



Séries de Bremmer pour la propagation multimodale en guide d'onde de section variable

J.-B. Doc^a, B. Lihoreau^b, S. Felix^b et V. Pagneux^b

^aCNRS-LMA, 31 chemin Joseph Aiguier, 13402 Marseille Cedex 20, France

^bLAUM UMR CNRS 6613, Université du Maine, Avenue Olivier Messiaen, 72085 Le Mans, France
jbdoc@lma.cnrs-mrs.fr

Ce travail concerne l'étude de la propagation dans un guide d'onde à section variable par décomposition du champ de pression en série de Bremmer. L'équation de Helmholtz est réécrite sous la forme d'un système de deux équations différentielles couplées, portant sur l'amplitude des ondes aller et retour. Les série de Bremmer sont utilisées pour résoudre ces équations multimodales couplées. Ainsi une méthode itérative est obtenue, où le premier ordre de la série correspond à la propagation adiabatique des modes. L'importance des différents ordres de la série sur la reconstruction du champ de pression est quantifiée. Par comparaison avec la résolution numérique directe de l'équation d'Helmholtz, la contribution particulière des ondes directement transmises est mise en avant, ce qui permet de mieux cerner les limites de l'approximation unidirectionnelle.

1 Introduction

Dans la littérature, de nombreux travaux portent sur la décomposition du champ de pression en fonction du sens de propagation des ondes [1, 2, 3, 4, 5]. Le point de départ de ces différents travaux est l'article de Bremmer [6], montrant que l'approximation WKB peut être considérée comme le premier terme d'une série décomposant le parcours des ondes acoustiques à la manière de l'optique géométrique. D'abord pour des milieux stratifiés, puis pour des milieux variant continûment, Bremmer [6] propose une décomposition de l'équation d'onde en un système de deux équations différentielles couplées. Ce système permet de traduire l'évolution des composantes co-propagatives et contra-propagatives du champ de pression pour des problèmes à une dimension. Plus récemment, des travaux [7, 8] ont montré la possibilité d'étendre la notion de série de Bremmer à des problèmes à plusieurs dimensions.

Ce travail porte sur la décomposition du champ de pression en série de Bremmer en guide d'onde irrégulier. La décomposition en série est utilisée afin de connaître le sens de propagation des modes créés par couplages. L'objectif est de mieux comprendre la nature des couplages dus aux variations géométriques d'un guide d'ondes. Une attention particulière sera portée sur l'interprétation de l'approximation unidirectionnelle.

2 Series de Bremmer

2.1 Formulation multimodale

Considérons le guide d'ondes de la Figure 1, avec des conditions de Neumann aux parois ($\partial_n p = 0$; les conditions de Dirichlet ou mixtes pourraient également être imposées[9]). Une onde incidente se propage arrivant à gauche de la région étudiée ($x \in [0, L]$) et le guide d'ondes est supposé être uniforme et semi-infini en aval de cette région. Le milieu de propagation est homogène et sans pertes visco-thermiques, de célérité c_0 . Le champ de pression p est solution de l'équation de Helmholtz :

$$(\Delta + k^2)p = 0, \quad (1)$$

avec $k = \omega/c_0$ le nombre d'onde. Dans la suite, la dépendance temporelle est de la forme $\exp(-j\omega t)$.

Les étapes principales pour la résolution avec la méthode multimodale sont les suivantes. En premier lieu, l'équation de Helmholtz (1) est écrite sous la forme de 2 équations du premier ordre couplées en fonction du champ de pression et de son gradient axial $q = \partial_x p$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(\partial_{yy}^2 + k^2) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}. \quad (2)$$

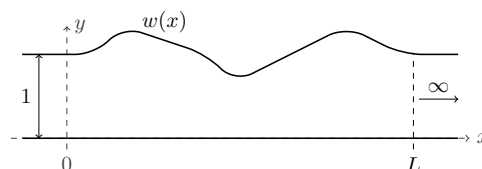


FIGURE 1 – Géométrie du guide d'ondes 2D

Les solutions de p et q sont ensuite écrites sous la forme de séries infinies :

$$p(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x)g_n(x, y), \quad (3)$$

$$q(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} Q_n(x)g_n(x, y), \quad (4)$$

où

$$g_n(x, y) = \sqrt{\frac{2 - \delta_{0n}}{h(x)}} \cos\left(\frac{n\pi y}{h(x)}\right) \quad (5)$$

est la solution du problème aux valeurs propres transverse $\partial_{yy}^2 g_n = -(n\pi/h(x))^2 g_n$, avec des conditions de Neumann aux parois. La projection de l'équation Eq. (2) sur la base orthonormale $\{g_n\}$ mènent à

