



Interaction des ondes de Biot avec un défaut de volume dans une céramique poreuse

F. Graja, A. Duclos et C. Depollier

LAUM, UMR-CNRS 6613, Université du Maine, Av. O. Messiaen, 72085 Le Mans, France

fatma.graja.etu@univ-lemans.fr

La théorie de Biot est aujourd'hui acceptée comme le modèle le plus adapté pour étudier la propagation des ondes acoustiques dans les matériaux poreux saturés. Dans ce contexte, une attention est accordée aux inhomogénéités localisées présentes à l'intérieur d'une plaque poreuse et qui sont considérées ici comme des défauts de volume à une dimension. En première approximation, de tels défauts sont modélisés par une tranche de fluide limitée par deux plaques poreuses identiques. La modélisation du comportement acoustique d'un matériau présentant un défaut est réalisée en résolvant les équations du mouvement tout en tenant compte des différentes interfaces présentes. L'étude est réalisée dans le cas d'une incidence normale où seules les ondes de compression sont considérées. La caractérisation du défaut consiste à déterminer sa taille et sa position. L'analyse des coefficients de réflexion et de transmission, accessibles expérimentalement, dans le domaine fréquentiel permet d'étudier ces paramètres. Dans une première partie, l'influence de la position d'un défaut de dimension fixe est étudiée. Dans la seconde partie on s'intéresse à l'influence de la taille d'un défaut positionné au centre de la plaque. Les résultats analytiques montrent que les coefficients de réflexion et de transmission sont décalés vers les hautes fréquences quand l'épaisseur du défaut augmente. Ces deux résultats théoriques sont validés par des résultats expérimentaux obtenus dans le domaine ultrasonore. Les expériences sont réalisées en immergeant une plaque poreuse dans une cuve à eau instrumentée.

1 Introduction

La caractérisation des matériaux poreux a fait l'objet de nombreuses études, entre autres, Johnson et al. [1] et Rasolofosaon [2] ont étudié l'influence des conditions d'interfaces. Dans ce contexte, cette étude s'intéresse aussi à la propagation des ondes acoustiques dans les plaques poreuses saturées, présentant des inhomogénéités localisées (considérées comme des défauts de volume) présentes à l'intérieur de la plaque. De tels défauts sont modélisés par une tranche de fluide limitée par deux plaques poreuses dont les paramètres physiques sont identiques, les interfaces des plaques sont maintenues ouvertes (i.e. connectées au fluide ambiant) et obéissent aux conditions aux limites citées dans [3] :

$$\begin{cases} v^{fe}(z_i, \omega) = hV^f(z_i, \omega) + (1-h)V^s(z_i, \omega) \\ \tau_{zz}^s(z_i, \omega) = -(1-h)p^{fe}(z_i, \omega) \\ \tau_{zz}^f(z_i, \omega) = -hp^{fe}(z_i, \omega) \end{cases} \quad (1)$$

La première partie de ce travail décrit brièvement la théorie de Biot, le développement des équations de propagation et la matrice de diffusion qui permettent d'obtenir les coefficients de réflexion et de transmission. La deuxième partie présente des simulations numériques des différentes configurations étudiées afin de caractériser le défaut de volume. La troisième partie est une étude expérimentale dont les résultats sont comparés à ceux du modèle.

2 Modélisation

Les équations de Biot s'écrivent sous la forme vectorielle suivante [4] :

$$\tilde{\rho}_{11} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \tilde{\rho}_{12} \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} = P \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + Q \nabla(\nabla \cdot \mathbf{U}), \quad (2)$$

$$\tilde{\rho}_{22} \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} + \tilde{\rho}_{12} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = R \nabla(\nabla \cdot \mathbf{U}) + Q \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}), \quad (3)$$

où $\tilde{\rho}_{11}$, $\tilde{\rho}_{22}$ et $\tilde{\rho}_{12}$ sont respectivement les densités effectives des phases fluide et solide et le terme de couplage massique et sont donnés par : $\tilde{\rho}_{11} = (1-h)\rho_s - \tilde{\rho}_{12}$, $\tilde{\rho}_{12} = -h\rho_0(\alpha(\omega) - 1)$, $\tilde{\rho}_{22} = h\rho_0 - \tilde{\rho}_{12}$. Ici h désigne la porosité et $\alpha(\omega)$ la tortuosité dynamique du milieu [4] :

