



Etude d'un traitement acoustique basé sur des matériaux poreux pour la réduction du bruit de soufflante

C. Chan, E. Perrey-Debain et J.-M. Ville

UTC, Laboratoire Roberval UMR CNRS, Rue Personne de Roberval, 60205 Compiègne, France
charles.chan@utc.fr

Une méthode modale de prédiction des pertes par transmission d'un conduit de section circulaire traité en surface avec un matériau poreux et soumis à un écoulement uniforme est présentée. L'utilisation des méthodes spectrales permet de résoudre le problème aux valeurs propres du conduit traité avec une grande précision pour des spécifications aéronautiques en terme de dimension et de vitesse d'écoulement. Les performances acoustiques sont évaluées en terme de pertes par transmission par raccordement modal aux interfaces d'entrée et de sortie du silencieux, ce qui permet de réduire considérablement le temps de calcul comparé à une approche élément finis. Les résultats sont présentés pour plusieurs traitements poreux métalliques à différentes vitesses d'écoulement et comparés avec un traitement classique de type localement réactif.

1 Introduction

L'étude des traitements acoustiques est une phase essentielle dans la réduction du bruit émis par les turboréacteurs afin de respecter les réglementations sur les émissions sonores aux abords des aéroports. Actuellement, les constructeurs utilisent des traitements de type localement réactif qui présentent un pic d'atténuation autour de la fréquence d'accord du matériau, c'est pourquoi ils sont utilisés pour réduire le bruit de raie issu du turboréacteur. Cependant, durant la dernière décennie, les changements opérés sur le design des turboréacteurs ont conduit à augmenter le bruit large bande généré par les réacteurs au détriment du bruit de raie, ce qui amène les constructeurs à se tourner vers des traitements acoustiques aux propriétés large bande. Le but de cette étude est de modéliser le comportement acoustique d'un traitement à réaction non localisée dans l'entrée d'air d'un turboréacteur en régime subsonique.

L'étude des silencieux acoustiques contenant un matériau poreux a été largement traitée par différents auteurs, tous prenant en compte la présence d'une plaque perforée à l'interface entre l'air et le poreux. Parmi eux, Peat [1] a développé une formulation éléments finis pour un conduit de géométrie arbitraire alors que Selamet [2] utilise une approche par élément de frontière pour prédire les performances de ces silencieux. Ces deux méthodes numériques 3D demandent des moyens de calcul significatifs qui limitent leurs applications à des conduits de petite dimension. Le raccordement modal est une méthode semi-analytique couramment employée lorsque la géométrie du silencieux est simple, cette méthode nécessite au préalable la connaissance des modes acoustiques présents dans le conduit traité. Pour des applications de petite dimension telles que les échappements d'automobile, la connaissance du mode le moins atténué suffit parfois à prédire les performances du silencieux [3]. Néanmoins, plusieurs modes sont généralement considérés et obtenus par la recherche des zéros de l'équation caractéristique en utilisant des techniques telle que la méthode de Newton-Raphson [3], l'homotopie [4], ou encore l'algorithme de Nelder-Mead [5].

En condition aéronautique, le nombre de modes à considérer est nettement plus important dû à la taille du conduit et à la prise en compte des modes tournants d'azimut m non nul, or les techniques citées précédemment se heurtent rapidement à des limites d'ordre informatique qui empêchent leurs utilisations au delà d'une certaine fréquence. Un nouvel outil de

calcul des modes acoustiques a donc été développé et est présenté en section 2.2. Cette approche offre une grande précision sur les modes calculés, y compris les modes d'ordre élevé, pour un temps de calcul modeste. Dans un second temps, la méthode du raccordement modal est adaptée au cas d'un traitement non localement réactif (section 2.3). Enfin, une analyse des résultats est discutée pour différents poreux métalliques et montre que ces matériaux peuvent constituer une bonne alternative au traitement actuel par comparaison avec des matériaux localement réactifs.

