

## **Le grondement du son à longue distance (Rumble)**

P. Delorme

ONERA DSNA, BP 72 29, avenue de la division Leclerc, 92322 Chatillon-Cedex, France  
philippe.delorme@onera.fr

En général la propagation du son dans l'atmosphère est régie par l'équation de d'Alembert. Il peut s'agir aussi bien de propagation 3D que de propagation 2-D pour le bang sonique. Mais, des phénomènes plus complexes pouvant être impliqués, ce n'est pas toujours le cas. On peut citer : l'absorption atmosphérique qui joue un rôle important dans une propagation à longue distance ou les non-linéarités dans le cas du bang sonique par exemple. On s'intéresse ici au phénomène dit du "Rumble" : tout le monde a observé que, lors d'un orage, lorsque celui-ci est éloigné, le "tonnerre gronde" au loin. Un phénomène semblable se produit pour le bang sonique (on parle alors de Rumble 2-D) et celui-ci a été quantifié pour le Concorde [1]. On envisage différentes pistes pouvant expliquer le phénomène et on retient l'hétérogénéité de l'atmosphère : il faut prendre en compte dans les équations des termes qui ne peuvent être négligés à longue distance. On doit alors résoudre non pas l'équation du son mais une équation du type Klein-Gordon. Dans le cas académique où l'on suppose la vitesse du son constante en altitude, on peut résoudre cette équation qui modélise assez bien le phénomène [2]. Mais il faut trouver des méthodes numériques pour résoudre le cas plus général. On s'intéresse ici au cas déjà complexe d'une atmosphère stratifiée.

## 1 Introduction

Le point de départ de cette étude est l'observation à longue distance (100-1000 km de la trace au sol) des signaux infra-soniques émis par le Concorde c.f. [1]. Alors que sous trace, on observe la classique "onde en N" d'une durée de 2 secondes environ, au fur et à mesure que l'on s'éloigne, le signal observé s'allonge pour durer plusieurs minutes et a un comportement chaotique avec des bouffées. (voir figure 1). L'azimut et le site du signal restent constants et concordent bien avec la trajectoire de l'avion. Le contenu spectral, autant que l'on puisse en juger, correspond à une onde en N privée des hautes fréquences à cause de l'absorption. Le problème est donc le suivant : comment expliquer puis modéliser la disparition de l'onde en N à longue distance.

Dans un premier temps, on va poser le problème physique. Puis on va passer en revue les différentes hypothèses qui sont faites à partir des équations de Navier et Stokes supposées modèle incontestable pour arriver à l'équation de D'Alembert, le modèle le plus simple de la propagation. Finalement on a retenu comme explication la présence dans les équation de termes provenant de l'hétérogénéité du milieu dû à la stratification de ce dernier par la gravité : il s'agit de termes n'appartenant pas au symbole principal (termes multiplicatifs), qui proviennent de l'hétérogénéité du milieu. Le nombre adimensionné qui apparaît naturellement est  $r.g/a^2$  ( $r$  la distance de propagation,  $g$  la constante de la gravité et  $a$  la vitesse du son). Ce nombre vaut 1 lorsque  $r$  vaut 10 km et est très petit à faible distance. On remarque en passant que cela s'applique de manière identique à une propagation 3-D et peut expliquer le "grondement du tonnerre". Si l'on suppose un "milieu académique" où la vitesse du son serait constante, on peut simuler une onde en N amortie qui ressemble qualitativement au phénomène observé ([2]). Pour passer à un stade plus quantitatif, on envisage dans un premier temps, une méthode qui peut s'appliquer à un milieu de propagation plus réaliste d'atmosphère stratifiée : cette méthode permet, en utilisant l'invariance par translation (transformée de Fourier) de calculer la fonction de Green du milieu.