$$\alpha(\omega) = \alpha_\infty \left(1 + \frac{h\sigma}{j\omega\alpha_\infty\rho_f} \sqrt{1 + j \frac{4\alpha_\infty^2 \eta \rho_f \omega}{\sigma^2 \Lambda^2 h^2}} \right). \quad (4)$$

Dans les équations (2) et (3), \mathbf{u} et \mathbf{U} présentent respectivement les déplacements solide et fluide. P , Q , R sont les coefficients élastiques reliés au module de compressibilité du solide k_s et le module de compressibilité du fluide k_f par la relation :

$$P = \frac{(1-h)(1-h - \frac{k_b}{k_s})k_s + h\frac{k_s}{k_f}k_b}{1-h - \frac{k_b}{k_s} + h\frac{k_s}{k_f}} + \frac{4}{3}N,$$

$$Q = \frac{(1-h - \frac{k_b}{k_s})hk_s}{1-h - \frac{k_b}{k_s} + h\frac{k_s}{k_f}},$$

$$R = \frac{h^2k_s}{1-h - \frac{k_b}{k_s} + h\frac{k_s}{k_f}}.$$

Dans l'hypothèse d'une incidence normale, seules les ondes de compression sont prises en considération, les déplacements solide et fluide sont exprimés en fonction des potentiels des vitesses rapide $\bar{\Phi}_1$ et lente $\bar{\Phi}_2$ comme suit :

$$\bar{\Phi}^s = \bar{\Phi}_1 + \bar{\Phi}_2, \quad \bar{\Phi}^f = \mu_2 \bar{\Phi}_1 + \mu_2 \bar{\Phi}_2,$$

Les vitesses des ondes rapide et lente sont données par [3] :

$$V_1^2 = \frac{P\tilde{\rho}_{22} + R\tilde{\rho}_{11} - 2Q\tilde{\rho}_{12} + \sqrt{\Delta}}{2(\tilde{\rho}_{11}\tilde{\rho}_{22} - \tilde{\rho}_{12}^2)}, \quad (5)$$

$$V_2^2 = \frac{P\tilde{\rho}_{22} + R\tilde{\rho}_{11} - 2Q\tilde{\rho}_{12} - \sqrt{\Delta}}{2(\tilde{\rho}_{11}\tilde{\rho}_{22} - \tilde{\rho}_{12}^2)}. \quad (6)$$

où :

$$\Delta = (P\tilde{\rho}_{22} + R\tilde{\rho}_{11} - 2Q\tilde{\rho}_{12})^2 - 4(PR - Q^2)(\tilde{\rho}_{11}\tilde{\rho}_{22} - \tilde{\rho}_{12}^2).$$

Le problème considéré est schématisé dans la figure 1, deux plaques poreuses mesurant L_1 et L_2 sont immergées dans un milieu fluide et séparées par une tranche de fluide d'épaisseur d .

Les équations de Biot et les relations de continuités permettent de déterminer la matrice de diffusion pour chaque milieu poreux, notons par A_i les ondes aller et B_i les ondes retour dans le milieu fluide i , la formulation matricielle obtenue est :

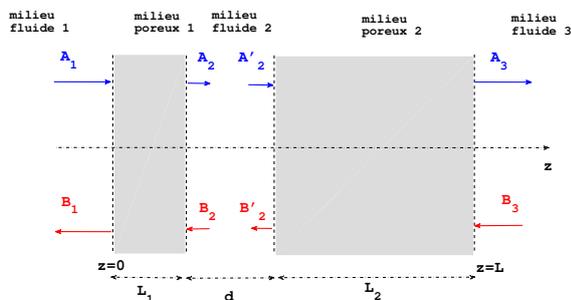


FIGURE 1 – Schéma d'une plaque avec un défaut de volume 1D, d désigne la taille du défaut.