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \vec{P} \\ \vec{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F & I \\ -K^2 & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{P} \\ \vec{Q} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

où K est une matrice diagonale : $K_n = \sqrt{k^2 - (n\pi/h(x))^2}$ et F est donnée par :

$$F_{mn} = \begin{cases} -(1 - \frac{\delta_{m0}}{2}) \frac{h'}{h} & \text{if } m = n, \\ 0 & \text{if } n = 0, m > 0, \\ -\sqrt{2} \frac{h'}{h} (-1)^n & \text{if } m = 0, n > 0, \\ -2 \frac{h'}{h} \frac{n^2}{n^2 - m^2} (-1)^{m+n} & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (7)$$

Les équations couplées (6) fournissent une solution exacte du problème. Des détails sur la résolution de ce système peuvent être trouvés dans [9].

2.2 Décomposition du champ de pression

Le champ de pression vectoriel \vec{P} peut être décomposé en la somme des contributions co-propagative et contra-propagative

$$\vec{P} = \vec{P}^+ + \vec{P}^-. \quad (8)$$

De même, le gradient de pression \vec{Q} peut s'écrire

$$\vec{Q} = \Gamma(\vec{P}^+ - \vec{P}^-), \quad (9)$$

où $\Gamma_{nm} = iK_n \delta_{nm}$ est la matrice d'admittance caractéristique. En remplaçant les vecteurs \vec{P} et \vec{Q} par leur décomposition dans le système (6), le système d'équations différentielles couplées suivant est alors obtenu :

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \vec{P}^+ \\ \vec{P}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma - \frac{1}{2}\Gamma^{-1}\Gamma' + \alpha & \beta \\ \beta & -\Gamma - \frac{1}{2}\Gamma^{-1}\Gamma' + \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{P}^+ \\ \vec{P}^- \end{pmatrix}, \quad (10)$$

avec

$$\alpha = -\frac{1}{2}F + \frac{1}{2}\Gamma^{-1}{}'F\Gamma \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1}{2}\Gamma^{-1}\Gamma' - \frac{1}{2}F - \frac{1}{2}\Gamma^{-1}{}'F\Gamma. \quad (11)$$

Le système (10) correspond à la décomposition du champ de pression \vec{P} selon le sens de propagation des ondes dans la direction privilégiée. Aucune approximation n'est effectuée lors de la décomposition des équations multimodales (6) conduisant à ce système d'équations couplées. Le terme $\pm\Gamma - \frac{1}{2}\Gamma^{-1}\Gamma'$ correspond à la propagation adiabatique des modes co-propagatifs et contra-propagatifs. Les matrices α et β permettent de connaître le sens de propagation des modes créés par couplages, puisqu'elles représentent respectivement les couplages dans la continuité ou dans le sens opposé de la direction de propagation. Par exemple, pour une onde incidente quelconque \vec{P}_0 , le vecteur $\alpha(L)\vec{P}_0(L)$ correspond en $x = L$ à la contribution des modes couplés qui se propagent dans le même sens que le mode incident \vec{P}_0 . De même, le vecteur $\beta(L)\vec{P}_0(L)$ correspond en $x = L$ à la contribution des modes couplés qui se propagent dans le sens opposé au mode incident \vec{P}_0 . Dans la suite, le système précédent est résolu par décomposition en ordre. Par cela, on peut noter que les éléments de la diagonale de la matrice α sont nuls.

2.3 Décomposition en ordres

Une décomposition en série du système (10) est nécessaire afin de pouvoir le résoudre itérativement. Pour cela, le parcours des ondes acoustiques est approché par une série de rayons, classés en fonction du nombre de réflexions réalisées lors de leur propagation. Le premier terme de cette série correspond à l'approximation WKB [6]. Pour des guides d'ondes irréguliers, des réflexions sont engendrées par la variation de largeur du guide d'ondes. L'ordre de développement de la série correspond alors aux nombres de couplages co-propagatifs ou contra-propagatifs réalisés par les ondes lors de leur propagation.

L'approximation WKB (ordre 0 de la série de Bremmer) représente la propagation adiabatique (sans couplage) des modes transverses. Obtenue par l'annulation des termes de couplages α et β dans le système d'équations (10), l'évolution des composantes du champ de pression à l'ordre 0 prend la forme suivante :

$$\vec{P}_0^+ = \left(\Gamma - \frac{1}{2}\Gamma^{-1}\Gamma' \right) \vec{P}_0^+, \quad (12)$$

$$\vec{P}_0^- = \left(-\Gamma - \frac{1}{2}\Gamma^{-1}\Gamma' \right) \vec{P}_0^-. \quad (13)$$