## 2 Problème physique

Comme dit dans l'introduction, le problème a son origine dans l'explication du signal acoustique du Concorde à quelques centaines de kilomètres de la trajectoire (voir figure 1). Sous trace, on observe plutôt un signal acoustique très

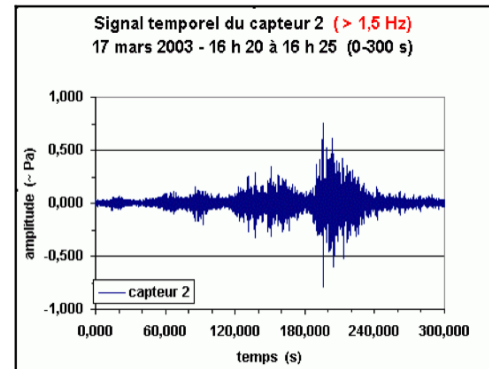


FIGURE 1 – Onde en N lointaine (voir [1])

impulsif en onde en N. (voir figure 2). La différence saute aux yeux. Pour fixer les idées, la durée du phénomène est de

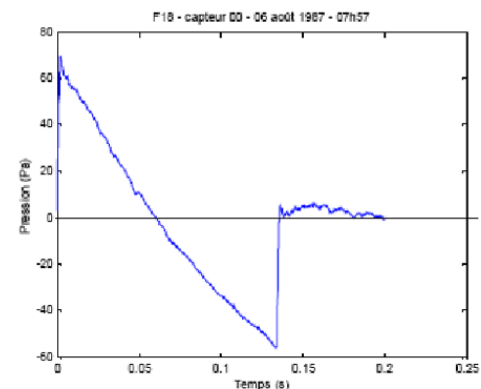


FIGURE 2 – Onde en N sous trace

1/10 ième de seconde près de l'avion (60 m de long à Mach 2), 1 seconde au sol (l'altitude de croisière est d'environ 18 km). A 30 km de la trace au sol (limite de la carapette primaire) la durée est de quelques secondes et l'onde en N est en quelque sorte adoucie (c.f. figure 3). Beaucoup plus loin, le signal dure plusieurs minutes et est très chaotique. Malheureusement, on ne peut pas disposer d'enregistrement intermédiaire qui permettrait de voir le signal se déformer continuellement car il existe une zone de silence au delà de la carapette primaire : l'onde est réfléchiée sur le sol puis réfractée par des gradients de températures positifs vers 50 km d'altitude et enfin retourne vers le sol pour former la carapette secondaire et c. .

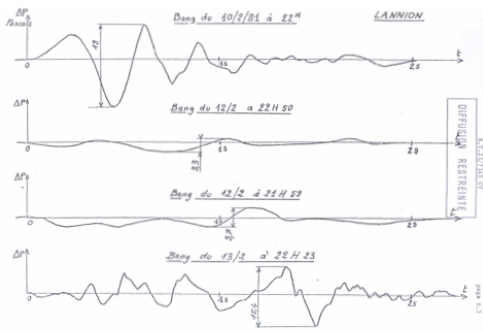


FIGURE 3 – Onde en N adoucie

### 3 Des équations de Navier & Stokes à l'équation de D'Alembert

Pour passer des équations de Navier & Stokes (N&S) à plusieurs espèces (que l'on considère comme un modèle indiscutable) à l'équation de D'Alembert, on peut suivre le chemin suivant :

- par linéarisation, on passe des équations de N&S aux équations de N&S linéarisées (LN&S)
- on néglige les phénomènes visqueux, de conduction et de relaxation pour arriver aux équations d'Euler linéarisées (LEE) qui supposent un milieu non forcé homogène.
- enfin on néglige les termes de multiplication pour arriver à l'équation de D'Alembert (que l'on peut écrire comme un système d'ordre 1 ou d'une équation scalaire à l'ordre 2)

Il faut donc chercher les causes (au moins) dans :

1. les effets non-linéaires,
2. l'absorption du son,
3. la négligence des termes de multiplication.

