figure 6. Pour le niveau fort, on retrouve la présence de partiels fantômes entre 1 et 4 kHz. En-dessous de 1 kHz, les fréquences présentes quelle que soit la vitesse initiale du marteau sont les modes de tables. On retrouve les mêmes résultats sur les spectres de la pression mesurée sur un Steinway D pour la même note (cf. la figure 7), à la différence près qu'ici le niveau des partiels fantômes est significatif, même pour une attaque *piano*. Il est probable que cette différence soit imputable au modèle utilisé ici qui sous-estime le niveau des non-linéarités transmises à la table.

### 3.2 Précurseurs

Les effets des non-linéarités géométriques sont également visibles sur les formes d'ondes de pression

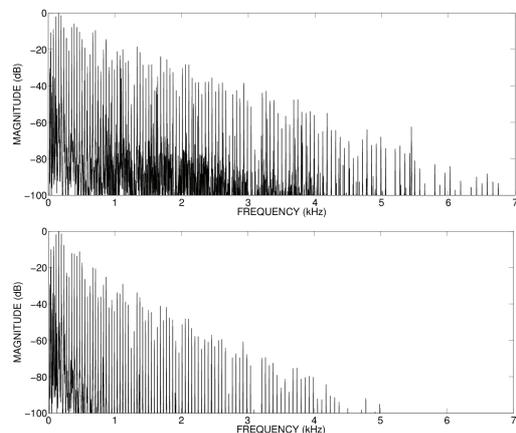


FIGURE 6 – Spectres de la pression simulée en champ proche pour la note Ré $\sharp$ 0 (fondamental 39 Hz) pour deux niveaux d’attaque : forte ( $V_H=3$  m/s; haut) et douce ( $V_H = 0,5$  m/s; bas).

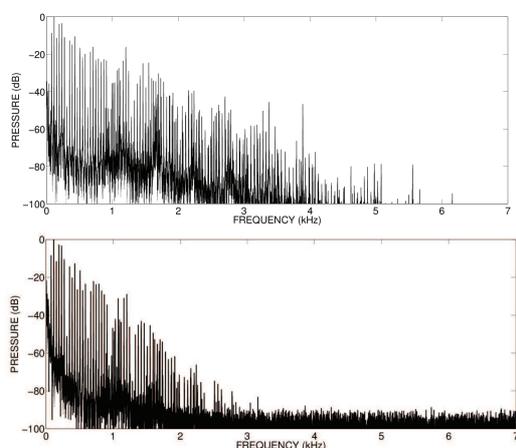


FIGURE 7 – Spectres de la pression mesurée dans le champ proche d’un grand piano Steinway D. Note Ré $\sharp$ 0 à deux niveaux : fort (haut) et doux (bas).

simulées et mesurées (cf. la figure 8). Le “petit” précurseur observé dans le cas d’un son *piano* est dû à la dispersion engendrée par la raideur intrinsèque de la corde. On voit que l’amplitude relative du précurseur (par rapport à l’impulsion transversale qui suit) augmente de manière significative avec le niveau de l’attaque. Pour la corde Ré $\sharp$ 0 montrée ici, l’analyse spectrale du précurseur en régime *forte* montre une prédominance de la fréquence longitudinale (ici à  $f=544$  Hz).

## 4 Couplage corde-chevalet

Une des principales limitations du modèle présenté ici provient du fait qu’il ne permet pas d’échange d’énergie entre les deux composantes transversales du mouvement de la corde. Ce phénomène est couramment observé sur des pianos réels, comme le montre la figure 9, y compris pour les notes formées d’une corde unique, et aux niveaux faibles. Si l’on fait l’hypothèse d’une corde parfaitement homogène et circulaire, alors un échange d’énergie n’est possible que s’il est engendré par les conditions aux limites. Nous faisons ici l’hypothèse a priori que seuls deux mécanismes principaux sont

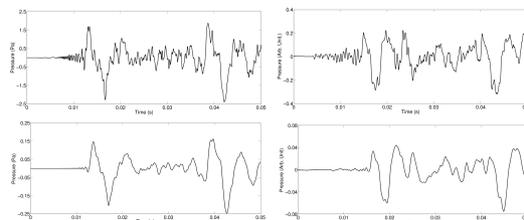


FIGURE 8 – Simulation (gauche) et mesures (droite) Ré $\sharp$ 0. Formes d’onde de pression au cours des 50 premières millisecondes du son. (Haut) *forte* ; (bas) *piano*.