à travers le milieu poreux 1 :

$$\begin{pmatrix} A_2 \\ B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11}^I & t_{12}^I \\ t_{21}^I & t_{22}^I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

à travers le milieu poreux 2 :

$$\begin{pmatrix} A_3 \\ B'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11}^{II} & t_{12}^{II} \\ t_{21}^{II} & t_{22}^{II} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'_2 \\ B_3 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

la matrice de passage dans la tranche de fluide est donnée par :

$$\begin{pmatrix} A'_2 \\ B'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-jk_2d} & 0 \\ 0 & e^{-jk_2d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

La matrice de diffusion globale est obtenue par le produit de Redheffer [5] dont l'expression est :

$$\begin{pmatrix} A_3 \\ B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_3 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

où :

$$\begin{aligned} M_{11} &= t_{11}^{II} (1 - t_{12}^I e^{-jk_2d} t_{21}^{II})^{-1} t_{11}^I e^{-jk_2d} \\ M_{12} &= t_{12}^{II} + t_{11}^{II} t_{12}^I e^{-jk_2d} (1 - t_{12}^I e^{-jk_2d} t_{21}^{II})^{-1} t_{22}^{II} \\ M_{21} &= t_{21}^I + t_{22}^I e^{-jk_2d} t_{21}^{II} (1 - t_{12}^I e^{-jk_2d} t_{21}^{II})^{-1} t_{11}^I e^{-jk_2d} \\ M_{22} &= t_{22}^I e^{-jk_2d} (1 - t_{12}^I e^{-jk_2d} t_{21}^{II})^{-1} t_{22}^{II} \end{aligned}$$

Lorsque $A_1 = 1$ et $B_3 = 0$ les coefficients de transmission et de réflexion de l'ensemble sont respectivement $T = M_{11}$ et $R = M_{21}$.

3 Simulations numériques

Dans cette étude, les simulations numériques sont réalisées en considérant une plaque de céramique poreuse QF-20 (produite par Filtros) d'épaisseur $L = 20mm$, ayant une porosité égale à $h = 0.59$ et une tortuosité égale à $\alpha_\infty = 1.89$ [6]. On s'intéresse à l'étude de l'influence de la position et de la taille du défaut sur les coefficients de transmission et de réflexion ainsi que sur les signaux transmis et réfléchis.

3.1 Influence de la position du défaut

On considère un défaut de taille $d = 4mm$ dont la position est repérée par la distance entre sa première

interface et celle du poreux $z = 0$ (cf. figure 1). Les figures 2 et 3 représentent respectivement les coefficients de transmission T et de réflexion R en fonction de la fréquence dont le domaine de l'étude s'étend de 100 KHz à 800 KHz et de la position du défaut dans la plaque. L'amplitude du coefficient de transmission est importante lorsque le défaut est au voisinage de l'une des interfaces de la plaque et lorsque son centre coïncide avec le centre de la plaque, c'est à dire quand $L_1 = L_2$, le centre de la plaque ($L_1 = L_2 = 8mm$) constitue un axe de symétrie en raison de la réciprocité du système. L'amplitude du coefficient R varie en fonction de la fréquence et de la position du défaut, elle est maximale lorsque la longueur d'onde est égale à la distance entre la première interface de la plaque et la première interface du défaut : par exemple pour la fréquence $f = 470\text{kHz}$, la longueur d'onde est $\lambda = 1.6mm$, l'amplitude du coefficient de réflexion est maximale lorsque le défaut est à la position $z = 1.6mm$. Cette analyse permet de déterminer la position du défaut dans la plaque mais ne renseigne pas sur la distance parcourue par l'onde.