Mais il y a peut-être d'autres causes liés à d'autres phénomènes comme la turbulence ou le milieu raréfié en haute altitude

#### 3.1 les effets non-linéaires

Pour calculer la signature acoustique en champ proche d'un aéronef, on peut résoudre les équations de N&S et, en général, en comparant avec des essais en soufflerie, la prévision est bonne. Cette signature complexe, du fait des non-linéarités, évolue par "raidissement des fronts" vers l'onde en N : cette évolution est bien prédite par la théorie de Whiteham et on a bien allongement de la durée de 1/10ième de seconde à une seconde (pour Concorde). Mais du fait de l'atténuation géométrique de l'intensité de l'onde en  $1/r$ , au fur et à mesure de la propagation, les phénomènes non-linéaires s'estompent et en bordure de carpe primaire, on voit que les phénomènes d'absorption qui émoussent les fronts prennent le dessus sur le raidissement des effets non-linéaires.

#### 3.2 les effets d'absorption

Ces effets sont complexes ([3]) surtout les effets de relaxation provoquant une hétérogénéité fréquentielle. Mais en simplifiant, on peut dire que ces effets peuvent se modéliser par une fonction de transfert de type passe-bas (en temporel) :

$$F(f) = \exp(-arf^2)$$

Si  $r$  est petit, ce filtre a une fonction de transfert égale à 1, sinon il va adoucir les signaux en supprimant les hautes fréquences. Enfin à longue distance, seuls les infra-sons vont se propager. Pour le Concorde, on peut observer ces ondes en N adoucies mais l'allongement de la durée due à ces effets dissipatifs ne peut pas non plus expliquer un allongement du signal de plusieurs minutes.

### 4 Equations d'Euler linéarisées (LEE)

La propagation (linéaire et sans dissipation) du son dans l'atmosphère peut être modélisée par les LEE (c.f. [3]) autour d'un état de cette dernière. Le plus simple est l'atmosphère hydrostatique : soit  $f_0$  la valeur de la quantité  $f$  au repos et  $f_1$  sa valeur fluctuante. Pour les valeurs au repos, on a :

- equation de la quantité de mouvement suivant  $z$  ( $z$  est l'axe vertical) :

$$\partial_z P_0 = -\rho_0 g \quad (1)$$

$P_0$  est la pression,  $\rho_0$  la densité et  $g$  la gravité

- soit  $T_0 = T(z)$  un profil de température comme par exemple pour l'ISA, grâce à la loi des gaz parfaits,

$$P = \rho RT \quad (2)$$

il est donc possible de calculer le profil de  $P_0(z)$  et de  $\rho_0(z)$ .

Pour établir les équations des fluctuations, on linéarise les équations d'Euler autour de cet état. Il est utile d'introduire une fluctuation de densité adimensionnée :

$$\mu = \frac{\rho_1}{\rho_0(z)}$$

Soient  $u, v, w$  les composantes de la vitesse du fluide et si on fait l'hypothèse d'isentropie :

$$dp_1 = a^2 d\rho_1 \quad a : \text{sound speed}$$

Alors les LEE peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} \partial_t u_1 + a^2 \partial_x \mu &= 0 \\ \partial_t v_1 + a^2 \partial_y \mu &= 0 \\ \partial_t w_1 + a^2 (\partial_z (\rho_0 \mu) / \rho_0) + g \mu &= 0 \\ \partial_t \mu + \partial_x u_1 + \partial_y v_1 + \partial_z w_1 + \rho'_0 / \rho_0 w_1 &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Maintenant on peut supprimer l'indice 1 sans ambiguïté.

$$\begin{aligned} \partial_t u + a^2 \partial_x \mu &= 0 \\ \partial_t v + a^2 \partial_y \mu &= 0 \\ \partial_t w + a^2 (\partial_z \mu + (k_p + k) \mu) &= 0 \\ \partial_t \mu + \partial_x u + \partial_y v + \partial_z w + k_p w &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

avec le nombre d'onde  $k = g/a^2$  Comme l'atmosphère n'est pas homogène, il est nécessaire d'introduire les nombres d'onde :

$$k_\rho = \rho'_0 / \rho_0 \text{ et } k_\theta = T'_0 / T_0 :$$

$$k_\rho = \rho'_0 / \rho_0 = P'_0 / P_0 - T'_0 / T_0 = -\gamma g / a^2 - k_\theta = \gamma k - k_\theta \quad (5)$$