Pour une onde incidente $\vec{P}_{inc.}$ se propageant dans le sens des x croissants dans un guide de longueur infinie, les solutions des équations (12) et (13) s'écrivent

$$\vec{P}_0^+(x) = H^+(0, x)\vec{P}_{inc.}, \quad (14)$$

et

$$\vec{P}_0^- = 0, \quad (15)$$

où la matrice H^+ représente le propagateur adiabatique pour les modes co-propagatifs. Les termes de cette matrice sont définis d'après la relation

$$H_{nm}^+(x_1, x_2) = \sqrt{\frac{k_n(x_1)}{k_n(x_2)}} e^{i \int_{x_1}^{x_2} k_n(s) ds} \delta_{nm}. \quad (16)$$

De même, une matrice H^- , représentant le propagateur adiabatique pour les modes contra-propagatifs, peut être définie. Les termes de cette matrice s'écrivent

$$H_{nm}^-(x_1, x_2) = \sqrt{\frac{k_n(x_1)}{k_n(x_2)}} e^{-i \int_{x_1}^{x_2} k_n(s) ds} \delta_{nm}. \quad (17)$$

Pour ces deux propagateurs, le terme exponentiel traduit l'évolution de la phase des ondes acoustiques. La racine carrée qui lui est associée représente la variation de l'amplitude des ondes.

L'ordre 1 de la série de Bremmer est constitué par deux contributions, correspondant aux couplages co-propagatifs et contra-propagatifs de l'onde $\vec{P}_0^+(x)$. L'approximation de l'équation d'onde à l'ordre 1 s'écrit

$$\vec{P}_1^+ = \left(\Gamma - \frac{1}{2}\Gamma^{-1}\Gamma' \right) \vec{P}_1^+ + \alpha \vec{P}_0^+, \quad (18)$$

$$\vec{P}_1^- = \left(-\Gamma - \frac{1}{2}\Gamma^{-1}\Gamma' \right) \vec{P}_1^- + \beta \vec{P}_0^+. \quad (19)$$

Pour les ordres de développement supérieurs à 1, les composantes co-propagative et contra-propagative du champ de pression reçoivent respectivement la contribution des ondes réfléchies et transmises qui changent de sens de propagation par couplage β . Ainsi, une relation de récurrence peut prendre la forme

$$\vec{P}_{m+1}^+ = \left(\Gamma - \frac{1}{2}\Gamma^{-1}\Gamma' \right) \vec{P}_{m+1}^+ + \alpha \vec{P}_m^+ + \beta \vec{P}_m^-, \quad (20)$$

$$\vec{P}_{m+1}^- = \left(-\Gamma - \frac{1}{2}\Gamma^{-1}\Gamma' \right) \vec{P}_{m+1}^- + \alpha \vec{P}_m^- + \beta \vec{P}_m^+. \quad (21)$$

Comme pour l'ordre 1 de la série, ce système d'équations différentielles est résolu par itération. Ces solutions sont exprimées sous forme d'équations intégrales de Volterra du premier type.

Par exemple, la solution de l'équation (18) correspond à la somme de toutes les contributions venant des ondes $\vec{P}_0^+(x')$ s'étant couplées vers la droite, puis propagées jusqu'au point x , ce qui s'écrit

$$\vec{P}_1^+(x) = \int_0^x H^+(x', x) \alpha(x') \vec{P}_0^+(x') dx'. \quad (22)$$

De même, l'onde $\vec{P}_1^-(x)$ correspond à la somme de toutes les contributions des ondes $\vec{P}_0^+(x')$ s'étant couplées vers la gauche, puis rétro-propagées jusqu'au point x , ce qui correspond à

$$\vec{P}_1^-(x) = \int_L^x H^-(x', x) \beta(x') \vec{P}_0^+(x') dx'. \quad (23)$$

Les solutions des deux équations différentielles constituant la relation de récurrence sont décomposées en plusieurs

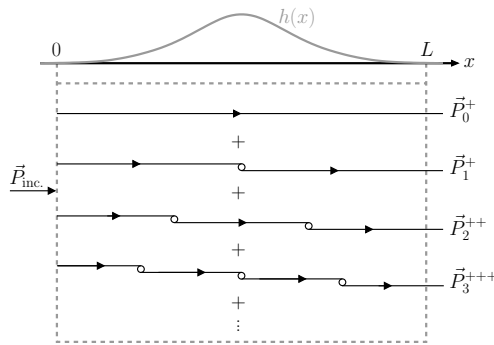


FIGURE 2 – Résolution itérative de l'équation unidirectionnelle (24). Par rapport à la série de Bremmer complète, seules les ondes directement transmises (sans couplage β) sont représentées.