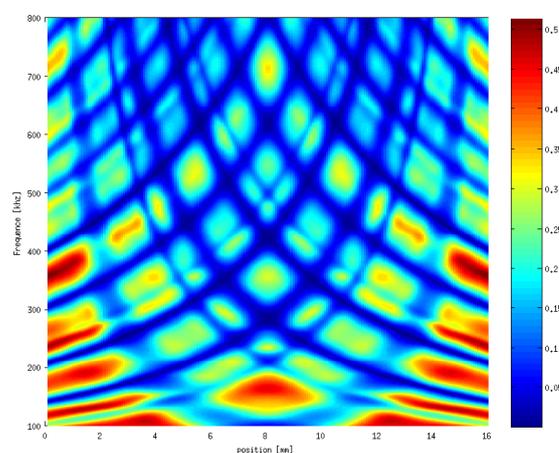


FIGURE 2 – Coefficient de transmission en fonction de la position du défaut et de la fréquence.

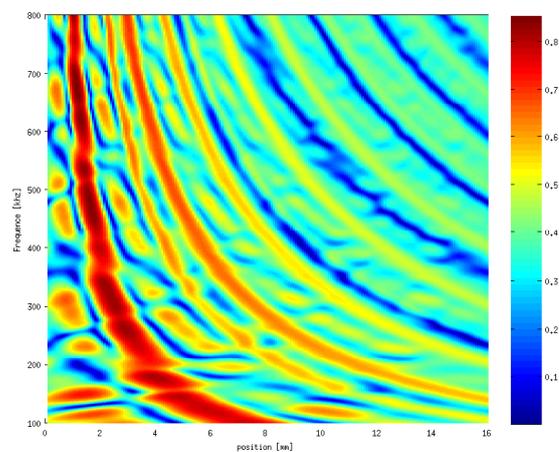


FIGURE 3 – Coefficient de réflexion en fonction de la position du défaut et de la fréquence.

La représentation dans le domaine fréquentiel a permis de comprendre l'influence de la position d'un défaut de

volume dans une plaque poreuse. Afin de mieux comprendre l'influence de la position du défaut, une représentation dans le domaine temporel est établie pour trois configurations : la configuration 1 présente un défaut situé au centre de la plaque et les configurations 2 et 3 présentent deux positions symétriques où le défaut est situé de part et d'autre du centre de la plaque, elles sont schématisées sur la figure 4. Les signaux simulés transmis et réfléchis issus de ces configurations sont représentées sur les figures 5 (signaux transmis) et 6 (signaux réfléchis) par un trait discontinu (- - -) pour la configuration 1, un trait continu (-) pour la configuration 2 et des cercles (o) pour la configuration 3.