2 Modèle théorique

2.1 Présentation du problème

L'entrée d'air du turboréacteur est vue comme un conduit de section circulaire de rayon r_1 muni d'une chambre d'expansion de hauteur $r_2 - r_1$ et de longueur L , remplie d'un matériau poreux isotrope (Fig. 1). Dans le conduit principal, l'air est soumis à un écoulement uniforme de nombre de Mach M , pris comme positif vers l'aval (dans le sens des z croissant). L'interface d'entrée du silencieux en $z = 0$ séparant le conduit amont ($i = I$) et le conduit traité ($i = II$) coïncide avec l'émission de la source. Dans le conduit traité, l'expression de la

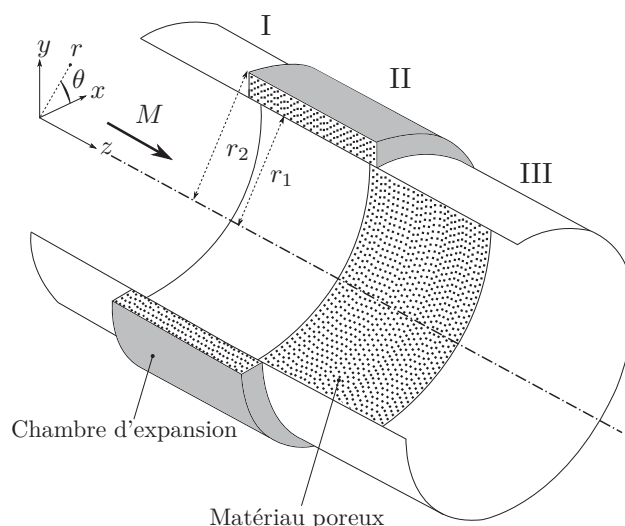


FIGURE 1 – Géométrie du silencieux.

pression acoustique peut s'écrire sous forme de variables séparées en exploitant la géométrie du silencieux, on a alors $p(r, \theta, z, t) = p_{1,2}(r)e^{i(m\theta + \beta z - \omega t)}$ où les indices 1 et 2 correspondent respectivement au milieu air et poreux, m l'azimut et β le nombre d'onde axial. Comme

le matériau poreux est vu comme un fluide équivalent de célérité complexe c_e , les équations de propagation dans l'air et le poreux sont données par :

$$\frac{d^2 p_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dp_1}{dr} + \left(\alpha_2^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) p_1 = 0 \quad (1)$$

$$\text{et } \frac{d^2 p_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dp_2}{dr} + \left(\alpha_2^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) p_2 = 0 \quad (2)$$

où $\alpha_1^2 = k_1^2 - \beta^2(1 - M^2) - 2k_1 M \beta$, $\alpha_2^2 = k_2^2 - \beta^2$, $k_1 = \omega/c$ et $k_2 = \omega/c_e$ sont respectivement le nombre d'onde dans l'air et le matériaux poreux. Le respect des conditions aux limites imposent la continuité de la pression et du déplacement normal à l'interface air/poreux ($r = r_1$) et la nullité du déplacement normal en r_2 dû à la condition de paroi rigide.

$$p_1 = p_2, \quad (r = r_1) \quad (3)$$

$$\rho_1 \phi (M\beta - k_1)^2 \frac{dp_2}{dr} = \rho_2 k_1^2 \frac{dp_1}{dr}, \quad (r = r_1) \quad (4)$$

$$\frac{dp_2}{dr} = 0, \quad (r = r_2). \quad (5)$$

Le problème précédent se résume en une seule équation dite caractéristique pour l'inconnue β [3, 7]. Comme dit dans l'introduction, cette approche n'est pas envisageable en condition aéronautique car les effets d'arrondi et de précision machine sur l'évaluation des fonctions de Bessel et donc l'équation caractéristique deviennent significatif.

2.2 Calcul des modes propres

Le calcul des modes propres du problème précédent est effectué par l'usage de la méthode spectrale de Chebyshev qui est un outil numérique extrêmement précis pour résoudre les équations différentielles sur un domaine borné. L'utilisation de cet outil dans la résolution de notre problème ainsi que la précision des résultats sont présentés dans cette partie. Le principe consiste à interpoler la pression acoustique p en $N + 1$ points y_j par le polynôme d'interpolation de Lagrange p_N :

$$p_N(y) = \sum_{k=0}^N \phi_k(y) p(y_k) \quad \text{où} \quad \phi_k(y) = \prod_{j \neq k} \frac{y - y_j}{y_k - y_j}. \quad (6)$$

Ici, ϕ_k sont les polynômes de Lagrange et y_j les points de Chebyshev défini par $y_j = \cos(\frac{j\pi}{N})$, $\forall j \in \{0, \dots, N\}$, ils sont donc concentrés aux bords du domaine unitaire $[-1; 1]$.