solutions élémentaires. En effet, au-delà de l'ordre 1 les contributions co-propagatives et contra-propagatives peuvent avoir différentes origines. Les contributions co-propagatives $\vec{P}_{m+1}^{\dots+}$ proviennent des ondes transmises qui sont couplées sans changement de sens de propagation ($\alpha\vec{P}_m^{\dots+}$) mais également des ondes réfléchies qui sont couplées en changeant de sens de propagation ($\beta\vec{P}_m^{\dots-}$). De même, les contributions contra-propagatives $\vec{P}_{m+1}^{\dots-}$ proviennent des ondes réfléchies couplées sans changement de sens de propagation ($\alpha\vec{P}_m^{\dots-}$) mais également des ondes transmises qui sont couplées en changeant de sens propagation ($\beta\vec{P}_m^{\dots+}$). Par conséquent, les ondes à l'ordre m donnent toutes naissance à deux autres ondes à l'ordre $m+1$. Ainsi, pour un ordre m quelconque, il y a 2^m équations intégrales à calculer. Ces équations intégrales, solutions des composantes de chaque ordre de la série, sont calculées numériquement.

3 Approximation unidirectionnelle

L'approximation unidirectionnelle de l'équation d'onde est obtenue en négligeant les couplages contra-propagatifs β . L'approximation unidirectionnelle du système d'équation différentielle (10) s'écrit alors

$$\vec{P}^{+\prime} = \left(\Gamma - \frac{1}{2} \Gamma^{-1} \Gamma' \right) \vec{P}^+ + \alpha \vec{P}^+, \quad (24)$$

$$\vec{P}^{+\prime} = \left(-\Gamma - \frac{1}{2} \Gamma^{-1} \Gamma' \right) \vec{P}^- + \alpha \vec{P}^-. \quad (25)$$

Ces deux équations différentielles d'ordre 1 étant découplées, leur résolution est traitée comme un problème aux valeurs initiales. Une méthode de Magnus est alors utilisée.

Dans la décomposition du champ de pression en série de Bremmer, l'approximation unidirectionnelle peut être vue comme la somme de toutes les ondes directement transmises sans aucun changement de sens de propagation (voir Fig. 2). La solution itérative à l'ordre 3 de l'équation unidirectionnelle (24) correspond alors à la somme

$$\vec{P}^+ = \vec{P}_0^+ + \vec{P}_1^+ + \vec{P}_2^{++} + \vec{P}_3^{+++}. \quad (26)$$

L'approximation unidirectionnelle est donc constituée d'une seule des composantes de chacun des ordres de la série, elle ne respecte donc pas l'ordre de la série de Bremmer.

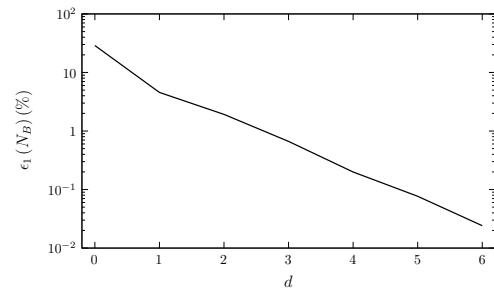


FIGURE 3 – Convergence de la série de Bremmer, erreur relative ϵ_1 (voir Eq. (28)) sur l'ensemble du champ de pression en fonction de l'ordre de développement de la série de Bremmer (mode 1 incident, $\frac{k}{\pi} = 2.1$, $\sigma = 0.4$, $a = 0.075$, $\eta = 1.5$ et $L = 3$).

4 Résultats

Pour la première partie des résultats présentés, la fonction $h(x)$, décrivant la géométrie de la paroi supérieure du guide d'ondes, est une fonction gaussienne

$$h(x) = 1 + a e^{-\frac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}}, \quad (27)$$

avec a , σ et η représentant respectivement l'amplitude, l'écart-type et le centre de la gaussienne. La variation de la largeur du guide d'ondes s'effectue autour d'une valeur moyenne, la largeur d'entrée du guide est identique à celle de sortie.

Une méthode de résolution numérique est mise au point afin de calculer, à un ordre donné, toutes les ondes décomposant le champ de pression en série de Bremmer. Cette méthode est basée sur l'utilisation sous Matlab de l'environnement Chebfun [10, 11], développé par le groupe d'analyse numérique de l'Université d'Oxford. L'usage de Chebfun permet une utilisation simplifiée des méthodes de calcul numérique appliquées aux fonctions continues.

