



Bande interdite de Bragg d'origine électrique dans les cristaux phononiques piezoelectriques à une dimension

B. Dubus^a, S. Degraeve^a, C. Granger^a, J. Vasseur^a, M. Pham Thi^b et A.-C. Hladky-Hennion^a

^aIEMN, UMR 8520 CNRS, ISEN, 41 Boulevard Vauban, 59800 Lille, France

^bThales Research and Technology, Campus Polytechnique, 1 avenue Augustin Fresnel, 91767 Palaiseau, France

bertrand.dubus@isen.fr

Les cristaux phononiques sont caractérisés par l'existence de bandes de fréquences interdites, dites de Bragg, dans lesquelles les ondes acoustiques ou élastiques sont évanescentes. Dans le cas d'un cristal phononique à une dimension, les bandes interdites de Bragg sont directement liées à la période spatiale de l'empilement de couches et au rapport d'impédance entre couches successives. Ce travail aborde le cas de la propagation d'ondes élastiques dans un cristal phononique à une dimension constitué par un ensemble de couches piézoélectriques identiques séparées par des électrodes métalliques d'épaisseur négligeable. Un modèle analytique est développé pour obtenir la relation de dispersion de cette structure pour deux conditions aux limites électriques différentes sur les électrodes : circuit ouvert (électrodes non connectées), court-circuit (électrodes connectées directement) ou électrodes connectées via une capacité externe. Les résultats théoriques montrent que la connexion des électrodes provoque l'apparition d'une bande interdite de Bragg associée à la présence de charges électriques sur les électrodes. La largeur maximale de cette bande est déterminée par le coefficient de couplage du matériau piézoélectrique. L'existence de la bande interdite est confirmée par la mesure de la transmission d'une onde longitudinale à travers un empilement de céramiques piézoélectriques d'épaisseur finie.

1 Introduction

Les cristaux phononiques sont des milieux composites structurés périodiquement dans lesquels la diffraction de Bragg engendre l'apparition de bandes de fréquence où la propagation de l'onde acoustique ou élastique est interdite. Ces bandes interdites de Bragg présentent un intérêt potentiel pour réaliser des écrans acoustiques ou des filtres électroniques à des fréquences allant du kHz au GHz suivant la dimension caractéristique de la périodicité spatiale [1,2]. Cette fonction de filtrage est obtenue dans une bande de fréquence définie par la géométrie de la structure et les caractéristiques physiques des matériaux la constituant.

Récemment, de nombreux développements ont été réalisés pour permettre d'accorder les bandes interdites de Bragg après fabrication. Différentes grandeurs physiques sont utilisées pour contrôler cet accord : température [3,4], champ électrique dans le cas où l'un des composants est un fluide électro-rhéologique [5] ou contrainte mécanique [6]. Dans chaque cas l'accord reste faible, de l'ordre de quelques %. L'utilisation d'un matériau actif comme milieu constitutif du cristal phononique est une solution alternative de contrôle. Elle est réalisée à partir de matériaux magnétostrictifs contrôlés par champ magnétique [7,8] ou de matériaux piézoélectriques contrôlés par une impédance de charge variable [9,10]. Lorsque cette impédance est une inductance ou un circuit RLC, une résonance est ajoutée, donnant lieu à l'apparition d'une bande interdite d'hybridation [11-15]. Bien que les bandes interdites de Bragg soient généralement étudiées dans des milieux non homogènes de par leur géométrie ou leurs propriétés physiques, elles apparaissent également dans des milieux homogènes soumis à des conditions aux limites périodiques. Ce problème a été étudié en détail dans le cas de poutres ou de plaques dans lesquels le choix des conditions aux limites influe fortement sur les caractéristiques des bandes interdites [16,17].