Ces expressions sont obtenues à l'aide des formules 2, 1 et de l'expression de la vitesse du son :

$$a^2 = \gamma RT$$

On peut simplifier l'équation (4). Il suffit de poser :

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= ue^{bz} \\ \tilde{v} &= ue^{bz} \\ \tilde{w} &= ue^{bz} \\ \tilde{\mu} &= \mu e^{bz} \end{aligned}$$

Ainsi (4) est modifiée comme suit :

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{u} + a^2 \partial_x \tilde{\mu} &= 0 \\ \partial_t \tilde{v} + a^2 \partial_y \tilde{\mu} &= 0 \\ \partial_t \tilde{w} + a^2 (\partial_z \tilde{\mu} + (k_\rho + b + k) \tilde{\mu}) &= 0 \\ \partial_t \tilde{\mu} + \partial_x \tilde{u} + \partial_y \tilde{v} + \partial_z \tilde{w} + (k_\rho + b) \tilde{\mu} &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Si on fait l'hypothèse d'une température constante, alors comme pour l'équation de d'Alembert on dérive l'équation de densité par rapport au temps, celles de la quantité de mouvement suivant x par rapport à x, et c. et en recombinant on obtient une équation des ondes modifiées par la présence des nombres d'ondes précédents.

$$\Delta \tilde{\mu} - \partial_{tt} \tilde{\mu} / a^2 - (k + 2k_\rho + 2b) \partial_z \tilde{\mu} - (k_\rho + b)(k + k_\rho + b) \tilde{\mu} = 0 \quad (7)$$

de plus on peut choisir  $k + 2k_\rho + 2b = 0$  et on obtient une équation qui vérifie la conservation de l'énergie analogue à l'équation de Klein-gordon

$$\Delta \tilde{\mu} - \partial_{tt} \tilde{\mu} / a^2 + (k/2)^2 \tilde{\mu} = 0 \quad (8)$$

Dans le cas d'une perturbation du milieu par un mobile supersonique en palier, on obtient une équation des ondes 2-D modifiée. Plus précisément si on définit ([4]) le nombre de Mach  $M_0 = V_0/a$  et le nombre de Prandl-Glauert  $\beta = \sqrt{(M_0^2 - 1)}$ , l'axe de la trajectoire x devient la direction hyperbolique (l'analogie du temps en 3D)

$$\partial_{zz} \mu + \partial_{yy} \mu - (M_0^2 - 1) \partial_{xx} \mu - (k + 2k_\rho) \partial_z \mu - (k_\rho)(k + k_\rho) \mu = 0 \quad (9)$$

$$\Delta_2 \mu - \partial_{xx} \mu \beta^2 - (k + 2k_\rho) \partial_z \mu - (k_\rho)(k + k_\rho) \mu = 0 \quad (10)$$

( $\Delta_2$  est le Laplacien 2-D). Cette équation est une perturbation de l'équation des ondes 2-D.

## 5 Fonction de Green de l'équation des ondes modifiée

Pour les approximations des fonctions utilisées se référer par exemple à [5]. La fonction de Green de l'équation des ondes 2-D

$$\Delta_2 \mu - \beta^2 \partial_{xx} \mu = 0$$

est :

$$G = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 - \beta^2 r^2}}$$

avec  $r^2 = y^2 + z^2$  La perturbation acoustique d'un corps élané supersonique dans une approximation de champ lointain est :

$$\delta p(x - \beta r) = p_0 \frac{\gamma M_0^2}{\sqrt{2\beta r}} F(x - \beta r) \quad (11)$$

$$F(x) = 1/2\pi \int_0^x \frac{A''(s)}{\sqrt{x-s}} ds$$

avec F : fonction de Whitham et A : loi des aires du corps. Le problème est donc maintenant de trouver la fonction de Green de l'équation de Klein-Gordon en 2-D. Après transformation de Fourier en temps, on se ramène simplement à une équation de Helmholtz :

$$\Delta_2 \tilde{G} + \xi^2 \tilde{G} = \delta(y)\delta(z)$$

dont la solution est connue<sup>1</sup> :