4.1 Convergence de la série

L'indicateur ϵ_1 est défini comme l'erreur relative entre la solution de référence (méthode multimodale) et une reconstruction du champ de pression jusqu'à un ordre d et s'écrit

$$\epsilon_1(d) = \frac{\int_0^L \int_0^{h(x)} \left| \sum_{m=0}^d (p_m) - p_{\text{ref.}} \right|^2 dy dx}{\int_0^L \int_0^{h(x)} |p_{\text{ref.}}|^2 dy dx}. \quad (28)$$

La figure 3 présente l'évolution de l'indicateur ϵ_1 en fonction de l'ordre maximal de reconstruction du champ de pression. Pour cet exemple, la variation de largeur du guide d'ondes est décrite par la fonction $h(x)$ (voir Eq. (27)) dont l'amplitude et l'écart-type de la fonction gaussienne valent respectivement $a = 0.075$ et $\sigma = 0.4$. La longueur du guide d'ondes est fixée à $L = 3$. Le mode transverse d'ordre 1, $g_1(x, y)$, est incident en $x = 0$ pour un nombre d'onde réduit $\frac{k}{\pi} = 2.1$. Dans ce cas, l'augmentation de l'ordre de développement fait converger la reconstruction du champ de pression vers la solution de référence, l'erreur relative sur le champ de pression total $\epsilon_1(d)$ étant monotonement décroissante.

4.2 Modélisation du champ de pression transmis à travers un guide d'ondes irrégulier

4.2.1 Variation de la section du guide d'ondes autour d'une largeur moyenne

Afin d'observer l'effet de l'augmentation de l'ordre de développement en un endroit donné du guide d'ondes, une erreur relative $\epsilon_{2_d}(x)$ est calculée sous la forme

$$\epsilon_{2_d}(x) = \frac{\int_0^{h(x)} \left| \sum_{m=0}^d (p_m(x)) - p_{\text{ref.}}(x) \right|^2 dy}{\int_0^{h(x)} |p_{\text{ref.}}(x)|^2 dy}. \quad (29)$$

Cet indicateur intégré représente l'erreur relative sur le champ de pression transverse entre la solution de référence et une recombinaison du champ de pression jusqu'à un ordre d . Afin d'évaluer la pertinence de l'approximation unidirectionnelle sur la modélisation du champ de pression transmis, l'erreur relative ϵ_{2_d} est calculée en sortie du guide ($x = L$) pour différents ordres de reconstruction du champ de pression. Par définition, seules les composantes dont l'exposant se termine par un signe $+$ contribuent sur le champ de pression en sortie du guide d'ondes (par exemple : p_2^{++} , p_3^{+++} , etc.). Cela correspond pour chaque ordre de la série à la moitié des composantes du champ de pression. Évaluer la pertinence de l'approximation unidirectionnelle, en sortie du guide d'ondes, revient alors à comparer les contributions des composantes directement transmises (par exemple p_2^{++}) avec celles des composantes transmises mais issues de réflexions (par exemple p_2^{-+}).

La figure 4 représente l'erreur relative $\epsilon_{2_d}(L)$ pour différents ordres de reconstruction d en fonction de la longueur de l'irrégularité L_{10} . La variable L_{10} correspond à la largeur de l'irrégularité pour le dixième de la hauteur de la gaussienne ($L_{10} = 2\sqrt{2} \ln 10 \sigma$). Pour une hauteur a donnée, faire varier la largeur de la gaussienne revient à faire varier la pente de l'irrégularité. Une erreur importante est affichée entre la solution de référence et l'ordre 0 de la série. Les largeurs d'entrée et de sortie du guide étant identiques, le terme d'amplitude du propagateur adiabatique $H^+(0, L)$ est égal à 1 (voir Eq. (16)). L'ordre 0 n'apporte alors pas d'information significative en sortie du guide d'ondes sur la perturbation causée par l'irrégularité du guide. Pour un même ordre de reconstruction, plus la longueur de l'irrégularité du guide se réduit et plus l'erreur sur la reconstruction augmente. En effet, plus la largeur de la gaussienne se rapproche de la longueur d'onde et plus l'irrégularité du guide a un impact sur le champ de pression, avec notamment des couplages contra-propagatifs de plus grande amplitude. Pour $k/\pi = 2.1$, les trois premiers modes propres transverses sont propagatifs. De même, pour $k/\pi = 5.1$ les six premiers modes propres transverses sont propagatifs. Les contributions des différents ordres de reconstruction du champ de pression ne sont pas de même importance en fonction du nombre de modes propagatifs. Comme le montre la figure 4(a), les contributions des ordres 1 et 2 et celles des ordres 3 et 4 sont relativement proches. Avec si peu de modes propagatifs, la possibilité qu'ont les modes de se coupler est assez limitée. Il est alors possible que certains ordres du développement n'apportent