Dans ce travail [18], un barreau piézoélectrique homogène soumis à des conditions aux limites électriques périodiques est considéré. La périodicité de la structure résulte uniquement de la condition imposée aux électrodes, supposées suffisamment minces pour ne jouer aucun rôle mécanique. Un modèle analytique est développé de manière à obtenir les relations de dispersion pour des conditions aux limites variées. Les variations de la fréquence centrale et de la largeur de la bande interdite de Bragg, et de la vitesse effective aux basses fréquences sont évaluées en fonction

de l'impédance de charge supposée capacitive. La transmission d'un signal ultrasonore à travers un assemblage de cylindres de dimension finie est mesurée pour différentes conditions aux limites électriques et comparée aux résultats analytiques.

2 Modèle analytique

La structure étudiée est décrite à la figure 1. Elle est constituée de cylindres piézoélectriques de longueur ℓ polarisés dans la direction z positive et séparés par des électrodes d'épaisseur négligeable. Le rayon des cylindres est supposé suffisamment petit par rapport à ℓ pour que le problème soit unidimensionnel (suivant z). Trois types de conditions aux limites électriques reliant des électrodes successives sont considérées : (a) circuit ouvert ; (b) connexion par une capacité externe C ; (c) court-circuit. On notera que les cas (a) et (c) correspondent respectivement à $C = 0$ et $C \rightarrow +\infty$.

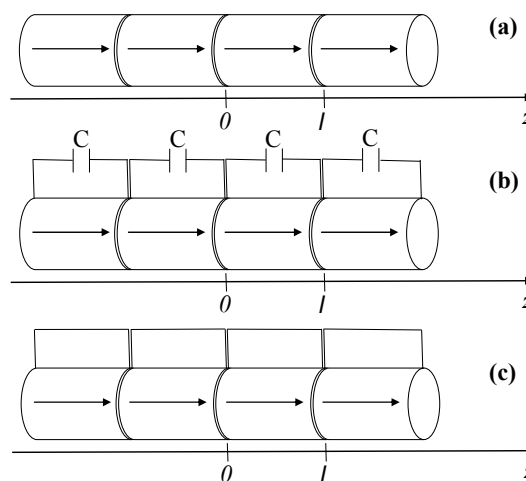


Figure 1: géométrie des barreaux piézoélectriques considérés

D'après le théorème de Gauss, le déplacement électrique D_3 (suivant z) est uniforme dans chaque élément piézoélectrique. De plus, les faibles dimensions transversales permettent de négliger toutes les composantes du champ de contrainte à l'exception de T_3 . Les lois constitutives de la piézoélectricité s'écrivent donc [19] :

$$\begin{cases} S_3(z) = s_{33}^D T_3(z) + g_{33} D_3 & (1a) \\ E_3(z) = -g_{33} T_3(z) + \beta_{33}^T D_3 & (1b) \end{cases}$$

S_3 , T_3 , E_3 , g_{33} , s_{33}^D et β_{33}^T sont respectivement la déformation, la contrainte, le champ électrique, la constante piézoélectrique, la constante élastique à déplacement électrique constant et l'imperméabilité diélectrique à contrainte constante. La dérivation de l'équation (1a) par rapport à z combinée à la relation fondamentale de la dynamique conduit à l'équation d'onde

$$\frac{\partial^2 U(z,t)}{\partial z^2} - \rho s_{33}^D \frac{\partial^2 U(z,t)}{\partial t^2} = 0, \quad (2)$$

où ρ est la masse volumique, $U(z,t)$ le déplacement et $S_3(z) = \partial U(z)/\partial z$. L'équation (2) montre que la vitesse de propagation au sein de chaque élément piézoélectrique $V_L = 1/\sqrt{\rho s_{33}^D}$ est indépendante des conditions aux limites électriques. Dans la suite, une dépendance temporelle de la forme $e^{-j\omega t}$, où ω est la pulsation, est considérée implicitement. Le champ de déplacement dans chaque élément peut s'écrire