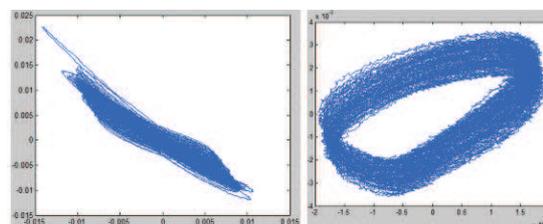


FIGURE 9 – Changement de polarisation observé sur une corde de piano. (Gauche) polarisation (trajectoire d’un point) de la corde juste après l’impact. (Droite) Trajectoire du même point après 3s.

susceptibles d’être à l’origine du phénomène : une géométrie *non symétrique* au niveau du contact entre la corde et le chevalet, d’une part, et, d’autre part, la dynamique propre du chevalet en deux (voire trois) dimensions dont l’une au moins est perpendiculaire à la direction de la corde. Afin d’étudier chaque mécanisme isolément, un banc de mesure a été spécialement réalisé. Il est formé d’une corde unique attachée à l’une de ses extrémités à une pièce de bois sensée représenter une portion de chevalet. Celle-ci est collée sur une poutre en bois légèrement courbée qui joue le rôle de la table d’harmonie. Deux photodétecteurs HOA1877 sont disposés à proximité d’un point particulier de la corde et délivrent des signaux proportionnels aux deux composantes transversales du déplacement en ce point. Les cordes sont excitées manuellement par des marteaux de piano. Une première série de mesures est effectuée sur une terminaison en forme de “V”, la corde étant située dans le plan de symétrie du “chevalet” (voir la figure 10). Dans ce cas, l’expérience montre

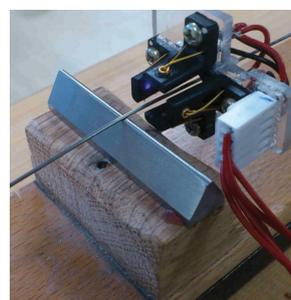


FIGURE 10 – Dispositif : corde, photodétecteurs, terminaison en “V”, chevalet et poutre.

qu’une frappe verticale induit également un mouvement vertical de la corde : la composante horizontale reste à un niveau faible (entre -20 et -30 dB) pendant les 3 s que dure le son (cf. figure 11).

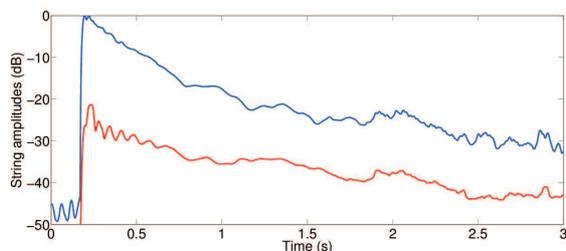


FIGURE 11 – Polarisation constante de la corde observable avec une terminaison en “V” dans l’axe du chevalet. Bleu : composante verticale ; rouge : composante horizontale.

#### 4.1 Condition aux limites zig-zag

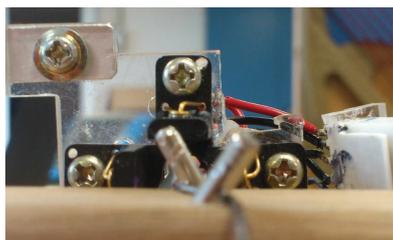


FIGURE 12 – Condition aux limites de type zig-zag.

Une deuxième série d’expériences a été menée sur une corde terminée par un “zig-zag”, analogue à ce que l’on peut observer sur de nombreux pianos. Cette terminaison est composée de deux aiguilles enfoncées dans le chevalet à une certaine distance l’une de l’autre dans la direction de la corde, et formant un angle  $\alpha$  avec le plan vertical, dans des directions opposées (cf. figure 12). La corde est placée dans le plan de symétrie du chevalet, afin d’éviter toute rotation de celui-ci. On observe alors un changement de polarisation de la corde au bout d’un certain temps (0,4 s). L’amplitude de la composante horizontale varie avec l’angle  $\alpha$ . Celle-ci est maximale pour  $\alpha$  compris entre 20 et 60 degrés environ (voir la figure 13). Un modèle simple est élaboré, afin

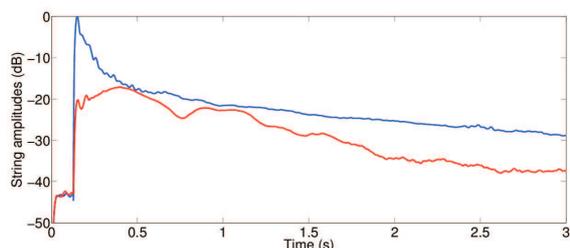


FIGURE 13 – Condition “zig-zag”. Enveloppes temporelles des polarisations de corde, montrant une augmentation progressive de la composante horizontale (en rouge).