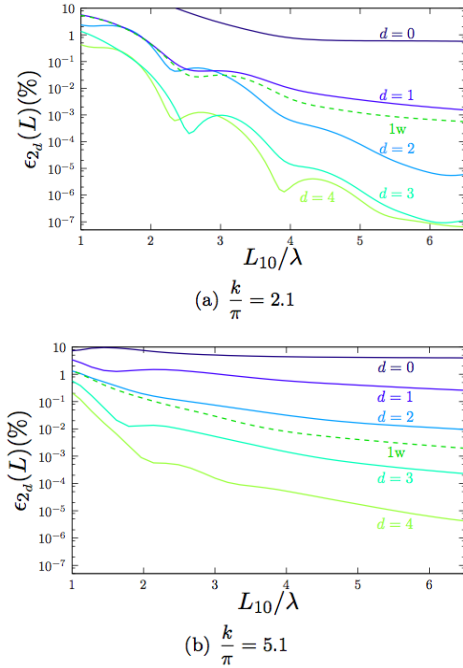


FIGURE 4 – Erreur relative $\epsilon_{2_d}(L)$ en fonction de la longueur de l'irrégularité L_{10} , comparaison entre l'approximation unidirectionnelle et la reconstruction du champ de pression jusqu'à un ordre d , (mode 1 incident, $a = 0.075$, $\eta = 4.5$ et $L = 9$).

pas une contribution significative sur le champ de pression en sortie du guide. Pour un nombre de modes propagatifs plus élevé, la figure 4(b) montre que la hiérarchie entre les ordres de développement est respectée.

Sur la figure 4, l'erreur relative calculée entre l'approximation unidirectionnelle et la solution de référence est représentée par une courbe pointillée verte. Par définition, en sortie du guide l'approximation unidirectionnelle ne peut pas présenter une erreur supérieure à celle de la reconstruction du champ de pression jusqu'à l'ordre 1. En effet, en $x = L$, l'approximation unidirectionnelle et la reconstruction du champ de pression jusqu'à l'ordre 1 sont identiques, la composante p_1^- n'apportant aucune contribution sur le champ de pression transmis. Pour $k/\pi = 2.1$, l'approximation unidirectionnelle correspond à un champ de pression transmis compris entre la reconstruction jusqu'à l'ordre 1 et l'ordre 2 (voir Fig. 4(a)). De plus, pour $k/\pi = 5.1$, l'approximation unidirectionnelle correspond à un champ de pression transmis compris entre la reconstruction jusqu'à l'ordre 2 et l'ordre 3 (voir Fig. 4(b)). Cela signifie que les premiers ordres de la série peuvent être approchés par leurs composantes directement transmises et jamais réfléchies, par exemple p_1^+ , p_2^{++} et p_3^{+++} . Les amplitudes des composantes contra-propagatives du champ de pression sont alors relativement faibles.

La figure 5 représente l'erreur $\epsilon_{2_d}(L)$ pour différents ordres de reconstruction d , la hauteur de la fonction gaussienne $h(x)$ est variable, sa largeur est fixée ($L_{10} = 1.7$). Dans ce cas, la variation du nombre de modes propagatifs n'influe pas sur la hiérarchie des contributions des différents ordres de développement. Par ailleurs, l'augmentation ($a > 0$) ou la réduction ($a < 0$) de la largeur du guide a le même impact sur la nature des couplages puisque les courbes présentées aux figures 5(a) et 5(b) sont quasiment symétriques. Il en est

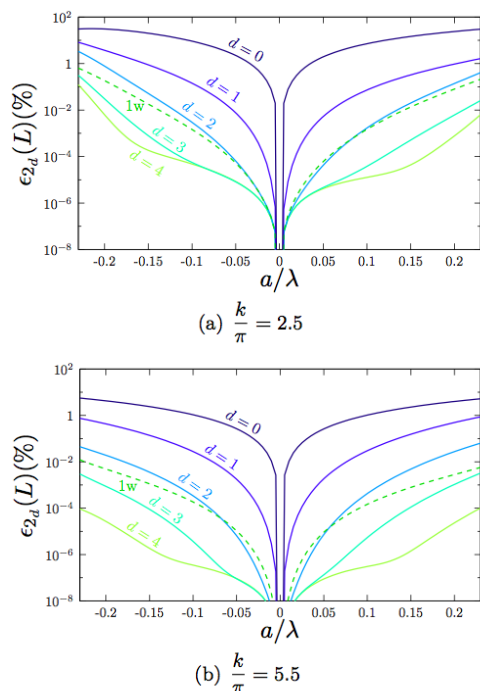


FIGURE 5 – Erreur relative $\epsilon_{2_d}(L)$ en fonction de la hauteur de l'irrégularité. Comparaison entre l'approximation unidirectionnelle et la reconstruction du champ de pression jusqu'à un ordre d , (mode 1 incident, $\sigma = 0.4$, $\eta = 1.5$ et $L = 3$).

de même pour l'approximation unidirectionnelle, qui, dans ce cas, approche l'ordre 2 de la reconstruction du champ de pression en sortie du guide.