$$U(z) = Ae^{-jk_1 z} + Be^{jk_1 z}, \quad (3)$$

où $k_1 = \omega/V_L$ est le nombre d'onde. Les coefficients complexes A et B sont obtenus à partir des conditions aux limites périodiques. Celles-ci conduisent à imposer une relation de type Bloch-Floquet sur les déplacements et les contraintes aux frontières de l'élément piézoélectrique ($z = 0$ et $z = \ell$)

$$U(\ell) = U(0)e^{jk_1 \ell}, \quad (4a)$$

$$T_3(\ell) = T_3(0)e^{jk_1 \ell}, \quad (4b)$$

où k est le nombre d'onde effectif associé à l'onde se propageant dans le barreau piézoélectrique. La combinaison des équations (1a), (3), (4a) et (4b) conduit à

$$A[e^{-jk_1 \ell} - e^{jk_1 \ell}] + B[e^{jk_1 \ell} - e^{-jk_1 \ell}] = 0, \quad (5)$$

$$-A[e^{-jk_1 \ell} - e^{jk_1 \ell}] + B[e^{jk_1 \ell} - e^{-jk_1 \ell}] = \frac{g_{33} D_3 (1 - e^{jk_1 \ell})}{jk_1}. \quad (6)$$

Dans le cas du circuit ouvert (cas (a) de la figure 1), la charge totale portée par chaque électrode est nulle et $D_3 = 0$. Les solutions non triviales du système formé par les équations (5) et (6) donnent l'équation de dispersion

$$\left[e^{-jk_1 \ell} - e^{jk_1 \ell} \right] \left[e^{jk_1 \ell} - e^{-jk_1 \ell} \right] = 0, \quad (7)$$

dont les solutions sont $k = \pm k_1$. Le report de ces solutions dans l'équation (5) conduit à $A = 0$ or $B = 0$. La solution est une onde propagative non-dispersive. Il n'y a aucune réflexion sur les électrodes dans ce cas.

Dans le cas général où les électrodes sont reliées par une capacité externe C (cas (b) de la figure 1), la différence de potentiel V entre deux électrodes successives s'écrit

$$V = -\int_0^\ell E_3 dz = \frac{SD_3}{C} = \frac{g_{33}}{s_{33}^D} (U(\ell) - U(0)) + \left(\beta_{33}^T + \frac{g_{33}^2}{s_{33}^D} \right) \ell D_3, \quad (8)$$

où S est l'aire de l'électrode. Cette équation peut-être réécrite sous la forme

$$\frac{\alpha}{\ell g_{33}} \left[A(e^{-jk_1 \ell} - 1) + B(e^{jk_1 \ell} - 1) \right] = D_3, \quad (9)$$

où $\alpha = k_{33}^2 / (1 + C_0/C)$. $k_{33}^2 = g_{33}^2 / (\beta_{33}^T s_{33}^D + g_{33}^2)$ est le coefficient de couplage électromécanique du matériau piézoélectrique et $C_0 = S(1 - k_{33}^2) / (\ell \beta_{33}^T)$ la capacité bloquée de l'élément piézoélectrique [19]. Le report de l'équation (9) dans (6) conduit à

$$\begin{aligned} & \left[\left(e^{-jk_1 \ell} + \frac{\alpha}{jk_1 \ell} (e^{-jk_1 \ell} - 1) \right) - X \left(1 + \frac{\alpha}{jk_1 \ell} (e^{-jk_1 \ell} - 1) \right) \right] A \\ & + \left[\left(-e^{jk_1 \ell} + \frac{\alpha}{jk_1 \ell} (e^{jk_1 \ell} - 1) \right) - X \left(-1 + \frac{\alpha}{jk_1 \ell} (e^{jk_1 \ell} - 1) \right) \right] B = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Les équations (5) et (10) constituent un système linéaire d'équations dont les solutions s'écrivent

$$e^{jk_1 \ell} = \frac{\cos(k_1 \ell) - \alpha \frac{\sin(k_1 \ell)}{k_1 \ell} \pm j \sin(k_1 \ell) \sqrt{1 - \alpha \frac{\tan(k_1 \ell/2)}{k_1 \ell/2}}}{1 - \alpha \frac{\sin(k_1 \ell)}{k_1 \ell}}. \quad (11)$$