d’interpréter ces changements de polarisation (cf. la figure 14). On autorise la corde à se déplacer le long de l’aiguille avec, éventuellement, possibilité de perte de contact. Le glissement peut s’effectuer avec ou sans frottement. La longueur utile de la corde est représentée par une ensemble discret de masses et de ressorts dont les valeurs sont ajustées pour rendre compte des premiers partiels de la corde. Les masses peuvent se déplacer dans les trois directions, mais le déplacement

longitudinal (suivant  $z$ ) est négligeable. Le premier coude (le “zig”) du zig-zag est représenté au point Z. le deuxième point (point P : le “zag”) est supposé fixe, pour simplifier. Le modèle différentiel est résolu numériquement en différences finies avec une méthode de prédicteur-correcteur pour la condition aux limites. Le mouvement simulé de la masselotte  $M$  est représenté

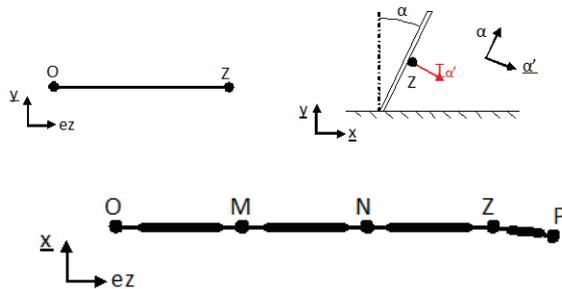


FIGURE 14 – Modèle simplifié de la condition “zig-zag”.

à la figure 15. La vitesse initiale est verticale (en bleu). L’axe de polarisation tourne ensuite progressivement vers la gauche (en vert). Au bout d’un certain temps, l’orientation de l’ellipse reste constante. Dans le même

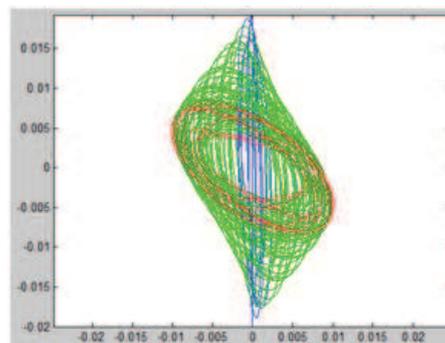


FIGURE 15 – Simulation du changement de polarisation d’un point de corde avec condition aux limites zig-zag.

Bleu : polarisation initiale ; vert : transition ; rouge : stabilisation après quelques secondes.

temps, le mouvement de la corde au point Z montre que celle-ci glisse sous l’aiguille à chaque arrivée d’un front d’onde transversal et induit alors, du fait de la géométrie, une composante horizontale. L’amplitude du glissement dépend de l’amplitude du mouvement de la corde, du degré de frottement et de l’angle de l’aiguille. Les glissements s’annulent à la fin du son, ce qui explique la stabilisation de l’orbite.

#### 4.2 Dynamique du chevalet



FIGURE 16 – Chevalet et doublet de cordes hors axe.

On réalise une nouvelle série d’expériences sur le prototype où, cette fois, le chevalet élémentaire est

sollicité par deux cordes hors axe (voir la figure 16). L'angle des aiguilles du "zig-zag" est choisi de telle sorte que leur effet soit faible. La deuxième corde peut, éventuellement, être amortie. Un exemple de résultat, dans ce cas, est présenté à la figure 17. On

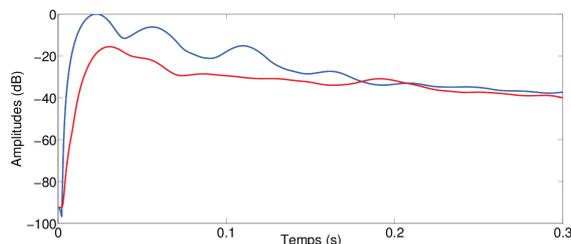


FIGURE 17 – Polarisations verticale (bleu) et horizontale (rouge) pour la corde couplée au chevalet hors axe.

voit sur cette figure que la polarisation horizontale (en rouge) est quasiment proportionnelle à la polarisation verticale (en bleu). C'est bien le cas si l'on admet que l'axe vertical  $z$  a tourné d'un angle  $\theta_z$  par rapport à l'horizontale. Le rapport des deux composantes de force horizontale et verticale exercées sur la corde vaut  $\tan \theta$ . Expérimentalement on mesure une rotation maximale du chevalet de l'ordre de 20 degrés, soit  $\tan \theta \simeq 0.4$ . Ceci conduit à un rapport d'amplitude d'environ 18 dB entre les composantes, ce qui est conforme à l'expérience. Cette expérience élémentaire invite à rendre compte