Pour les résultats présentés précédemment, l'indice du mode incident était fixé à 1. Comme le montre la figure 6, pour une géométrie de guide d'ondes donnée ($a = 0.1$ et $\sigma = 0.4$), l'augmentation de l'indice du mode incident a pour effet d'augmenter l'erreur relative $\epsilon_{2_d}(L)$ pour toutes les reconstructions du champ de pression. Cela est dû à la complexification de la nature des couplages pour les modes d'indices élevés, ce qui favorise les couplages contra-propagatifs. Il en est de même pour l'approximation unidirectionnelle : l'augmentation de l'indice du mode incident fait augmenter l'erreur sur la modélisation du champ de pression en sortie du guide. Par exemple, pour $k/\pi = 5.1$ (voir Fig. 6(b)) et pour un mode plan incident, l'approximation unidirectionnelle approche l'ordre 3 de la reconstruction du champ de pression, alors que pour un mode incident d'indice 5 l'approximation unidirectionnelle correspond plutôt à l'ordre 2 de la reconstruction. Dans ce cas, l'augmentation de l'indice du mode incident a pour effet de faire diminuer la contribution de la composante p_3^{+++} .

4.2.2 Expansion progressive de la section du guide d'ondes

Pour les résultats présentés dans cette section, la fonction $h(x)$, décrivant la géométrie de la paroi supérieure du guide d'ondes, est donnée par

$$h(x) = 1 + \frac{a}{2} (1 + \tanh(\nu(x - \eta))), \quad (30)$$

avec a et η représentant respectivement l'amplitude et le point d'inflexion. La variable ν est un coefficient permettant de faire

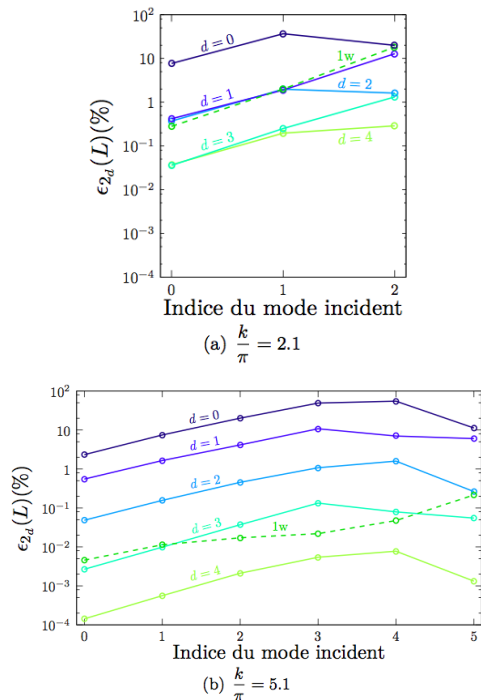


FIGURE 6 – Erreur relative $\epsilon_{2_d}(L)$ en fonction de l'indice du mode incident. Comparaison entre l'approximation unidirectionnelle et la reconstruction du champ de pression jusqu'à un ordre d , ($a = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $\eta = 1.5$ et $L = 3$).

varier la pente de la fonction tangente hyperbolique. Cette fonction est utilisée afin de représenter la variation continue entre deux largeurs différentes d'entrée et de sortie du guide d'ondes.

La figure 7 représente le niveau d'erreur relative ϵ_{2_d} en sortie du guide d'ondes en fonction de la variation d'amplitude a de la fonction tangente hyperbolique, pour différents ordres de reconstruction du champ de pression. Pour une variation d'amplitude du même ordre de grandeur, l'approximation à l'ordre 0 du champ de pression présente une erreur nettement plus faible que pour le cas d'une irrégularité géométrique décrite par une fonction gaussienne (Fig. 5). Dans ce cas, les largeurs d'entrée et de sortie du guide d'ondes étant différentes, le terme d'amplitude du propagateur adiabatique H^+ apporte une première information sur la perturbation engendrée par l'irrégularité du guide. De part l'aspect symétrique des courbes de la figure 7, l'augmentation ou la réduction de la largeur du guide d'ondes ne semble pas modifier la nature des couplages constituant le champ de pression transmis. Cependant, pour certaines fréquences et certains types de conditions initiales, le rétrécissement du guide peut favoriser la réflexions des ondes. Par ailleurs, le nombre de modes propagatifs n'influe pas sur la hiérarchie des contributions des différents ordres de reconstruction. L'approximation unidirectionnelle propose une modélisation du champ de pression transmis comprise entre les reconstructions jusqu'à l'ordre 1 et 2. Contrairement au cas présenté à la figure 5, pour une irrégularité géométrique du guide d'ondes décrite par une fonction hyperbolique, les mécanismes de couplage qui régissent la propagation acoustique favorisent moins les ondes directement transmises. Ainsi, les composantes p_2^{++} et p_3^{+++} n'étant pas celles qui présentent la contribution majoritaire à leurs ordres de développement respectifs, la