On notera qu'une relation complexe entre A et B est obtenue en reportant l'équation (11) dans (5). La solution est donc une combinaison d'ondes se propageant dans les directions positive et négative. Ce résultat démontre que la présence de charges électriques induit une réflexion sur les électrodes. La partie réelle de l'équation (11) donne la relation de dispersion

$$\cos(k \ell) = \frac{\cos(k_1 \ell) - \alpha \frac{\sin(k_1 \ell)}{k_1 \ell}}{1 - \alpha \frac{\sin(k_1 \ell)}{k_1 \ell}}. \quad (12)$$

La relation de dispersion en circuit ouvert ($C = 0$) est retrouvée en posant $\alpha = 0$ dans l'équation (12). Dans le cas du court-circuit ($C \rightarrow +\infty$), elle est obtenue en y posant $\alpha = k_{33}^2$.

3 Cas test

3.1 Géométrie

La géométrie considérée est constituée de cylindres de céramique PZ29 (Ferropem) de longueur $\ell = 10$ mm et de rayon 5 mm. Les propriétés physiques de la céramique PZ29 sont: $s_{33}^D = 9.095 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2 \cdot \text{N}^{-1}$, $\beta_{33}^T = 4.206 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{F}^{-1}$, $g_{33} = 2.418 \cdot 10^{-2} \text{ V} \cdot \text{m} \cdot \text{N}^{-1}$ et $\rho = 7450 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

3.2 Analyse des courbes de dispersion

Les courbes de dispersion calculées dans la première zone de Brillouin sont présentées à la Figure 2 dans les cas (a), (b) avec $C = C_0$ et (c). Comme attendu, la solution en circuit ouvert (Fig. 2a) correspond à une branche non dispersive de pente égale à V_L sans bande interdite. Le cas du court-circuit (Fig. 2c) est caractérisé par l'apparition d'une bande interdite de Bragg entre 128 et 192 kHz en bord de zone de Brillouin. A partir de l'équation (12), on peut montrer que les bornes inférieure et supérieure de la bande interdite sont respectivement les solutions des équations $\tan(k_1 \ell / 2) = k_1 \ell / (2\alpha)$ et $\sin(k_1 \ell) = 0$. Elles coïncident donc avec les fréquences de résonances série et parallèle de l'élément piézoélectrique [19]. La largeur de bande relative est par conséquent égale au carré du coefficient de couplage k_{33}^2 . Lorsque les électrodes sont interconnectées via une capacité externe égale à C_0 , la courbe de dispersion (Fig. 2b) fait également apparaître une bande interdite de Bragg de largeur réduite entre 169 et 192 kHz. Comme attendu, la borne supérieure est inchangée tandis que la borne inférieure, qui dépend du paramètre α , est contrôlée par l'impédance de charge. On note que la vitesse effective aux basses fréquences et aux grandes longueurs d'onde varie également avec l'impédance de charge. Un développement de Taylor de la relation de dispersion (12) au second ordre en kl et $k_1 \ell$ permet d'obtenir l'expression de la vitesse effective en fonction de C

$$V_{eff}(C) \approx V_L \sqrt{1 - k_{33}^2 / (1 + C_0 / C)}. \quad (13)$$

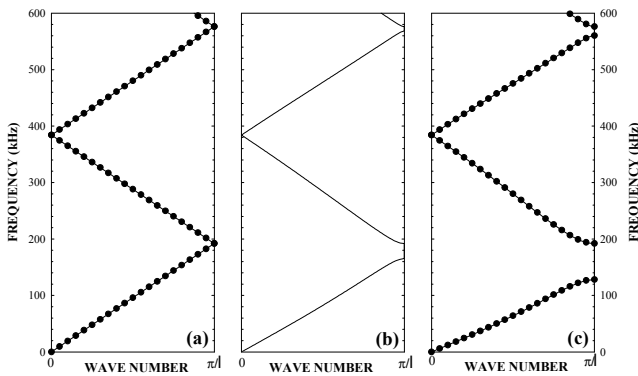


Figure 2: courbes de dispersion de la géométrie considérée pour les cas (a) $C = 0$, (b) avec $C = C_0$ et (c) $C \rightarrow +\infty$