$$-i/4H_0^2(\xi, r)$$

Pour l'équation de Helmholtz modifiée,

$$\Delta \tilde{G} + (k^2 - \xi_0^2) \tilde{G} = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$$

la solution fondamentale vaut :

$$\tilde{G} = -i/4H_0^2[\sqrt{(\xi^2 \beta^2 - \xi_0^2)} r] \quad (12)$$

Si on fait une approximation de champ lointain de la fonction de Hankel  $H_0^2$ ,

$$H_0^2(z) \approx e^{i\pi/4} \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-iz} \quad (2\pi > \arg(z) > -\pi) \quad , \quad (13)$$

Si  $\|\beta\xi\| \leq \|\xi_0\|$  l'onde est évanescence. On a donc un effet de filtre passe-haut.

Dans [6], chapter 3 sections 2-7 2-8 and 2-9, la fonction de Green temporelle est donnée :

$$\tilde{G} = \frac{1}{2\pi} \frac{\cos(\xi_0 \sqrt{x^2/\beta^2 - r^2})}{\sqrt{x^2 - \beta^2 r^2}} \quad (14)$$

lorsque  $k' \rightarrow 0$ , on vérifie que l'expression de  $\tilde{G}$  tends bien vers la fonction de Green de l'équation des ondes 2-D

$$\frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 - \beta^2 r^2}} \quad (15)$$

(Pour le cas 3-D, la solution fondamentale vaut :

$$\frac{1}{8\pi} J_{-1}(\xi_0 \sqrt{t^2 - r^2/c^2}) \frac{\xi_0}{\sqrt{t^2 - r^2/c^2}}$$

, où J sont les fonctions de Bessel).

Une approximation de champ lointain de 15 est :

$$\frac{1}{2\pi \sqrt{2\beta r}} \frac{1}{\sqrt{x - \beta r}} \quad (16)$$

On peut faire la même approximation pour 14 :

$$\tilde{G} = \frac{1}{2\pi \sqrt{2\beta r}} \frac{\cos(\xi_0 \sqrt{\frac{2r}{\beta}} \sqrt{x - \beta r})}{\sqrt{x - \beta r}} \quad (17)$$

La figure 5 en donne l'allure

1. le choix est fait avec la définition suivante de la transformée de Laplace ( $p = i\omega + \epsilon$  with  $\epsilon \geq 0$ ) de façon à avoir une décroissance à l'infini.

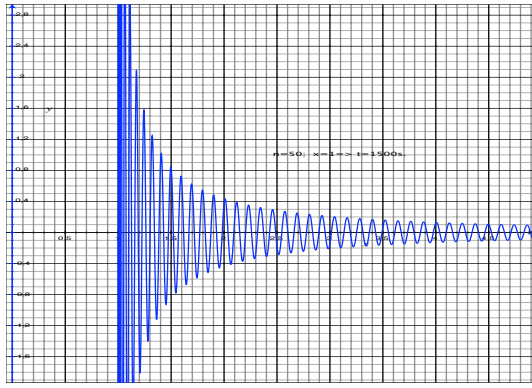


FIGURE 4 – Fonction de Green de l'équation des ondes modifiée dans le cas 2-D

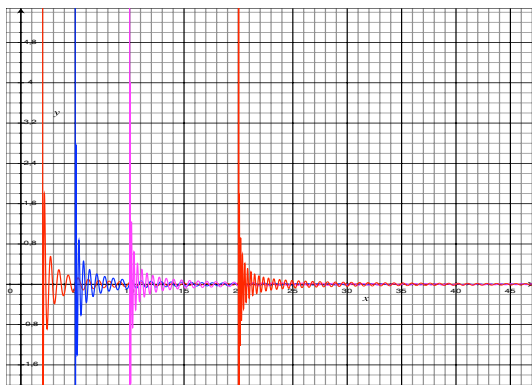


FIGURE 5 – Fonction de Green de l'équation des ondes modifiée (2-D) pour différentes distances