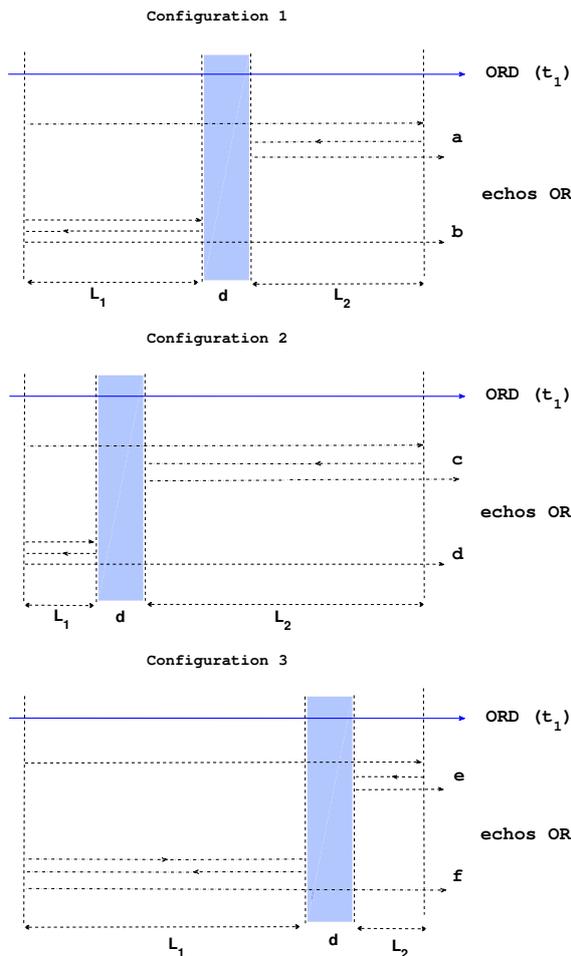


FIGURE 4 – Illustration des trois configurations étudiées

Sur la figure 5 on observe que les signaux transmis issus des configurations 2 et 3 sont parfaitement confondus ce qui montre que la transmission n'est pas sensible aux positions symétriques du défaut dans la plaque. Cela justifie la symétrie du coefficient de transmission (Fig-2). On identifie les ondes et les distances parcourues par leurs vitesses de propagation dans le poreux v_1 (eq. 5) et dans l'eau $c_0 = 1480 \text{ m.s}^{-1}$: la première onde arrive à $t_1 = 6.502 \mu\text{s}$ est une onde rapide directe (ORD) qui a parcouru une seule fois la plaque entière à la vitesse $v_1 \approx 4211 \text{ m.s}^{-1}$, cette onde arrive au même instant pour les trois configurations puisqu'il s'agit de la même distance parcourue. Ensuite, un écho d'onde rapide arrive avec un retard Δt , ce retard dépend de la position du défaut : pour la configuration 1, où le défaut est situé au centre de la plaque, les ondes (a) et (b), Fig-4, parcourent les distances respectives : $L_1 + d + 3L_2$ et $3L_1 + d + L_2$ et arrivent avec le même retard $\Delta t = 5.528 \mu\text{s}$,

on ne peut pas les distinguer sur le signal transmis, une seule onde est observée ; concernant les configurations 2 et 3, qui sont des configurations "symétriques", les distances parcourues par les différentes ondes sont schématisées sur la figure 4 et résumées dans le tableau 1. La figure et le tableau

TABLEAU 1

	Onde	distance parcourue
configuration 2	c	$L_1 + d + 3L_2$
	d	$3L_1 + d + L_2$
configuration 3	e	$L_1 + d + 3L_2$
	f	$3L_1 + d + L_2$

montrent que les ondes (d) et (e) arrivent avec le même retard $\Delta t = 2.8480 \mu\text{s}$ et sont identifiées comme premiers échos de l'onde rapide et les ondes (c) et (f) arrivent avec un retard $\Delta t = 7.1680 \mu\text{s}$ et sont identifiées comme deuxième échos de l'onde rapide.

De la même manière, on identifie sur le signal réfléchi les ondes et les distances parcourues (figure 6) : la première onde arrivant au même instant pour les trois configurations, est l'onde réfléchi à l'interface, l'onde rapide qui a parcouru la distance $2L_1$ arrive respectivement aux configurations 1, 2 et 3 à $t_1 = 4.19 \mu\text{s}$, $t_2 = 2.098 \mu\text{s}$ et $t_3 = 6.29 \mu\text{s}$. Plus le défaut s'éloigne de l'interface de la plaque, plus le temps d'arrivée de l'onde augmente. Il en est de même pour l'onde qui parcourt la distance $4L_1$. Donc, le temps d'arrivée de l'onde dépend de la position du défaut dans la plaque. L'onde qui arrive à $t_4 = 13.51 \mu\text{s}$ est une onde qui a parcouru toute la plaque, elle arrive au même instant pour les trois configurations.

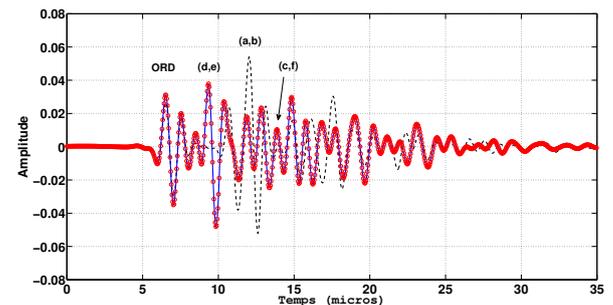


FIGURE 5 – signaux transmis simulés : (- - -) configuration 1, (-) configuration 2, (o) configuration 3

3.2 Influence de la taille du défaut

Considérons un défaut positionné au centre de la plaque, la première interface du défaut étant fixée à $z = L_1$, la taille du défaut évolue vers la deuxième interface de la plaque comme le montre le schéma de la figure 7.