3.3 Résultats expérimentaux

Une caractérisation expérimentale de la transmission acoustique a été réalisée sur un empilement de 14 cylindres de céramique PZ29 séparés par de minces électrodes de laiton d'épaisseur 25 μm . L'assemblage est réalisé à l'aide d'une colle époxy. La transmission des ondes longitudinales à travers l'échantillon est mesurée avec une paire de transducteurs ultrasonores de type Panametrics V101 0,5 MHz (Fig. 3). Le transducteur émetteur est excité avec une impulsion électrique courte (2 μs). Les signaux électriques relevés sur le transducteur de réception sont moyennés sur 128 mesures successives. Les spectres de transmission sont évalués par FFT dans les cas d'électrodes

en circuit ouvert et en court-circuit (Fig. 4). Dans le second cas, les électrodes sont mises à la masse pour améliorer le rapport signal sur bruit. La transmission mesurée en circuit ouvert présente une réponse moyenne autour de 0 dB sur laquelle peuvent être observées les résonances longitudinales de la structure correspondant à un nombre entier de demi-longueurs d'onde. On notera également la présence d'un creux vers 175 kHz associé à l'apparition d'un mode de propagation d'ordre supérieur. Dans le cas du court-circuit, une atténuation moyenne de 30 dB apparaît dans la bande interdite de Bragg prévue théoriquement, démontrant la possibilité de contrôler la propagation dans l'échantillon avec de simples interrupteurs. Les résonances basses fréquences semblent également présenter un décalage en fréquence, conséquence de la modification de la vitesse effective aux grandes longueurs d'onde. Les pertes (dus à l'assemblage de l'empilement) sont cependant trop importantes pour obtenir des pics bien définis et pouvoir ainsi valider les variations de vitesses effectives prédites théoriquement.

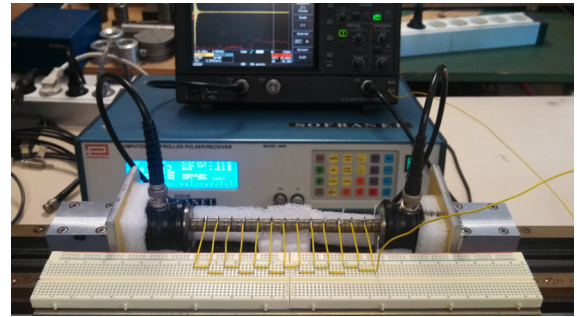


Figure 3: dispositif expérimental

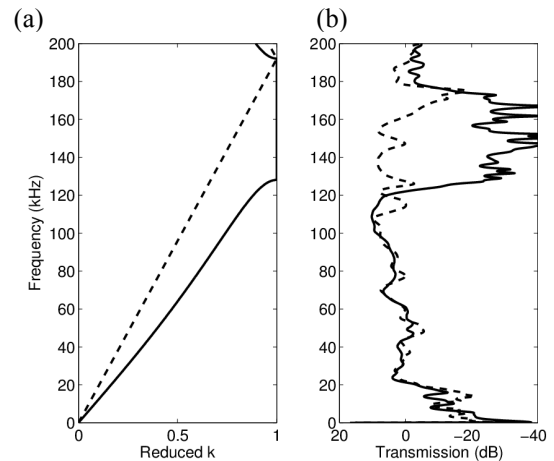


Figure 4 : (a) courbe de dispersion théorique ; (b) spectre de transmission à travers l'empilement. Trait pointillé : circuit ouvert ; trait plein : court-circuit.