## 6 Onde en N lointaine

Pour obtenir une onde en N lointaine synthétique (voir [7, 2] pour plus de détails), on va dans un premier temps supposer qu'à l'extérieur d'un cercle, la propagation devient linéaire. En appliquant le principe de Huygens, on peut supposer que l'on a une source située sur la trajectoire de l'avion mais avec une signature en N pour prendre en compte les effets non-linéaires. Sa TF est donc :

$$N(\xi) = iP_{max} \left( \frac{\cos(\xi L)}{\xi L} - \frac{\sin(\xi L)}{(\xi L)^2} \right)$$

Ensuite on fait l'hypothèse que les effets dissipatifs peuvent être pris en compte par une fonction de transfert de la forme :

$$F(\xi) = \exp(-a r \xi^2)$$

Le signal reçu, en fréquence spatiale  $\xi$  (suivant la trajectoire) est donc le produit de 3 termes :

- la TF de l'onde en N ;
- le filtre (passe-bas) des effets dissipatifs ;
- le filtre de l'atmosphère : retard de propagation, gain géométrique et filtre passe-haut de la stratification du paragraphe précédent

Le premier produit (onde en N adoucie) est représenté sur la figure 6. Après un retour en spatial par transformée de Fourier inverse, on obtient l'allure donnée par la figure 7.

La conversion temps-espace s'effectuant en se rappelant que le repère avion est en translation au Mach de vol par

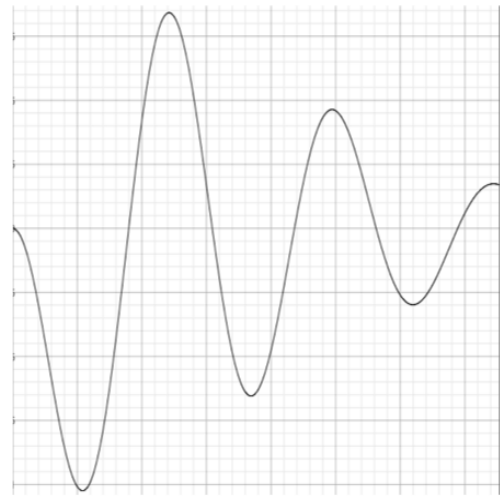


FIGURE 6 – Transformée de Fourier de l'onde en N adoucie

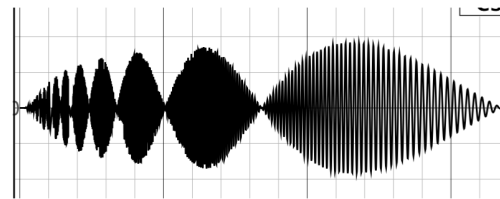


FIGURE 7 – Onde en N lointaine

rapport au sol et ainsi à comparer avec la figure 1. Ce modèle académique atmosphère à vitesse du son constante semble montrer que l'hétérogénéité du milieu atmosphérique est donc un candidat sérieux pour expliquer le Rumble.

## 7 Une méthode dans le cas d'un milieu stratifié

On se place maintenant dans une configuration moins académique : il s'agit d'une atmosphère stratifiée et le cas d'un mobile en palier. On suppose aussi une propagation linéaire, quitte à traiter comme précédemment les effets non-linéaires par une onde en N via le principe de Huygens. Ce cas est suffisamment complexe pour être d'intérêt, car il recèle sans doute un grande part de phénomènes physiques linéaires, notamment l'effet d'un vent horizontal. On se place dans le repère du mobile et on suppose ce dernier est un corps élané de sorte qu'il se comporte comme une source linéique avec une certaine loi des aires et on peut ajouter un "filtre dissipatif". Il est possible de le traiter numériquement en exploitant l'invariance en x et en y par transformée de Fourier. Il suffit alors de résoudre numériquement une équation différentielle ordinaire en z pour trouver la fonction de Green de la propagation. Une première transformée de Fourier inverse (en y) va donner la fonction de transfert  $G(\xi, y, z, h)$  (h est par exemple l'altitude de vol). On multiplie par la TF en  $\xi$  de signature  $S(\xi)$  puis par TF inverse en x on obtient le signal au sol (si  $z=0$ ). Le signal temporel en découle immédiatement.