Le coefficient de transmission présenté sur la figure 8, montre que l'amplitude de T augmente avec la taille du défaut augmente. Le coefficient de réflexion donné sur la figure 9, montre des maxima d'amplitudes équidistants,

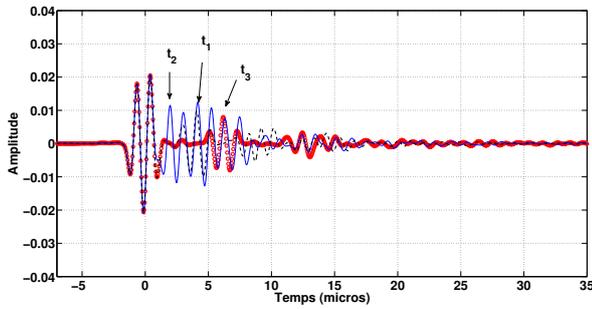


FIGURE 6 – signaux réfléchis simulés : (- -) configuration 1, (-) configuration 2, (o) configuration 3

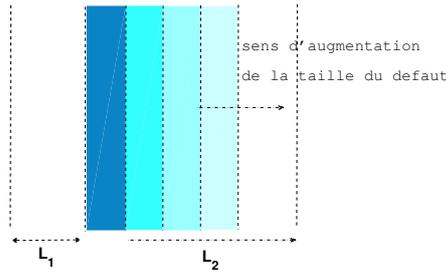


FIGURE 7 – schéma illustrant la variation de la taille du défaut et de la fréquence.

ces maxima sont reliés à la distance entre l'interface de la plaque et celle du défaut qui est fixe (L_1), les petites variations entre deux maxima d'amplitude successifs sont reliés à la taille du défaut.

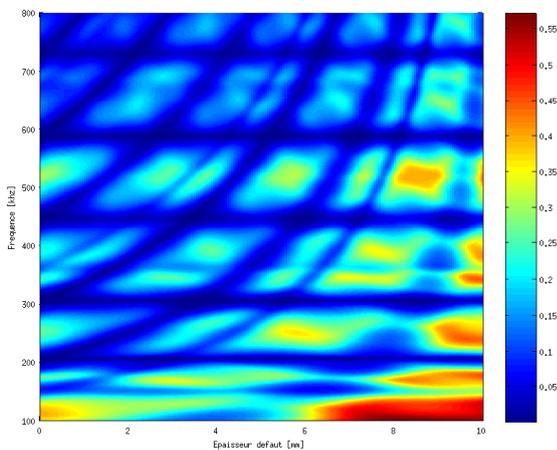


FIGURE 8 – Coefficient de transmission en fonction de la taille du défaut et de la fréquence.

4 Expériences

Dans la partie expérimentale on étudie l'influence de la position du défaut. La plaque de céramique présente un défaut de taille $d = 3.5 \text{ mm}$ positionné à 8 mm de la première interface de la plaque poreuse et à 14.5 mm de sa deuxième interface. Cette plaque est immergée dans une cuve à eau équipée d'un émetteur et d'un récepteur distant de 225 mm . (fréquence de travail et les transducteurs)

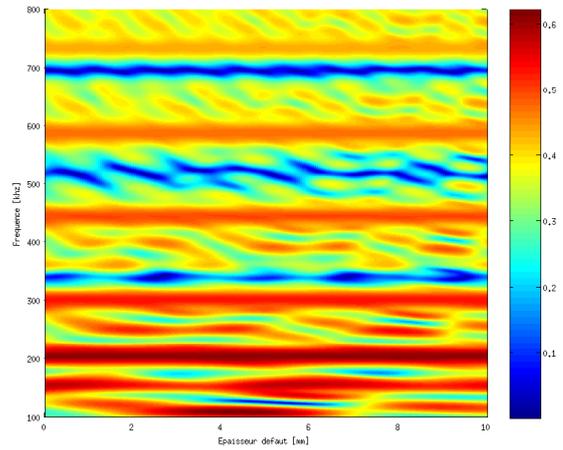


FIGURE 9 – Coefficient de réflexion en fonction de la taille du défaut et de la fréquence.