Ce formalisme permet de définir la matrice de dérivation de Chebyshev d'ordre 1, $D^{(1)}$, qui fait le lien entre la dérivée d'ordre 1 de la pression approximée aux points y_i et le vecteur pression \mathbf{p} . Des changements de variable sont opérés afin de résoudre les équations (1) et (2) dans leur domaine respectif $[0, r_1]$ et $[r_1, r_2]$ sous forme discrète :

$$\left(D_1^{(2)} + R_1^{-1} D_1^{(1)} + \alpha_1^2 - m^2 R_1^{-2} \right) \mathbf{p}_1 = 0 \quad (7)$$

$$\left(D_2^{(2)} + R_2^{-1} D_2^{(1)} + \alpha_2^2 - m^2 R_2^{-2} \right) \mathbf{p}_2 = 0 \quad (8)$$

où $D_1^{(1)}$, $D_1^{(2)}$ and $D_2^{(1)}$, $D_2^{(2)}$ sont respectivement les matrices de dérivation d'ordre 1 et 2 du domaine air et

poreux. R_1 et R_2 sont les matrices diagonales contenant les coordonnées radiales. En notant $\mathbf{p} = \langle \mathbf{p}_1 : \mathbf{p}_2 \rangle$ le vecteur des pressions acoustiques sur l'intervalle $[0, r_2]$, on peut grouper les équations (7) et (8) sous forme d'un problème aux valeurs propres d'ordre 2 en β :

$$(\beta^2 \mathbf{A} + \beta \mathbf{B} + \mathbf{C}) \mathbf{p} = 0, \quad (9)$$

où $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ sont des matrices carrés. Les conditions aux limites (3), (4) et (5) sont intégrées aux PVP en modifiant certaines lignes du système.

2.3 Raccordement modal

La connaissance des modes acoustiques du conduit traité permet l'emploi de la technique du raccordement modal, elle consiste à imposer le respect des conditions cinématiques et dynamiques aux interfaces d'entrée et de sortie du silencieux dans le but de déterminer l'amplitude de tous les modes entrants et sortants du problème. D'après [6, 7, 8], la continuité de la pression et du déplacement axial doit être respecté dans le conduit central, alors que le déplacement axial doit être imposé nul sur la paroi latérale de la chambre d'expansion. Ces conditions se résument sur l'interface d'entrée par :

$$\begin{cases} p^I = p^{II}, & 0 < r < r_1 \\ w^I = w^{II}, & 0 < r < r_1 \\ w^{II} = 0, & r_1 < r < r_2 \end{cases} \quad (10)$$

où p et w sont respectivement la pression et le déplacement axial acoustique. Dans chaque tronçon ($i = I, II, III$), la pression et le déplacement acoustique sont exprimés sous forme d'une somme modale tronquée :

$$p^i = \sum_N \left(A_{mn}^{i,+} \Phi_{p,mn}^{i,+} e^{i\beta_{mn}^+ z} + A_{mn}^{i,-} \Phi_{p,mn}^{i,-} e^{i\beta_{mn}^- z} \right), \quad (11)$$

où N est le nombre de modes considérés qui est le même dans chaque tronçon, il est pris suffisamment élevé afin de garantir la convergence du système. Enfin, les indices m et n dénotent l'ordre azimutal et radial. On distingue les modes se propageant dans le sens des z croissant (+) des modes se propageant dans l'autre sens (-). Les coefficient A_{mn} sont les amplitudes modales, qui sont les inconnues du problème. Les fonctions $\Phi_{p,mn}$ sont les déformées modales de pression suivant la section du mode (m, n) issues du PVP (9). Comme tous les modes sont classés dans le tronçon traité ($i = II$), les modes sont atténués dans l'ordre croissant de la partie imaginaire de β_{mn} . Les conditions (10) sont réécrites sous forme variationnelle :