Plus précisément, on définit :

- $a_0(h)$  la vitesse du son en croisière (vitesse du son de référence)
- $n(z) = a(z)/a_0(h)$

- $\mu = a(z)\rho_1/\rho_0$  ( qui ne doit pas être confondu avec le  $\mu$  des sections précédentes)
- $U_0(z)$  le profil de vent horizontal sur la trajectoire (suivant Ox)
- $V_0(z)$  le profil de vent horizontal perpendiculaire à la trajectoire (suivant Oy)
- soit l'opérateur  $\hat{s}(z) = (M_0 + U_0(z)/a_0(h))\partial_x + V_0(z)/a_0(h)\partial_y$
- enfin si le mobile se déplace à la vitesse  $M_0 a_0(h)$  par rapport au sol, sa vitesse par rapport à l'air vaut  $U_a = M_0 a_0(h) + U_0(z)$

Grâce au profil d'indice qui est une donnée météorologique, on en déduit les profils de température, densité et de pression. Les LEE s'écrivent alors dans le repère lié au mobile sous la forme remarquable de "Friedrich" (matrices  $\mathcal{A}$  symétriques) :

$$\mathcal{A}^x \partial_x \phi + \mathcal{A}^y \partial_y \phi + \mathcal{A}^z \partial_z \phi + \mathcal{B} \phi = 0. \quad (18)$$

avec :

$$\phi = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ \mu \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}^x = \begin{bmatrix} U_a(z) & 0 & 0 & a_0(z) \\ 0 & U_a(z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U_a(z) & 0 \\ a_0(z) & 0 & 0 & U_a(z) \end{bmatrix}.$$

$$\mathcal{A}^y = \begin{bmatrix} V_0(z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_0(z) & 0 & a_0(z) \\ 0 & 0 & V_0(z) & 0 \\ 0 & a_0(z) & 0 & V_0(z) \end{bmatrix}.$$

$$\mathcal{A}^z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0(z) \\ 0 & 0 & a_0(z) & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \partial_z U_0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z V_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g/a_0 - \partial_z a_0 \\ 0 & 0 & a_0 \partial_z \rho_0 / \rho_0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Puis, si on divise les équations 18 par la vitesse du son de référence  $a_0(h)$  :

$$\begin{aligned} \hat{s}u + n(z)\partial_x \mu + k_x w &= 0 \\ \hat{s}v + n(z)\partial_y \mu + k_y w &= 0 \\ \hat{s}w + n(z)(\partial_z \mu) + k_\mu \mu &= 0 \\ \hat{s}\mu + n(z)(\partial_x u + \partial_y v + \partial_z w) + k'_w w &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

Les nombres d'ondes  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_\mu$  et  $k'_w$  se calculent à partir des données météorologiques.

Par transformée de Fourier en x (variable duale  $\xi$ ) et y ( $\eta$ ) l'opérateur  $\hat{s}$  se transforme en la multiplication par  $s = i\xi(M_0 + U_0(z)/a_0(h)) + i\eta V_0(z)/a_0(h)$ . Les deux premières équations de 20 permettent de résoudre algébriquement  $u$  et  $v$  en fonction de  $w$  et  $\mu$ . Les deux dernières sont un système d'équations différentielles linéaires (mais non homogène car dépendant de  $z$ ) :

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} w \\ \mu \end{pmatrix} + C(z) \cdot \begin{pmatrix} w \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta(z-h) \end{pmatrix} \quad (20)$$

avec :

- une condition (1) dite basse en  $z=0$  de type sol (par exemple  $w(0) = 0$ )
- une condition (2) dite haute par exemple en  $z=50$  km sous la forme d'une condition d'impédance transparente ou de surface libre ( $\mu = 0$ ).