L'objectif est d'étudier les configurations symétriques 2 et 3 : la configuration 2 est obtenue en plaçant la plaque de manière à ce que le défaut soit du côté de l'émetteur et la configuration 3 est obtenue en tournant. Le montage expérimental est représenté sur la figure 10.

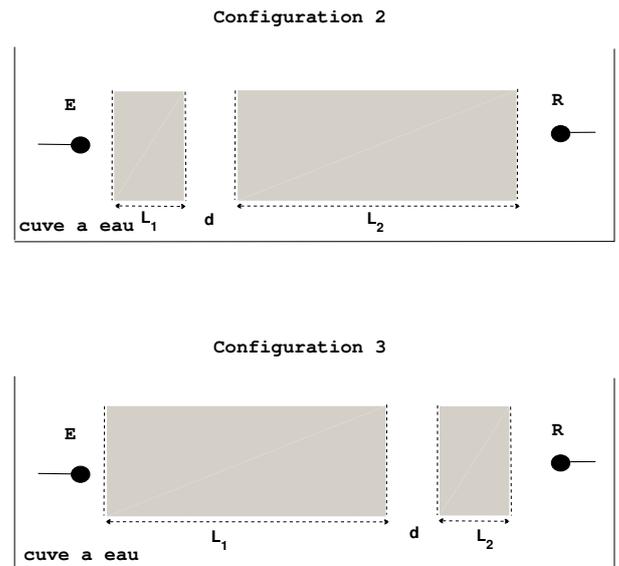


FIGURE 10 – Montage expérimental des configurations 2 et 3.

La figure 12 présente les signaux transmis issus des configurations étudiées (configuration 2 figure en haut et configuration 3 figure en bas) et le signal transmis dans l'eau sans plaque (en trait discontinu). La première mesure est une mesure de référence qui permet d'identifier les ondes visualisées sur les signaux transmis à travers la plaque. le signal de référence arrive à $t_0 = 152 \mu\text{s}$. Les signaux transmis à travers les plaques sont identiques ce qui confirme le résultat théorique : lorsqu'un défaut est placé dans deux positions symétriques dans la plaque poreuse, le signal transmis est le même. Sur les signaux transmis on observe une onde à $t_1 = 143.03 \mu\text{s}$ identifiée comme onde rapide directe qui a parcouru la plaque une fois à la vitesse $v_{rapide} \approx 3629 \text{ ms}^{-1}$, suivie d'un écho d'onde rapide

arrive à $t_2 = 148.6 \mu s$ qui correspond à l'onde (d) de la configuration 2 et l'onde (e) de la configuration 3. Sa vitesse de propagation calculée est égale à $v_{rapide} \approx 3261 \text{ ms}^{-1}$. Les mesures en réflexion sont menées en pulse écho avec

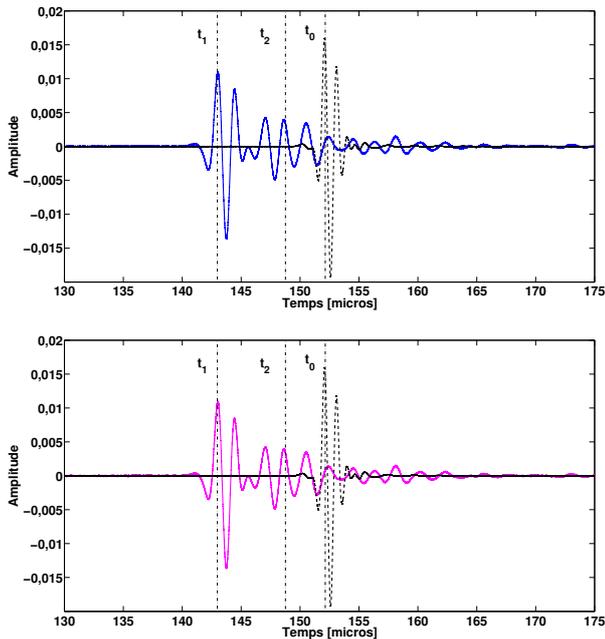


FIGURE 11 – Signaux transmis expérimentaux des configurations 2 (en haut) et 3 (en bas) et le signal transmis dans l'eau (---)