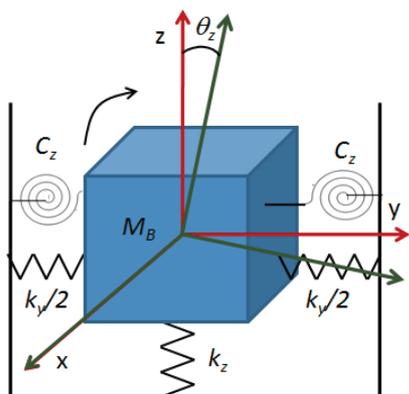


FIGURE 18 – Dynamique simplifiée d'un élément de chevalet. Rotation dans le plan  $(y, z)$ .

d'un mouvement plus général du chevalet. L'élément de chevalet, de masse  $M_B$ , en contact avec la corde, est relié à ses voisins par des ressorts  $k_x$  et  $k_y$  qui symbolisent la raideur longitudinale du chevalet continu. La raideur de la table sous le chevalet, est symbolisée par  $k_z$ . Dans son mouvement de flexion dans le plan  $(y, z)$ , l'élément de chevalet est soumis à un moment  $m_{\theta_z}$  et le couple de rappel élastique est symbolisé par des ressorts spirales de raideur  $C_z$ . En supposant que les vibrations de flexion et longitudinales du chevalet sont découplées aux petits mouvements, on obtient la condition aux limites en rotation de la corde dans le plan  $(y, z)$  :

$$J\ddot{\theta}_z + C_z\theta_z = m_{\theta_z}, \quad (4)$$

où  $J$  est l'inertie de rotation. Une composante horizontale du mouvement de la corde est alors engendrée par la matrice de rotation  $\theta_z$  conformément

à ce qui est observé en figure 17. Au vu des mesures, cette rotation semble la composante la plus importante dans un piano [4]. Cependant, le modèle peut tout-à-fait s'enrichir de rotations dans le plan  $(x, y)$  pour représenter les vibrations de flexion du chevalet continu dans ce plan, ou dans le plan  $(x, z)$ , bien que, dans ce dernier cas, il semble que le mouvement des chevalets réels soient bridés par les tensions des cordes. Au total, le mouvement le plus général de l'élément de chevalet comprend trois translations et trois rotations.

## 5 Conclusion

Un modèle numérique de corde couplée à un chevalet élémentaire est en cours d'élaboration. Il servira de base pour l'extension à un chevalet continu. D'autres extensions possibles du modèle concernent la modélisation du mécanisme d'attaque de la touche au marteau, et le choc de la touche sur le plateau du clavier. Enfin, la prise en compte, à terme, des vibrations de la ceinture, semble nécessaire, notamment pour reproduire de manière plus satisfaisante l'équilibre grave-aigu de l'instrument.

## Références

- [1] J. Chabassier, A. Chaigne, et P. Joly, Modeling and simulation of a grand piano, *J. Acoust. Soc. Am.* **134**(1), 648-665 (2013).
- [2] J. Chabassier et P. Joly, Energy preserving schemes for nonlinear Hamiltonian systems of wave equations. Application to the vibrating piano string. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **199**, 2779-2795 (2010).
- [3] J. Chabassier et S. Imperiale, Stability and dispersion analysis of improved time discretization for simply supported prestressed Timoshenko systems. Application to the stiff piano string. *Wave Motion* **50**(3), 456-480 (2013).
- [4] A. Chaigne, J. Chabassier et N. Burban, Acoustics of pianos : physical modeling, simulations and experiments, *Proceedings of the Stockholm Musical Acoustics Conference 2013*, Stockholm (2013).
- [5] H. A. Conklin, Generation of partials due to nonlinear mixing in a stringed instrument, *J. Acoust. Soc. Am.* **105**(1), 536-545 (1999).
- [6] A. Stulov, Dynamic behavior and mechanical features of wool felt, *Acta Mechanica*, **169**(1), 3-21 (2004).
- [7] E. Bécache, S. Fauqueux, et P. Joly, Stability of perfectly matched layers, group velocities and anisotropic waves, *Journal of Computational Physics* **188**, 399-403 (2003).
- [8] J. Chabassier, Modélisation et simulation numérique d'un piano par modèles physiques, Thèse de l'Ecole polytechnique, Palaiseau (2012).