On s'inspire de la méthode usuelle du calcul de la fonction de Green pour une équation différentielle scalaire d'ordre 2 ([8]). On définit donc une solution  $G_1(z)$  vérifiant le système 20 et la condition basse, et une solution  $G_2(z)$  vérifiant le système 20 et la condition haute. La fonction de Green vaut donc :

$$\begin{aligned} \text{si } z \leq h & \quad a_1(h)G_1(z) \\ \text{si } z \geq h & \quad a_2(h)G_2(z) \end{aligned} \quad (21)$$

Les conditions de saut en  $z = h$  doivent vérifier :

$$a_2(h)w_2(h) - a_1(h)w_1(h) = 0$$

$$a_2(h)\mu_2(h) - a_1(h)\mu_1(h) = 1$$

ou encore :

$$\begin{pmatrix} w_2 & -w_1 \\ \mu_2 & -\mu_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'où, en inversant :

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} -\mu_1 & w_1 \\ -\mu_2 & w_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

avec  $D = w_1\mu_2 - w_2\mu_1$ . Donc

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

et donc la pression réduite au sol :

$$\mu(0, \xi, \eta) = \frac{1}{D} w_2(h) \cdot \mu_1(0)$$

L'algorithme de calcul est alors le suivant :

#### 1. Initialisation :

- Entrer les profils de température et de vent
- calcul de la pression et de la densité
- calcul de la TF de la source  $S(\xi)$  (onde en N)

#### 2. Boucle en $\xi$ (TF du signal)

Boucle en  $\eta$  :

- Calcul de  $G_1$  : intégration en de  $z = 0$  à  $z = h$
- Calcul de  $G_2$  : intégration en de  $z = 50$  à  $z = h$
- Calcul de  $D$  et calcul de  $\mu(0, \xi, \eta)$
- calcul de  $\mu(0, \xi, y)$  par FFT

#### 3. Calcul du signal en x par FFT sur $\xi$

#### 4. Calcul du signal temporel

## Conclusions et perspectives

Pour expliquer l'allongement et l'apparent aspect anormal d'une onde en N lointaine, différentes explications ont été envisagées. Pour l'auteur, ce comportement peut s'expliquer par la diffraction de l'atmosphère qui ne peut être considérée comme homogène à cause de la gravité. Des petits nombres d'onde viennent s'ajouter à l'équation de D'Alembert que l'on néglige pour les courtes propagations, mais lorsque le nombre sans dimension  $gr/a^2$  devient plus grand que 1, la fonction de transfert de l'atmosphère isotherme devient plus complexe qu'un simple retard (temps de propagation) et une atténuation par effet géométrique : des basses fréquences sont en effet atténuées. Pour vérifier la robustesse de cette hypothèse face à des situations météorologiques variées comme des gradients de température et surtout à des vents, le modèle d'atmosphère stratifiée, encore académique certes, mais suffisamment représentatif a été retenue. Une méthode de calcul de la propagation utilisant l'invariance par translation (transformées de Fourier) a été décrite. Les perspectives immédiates sont bien sûr la comparaison des résultats numériques avec des cas analytiques qui permettra de valider la méthode. Puis des configurations plus réalistes pourront être envisagées.

## Références

- [1] G. Ménéxiadis, *Localisation de sources sonores supersoniques à partir de signaux acoustiques*, Thèse de doctorat, UNIVERSITÉ DE LA MEDITERRANEE. AIX-MARSEILLE II (2008).
- [2] P. Delorme, *Transfer function of the atmosphere over long distances*, Proceeding congrès SFA (Nantes- France) (2012).
- [3] A. D. Pierce, *Acoustics, An introduction to its Physical Principles and Applications*, Mac Graw-Hill Book Company (1981).
- [4] P. Delorme et G. Ménéxiadis, *Rumble of distant sources*, Proceedings : Acoustics Paris'08 (2008).
- [5] M. Abramowitz et I. Stegun, *Handbook of mathematical Functions*, Abramowitz and Stegun (1964).
- [6] I. Guelfand et G. Chilov, *Les Distributions TOME 1*, Dunod, Paris (1962).
- [7] P. Delorme, *Effets diffractifs de l'atmosphère à grande distance*, Dans 10ième congrès français d'acoustique (2010).
- [8] T. Kato, *Perturbation theory for linears operators*, Springer-Verlag (1966).