un seul transducteur. La mesure de référence est réalisée en plaçant un réflecteur parfait à une distance de 104 mm du transducteur, on procède de la manière pour les mesures avec plaque en satisfaisant les configurations 2 et 3. Les signaux expérimentaux réfléchis sont présentés sur la figure 13 où le signal réfléchi dans l'eau est affiché en trait discontinu pointillé (· · · · ·), le signal réfléchi de la configuration 2 en trait discontinu (- - -) et celui de la configuration 3 en trait plein. L'onde réfléchie à l'interface arrive à $t_0 = 140.8 \mu s$,

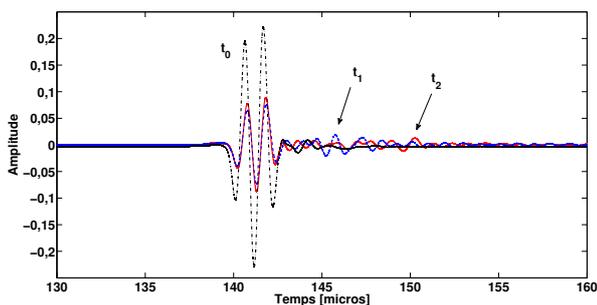


FIGURE 12 – Signaux réfléchis expérimentaux des configurations 2 (---) et 3 (—) et le signal transmis dans l'eau (· · · · ·)

le signal réfléchi de la configuration 2 montre une onde à $t_1 = 145.8 \mu s$ et celui de la configuration 3 montre une onde à $t_2 = 150.3 \mu s$, ces deux ondes sont réfléchies à l'interface du défaut cela explique le temps de retard.

5 Conclusion

L'analyse des coefficients de réflexion et de transmission à travers un milieu poreux qui présente un défaut de volume, a permis de faire le point sur l'interaction des ondes de Biot avec la position et la taille du défaut. L'influence de la position du défaut dans la plaque est importante sur les coefficients de réflexion et de transmission, plus le défaut est proche de l'une des interfaces, plus l'amplitude est importante, on notera que la transmission n'est pas sensible aux positions symétriques du défaut par rapport au centre de la plaque. La variation de la taille du défaut se traduit par une variation dans le même sens de l'amplitude du coefficient de transmission et par un décalage d'amplitude sur le coefficient de réflexion. Cette étude spectrale est validée par une étude temporelle où les signaux transmis et réfléchis simulés reflètent rigoureusement la position et la taille du défaut. Les résultats expérimentaux valident les résultats numériques. Cette étude montre que la théorie de Biot permet de caractériser les paramètres d'un défaut de volume ce qui est intéressant dans le contexte de l'évaluation et du contrôle non destructif.

Références

- [1] D. L. Johnson and D. L. Hemmick and H. Kojima, Probing porous media with first and second sound. I. Dynamic permeability. *Journal of Applied Physics*, **76** (1994), 104–114.
- [2] P. N. J. Rasolofosaon, Importance of interface hydraulic condition on the generation of second bulk compressional wave in porous media. *Applied Physics Letters*, **52** (1988), 780–782.
- [3] G. Belloncle, H. Franklin, F. Luppé, J.M. Conoir, Normal modes of a poroelastic plate and their relation to the reflection and transmission coefficients. *Ultrasonics*, **41** 207–216, 2003
- [4] J.F. Allard and N. Atalla, 2nd edition, Propagation of sound in porous media : modeling sound absorbing materials (edition first published 2009, John Wiley and sons, Ltd)
- [5] R.M Redheffer, On a certain linear fractional transformation *Journal of mathematics and physics*, **39** 269–286, 1921
- [6] F. Belhocine, S. Derible, H. Franklin, Transition term method for the analysis of reflected and the transmitted acoustic signals from water-saturated porous plates. *J. Acoust. Soc. Am*, **122**(3) 1518–1526, 2007