4 Conclusion

Les résultats théoriques et expérimentaux présentés démontrent l'existence de bandes interdites de Bragg dans des barreaux piézoélectriques homogènes soumis à des conditions aux limites électriques périodiques. Ces bandes interdites proviennent des charges électriques libres apparaissant sur les électrodes qui créent des ondes réfléchies. Les caractéristiques de ces bandes interdites et la vitesse effective des ondes aux basses fréquences et grandes longueurs d'ondes peuvent être contrôlées par l'impédance électrique associée à cette condition. La variation relative

maximale obtenue est directement liée au coefficient du couplage du milieu piézoélectrique.

Ce dispositif présente de nombreuses possibilités pour contrôler électriquement la propagation d'ondes acoustiques :

- accordabilité importante de la fréquence centrale et/ou de la largeur de bande interdite de Bragg à partir de capacités variables ;

- transformation d'un milieu élastique homogène non dispersif en un milieu dispersif (et réciproquement) avec de simples interrupteurs ;

- accordabilité importante de la vitesse effective aux basses fréquences et grandes longueurs d'ondes à l'aide de capacités variables.

Les perspectives d'applications liées à ces travaux ont fait l'objet d'un brevet Thales/CNRS [20].

Remerciements

Ce travail a été supporté par l'Agence Nationale de la Recherche (projet MIRAGES ANR-12-BS09-0015) et par la Région Nord Pas-de-Calais.

Références

- [1] Y. Pennec *et al* Surf. Sci. Rep. 65, 229 (2010).
- [2] *Acoustic metamaterials and phononic crystals*, Springer Series in Solid-State Sciences 173, Pierre A. Deymier Ed., Springer, Berlin (2013).
- [3] Z.-G. Huang, T.-T. Wu, IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control 52, 365 (2005).
- [4] K. L. Jim *et al*, Appl. Phys. Lett. 94, 193501 (2009).
- [5] J.-Y. Yeh, Physica B 400, 137 (2007).
- [6] K. Bertoldi, M. C. Boyce, Phys. Rev. B 77, 052105 (2008).
- [7] J.-F. Robillard *et al*, Appl. Phys. Lett. 95, 124104 (2009).
- [8] O. Bou Matar *et al*, J. Appl. Phys. 111, 054901 (2012).
- [9] J.-C. Hsu, Japanese Journal of Applied Physics 57, 07GA04 (2012)
- [10] S.-B. Chen *et al*, Chin. Phys. B 20, 014301 (2011).
- [11] G. Wang *et al*, Smart Mater. Struct. 20, 015026 (2012).
- [12] S.-B. Chen *et al*, J. Intell. Mater. Syst. Struct. 23, 1613 (2012).
- [13] F. Casadei *et al*, J. Appl. Phys. 112, 064902 (2012).
- [14] A. Bergamini *et al*, Advanced Mat. (2013).
- [15] S.-A. Mansoura *et al*, Actes du 12^e Congrès Français d'Acoustique, Poitiers, (2014).
- [16] D.J. Mead, J. Sound Vib. 11, 181 (1970).
- [17] M.L. Rummerman, J. Acoust. Soc. Am. 57, 370 (1975).
- [18] S. Degraeve, *Cristaux phononiques accordables*, Thèse de Doctorat à l'Université de Lille 1 Sciences et Technologies, (2013).
- [19] O.B. Wilson, *Introduction to theory and design of sonar transducers*, Peninsula Publishing, Los Altos, (1988).
- [20] M. Pham Thi, A. Zhiaei, S. Degraeve, C. Granger, B. Dubus, A.-C. Hladky-Hennion, *Cristaux phononiques accordables par une connexion électrique périodique* Brevet français n° 1202561, PCT/EP2013/0070052.