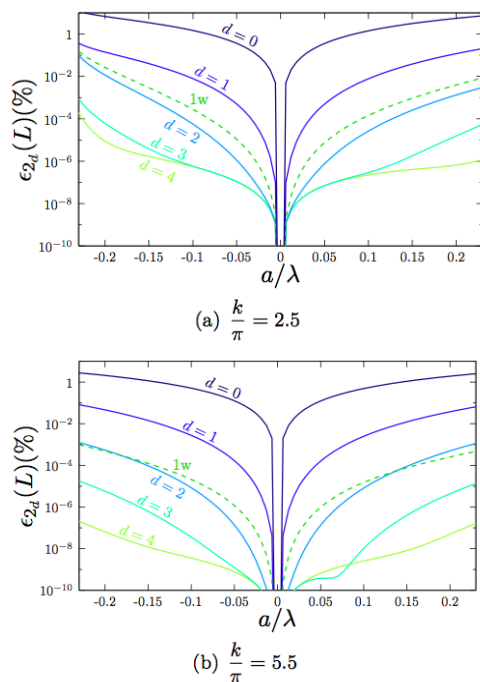


FIGURE 7 – Erreur relative $\epsilon_{2_d}(L)$ en fonction de la hauteur de l'irrégularité a , comparaison entre l'approximation unidirectionnelle et la reconstruction du champ de pression jusqu'à un ordre d , (mode 1 incident, $\nu = 2$, $\eta = 1.5$ et $L = 3$).

description du champ de pression en sortie du guide proposée par l'approximation unidirectionnelle est dans ce cas limitée à l'ordre 1.

5 Conclusion

Dans ce travail, l'équation de Helmholtz bidimensionnelle en guide d'ondes irrégulier est résolue itérativement sur le principe d'une décomposition du champ de pression en série de Bremmer. Les équations intégrales correspondant à chaque composante de la série sont résolues numériquement, elles peuvent cependant constituer une formulation analytique de la solution de l'équation d'onde. Pour des variations lentes de la géométrie du guide d'ondes, la série de Bremmer converge vers la solution de référence. Une reconstruction du champ de pression par ordre successif a mis en avant les contributions particulières des différents ordres de la série de Bremmer. Une première étude paramétrique a mis en évidence la diversité et la complexité des mécanismes de couplage régissant la propagation acoustique dans des guides d'ondes irréguliers.

La forme complète de l'équation multimodale unidirectionnelle peut être vue comme une recombinaison partielle de la série de Bremmer. À partir de l'ordre 1, une partie des composantes de la série n'est alors pas prise en compte. C'est pourquoi l'approximation unidirectionnelle devrait a priori correspondre à l'ordre 1 de la série. Cependant, dans certains cas, l'approximation unidirectionnelle a permis d'obtenir une estimation du champ de pression transmis pouvant correspondre à une reconstruction de la série jusqu'à l'ordre 2.

Références

- [1] J. Coronas, Bremmer series that correct parabolic approximations, *J. Math. Anal. Appl.*, **502**, 361-372 (1975).
- [2] H. McMaken, On the convergence of the Bremmer series for the Helmholtz equation in 2-D, *Wave Motion*, **83**, 277-283 (1986).
- [3] M. V. de Hoop and A. K. Gaudesen, Uniform Asymptotic Expansion of the Generalized Bremmer Series, *SIAM J. Appl. Math.*, **6034**, 1302-1329 (2000).
- [4] M. Gustafsson, The Bremmer series for a multi-dimensional acoustic scattering problem, *J. Phys. A : Math. Gen.*, **339**, 1921 (2000).
- [5] L. Leviandier, The one-way wave equation and its invariance properties, *J. Phys. A : Math. Theor.* **42**, 265402 (2009).
- [6] H. Bremmer, The W. K. B. approximation as the first term of a geometric-optical series, *Commun. Pure Appl. Math.* **4**, 105-115 (1951).
- [7] M. V. de Hoop, Generalization of the Bremmer coupling series, *J. Math. Phys.*, **377**, 3246-3282 (1996).
- [8] L. Fishman, A.K. Gaudesen and Z. Sun, Uniform high-frequency approximations of the square root Helmholtz operator symbol, *Wave Motion*, **262**, 127-161 (1997).
- [9] V. Pagneux, Multimodal admittance method in waveguides and singularity behavior at high frequencies, *Comput. Appl. Math.* **234**, 1834-1841 (2010).
- [10] Z. Battles and L. N. Trefethen, An extension of MATLAB to continuous functions and operators, *SIAM J. Sci. Comput.*, **25**, 1743-1770 (2004).
- [11] R. Pachón and L.N. Trefethen, Barycentric-Remez algorithms for best polynomial approximation in the chebfun system, *BIT.*, **494**, 721-741 (2009).