$$\begin{cases} \int_{S_1} \Psi_p p^I dS = \int_{S_1} \Psi_p p^{II} dS \\ \int_{S_1} \Psi_w w^I dS = \int_{S_1} \Psi_w w^{II} dS \\ \int_{S_2} \Psi_w w^{II} dS = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Avec Ψ une fonction test bien choisie, S_1 et S_2 respectivement la section du conduit d'air et du traitement. Il est plus judicieux de réécrire (11) sous forme matricielle :

$$p^i = \Phi_p^{i,+} \mathbf{E}^{i,+} \mathbf{A}^{i,+} + \Phi_p^{i,-} \mathbf{E}^{i,-} \mathbf{A}^{i,-}, \quad (13)$$

où $\Phi_p^{i,\pm} = \langle \Phi_{p,1}^{i,\pm}, \dots, \Phi_{p,N}^{i,\pm} \rangle$ et $E^{i,\pm} = \text{diag}(e^{i\beta_{m,n}^{i,\pm} z})$. Pour l'expression du déplacement axial w , Φ_p est remplacé par Φ_w qui est déduit des équations d'Euler linéarisés. Par substitution dans (10) en $z = 0$ (et $z = L$), on aboutit à un système couplé de diffusion classique :

$$X_1 \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{I,-} \\ \mathbf{A}^{II,+} \end{pmatrix} = Y_1 \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{I,+} \\ \mathbf{A}^{II,-} \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$X_2 E_X \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{III,+} \\ \mathbf{A}^{II,-} \end{pmatrix} = Y_2 E_Y \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{III,-} \\ \mathbf{A}^{II,+} \end{pmatrix} \quad (15)$$

qui se résout de manière itérative, $\mathbf{A}^{I,+}$ étant fixé par la source et $\mathbf{A}^{III,-}$ supposé nulle. E_X et E_Y sont des matrices diagonales contenant les facteurs de phase en $z = L$. Et X_1 , Y_1 , X_2 , Y_2 sont les matrices de diffusion du problème :

$$X_1 = \begin{pmatrix} P^{I,-} & -P^{II,+} \\ W^{I,-} & -W^{II,+} \\ 0 & -\hat{W}^{II,+} \end{pmatrix}, Y_1 = \begin{pmatrix} P^{I,+} & -P^{II,-} \\ W^{I,+} & -W^{II,-} \\ 0 & -\hat{W}^{II,-} \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} P^{III,+} & -P^{II,-} \\ W^{III,+} & -W^{II,-} \\ 0 & -\hat{W}^{II,-} \end{pmatrix}, Y_2 = \begin{pmatrix} -P^{III,-} & P^{II,+} \\ -W^{III,-} & W^{II,+} \\ 0 & \hat{W}^{II,+} \end{pmatrix} \quad (17)$$

où chaque matrice $P^{i,\pm}$, $W^{i,\pm}$ est calculée numériquement par intégration de Gauss, les fonctions tests sont choisies parmi les fonctions propres des conduits rigides amont et aval, car elles minimisent le conditionnement des matrices de diffusion.

3 Résultats

3.1 Validation

Dans cette partie, on étudie les performances acoustiques de différents traitements en terme de pertes par transmission (TL) définies par :

$$TL = 10 \log_{10} \frac{W^{I,+}}{W^{III,+}}, \quad (18)$$

où $W^{I,+}$ et $W^{III,+}$ sont respectivement les puissances acoustiques incidente et transmise dans les tronçons amont et aval. Avant de passer à un cas aéronautique, une étude est faite sur un conduit de petite dimension (Tableau 1) où seul le mode plan est propagatif dans les conduits amont et aval sur la bande de fréquence considérée. Le TL est alors simplement donné par l'expression $TL = -20 \log_{10} |A_1^{III,+}|$ si on fixe l'amplitude du mode plan incident à 1. Les 6

Rayon interne	r_1	0.037m
Rayon externe	r_2	0.0762m
Longueur du traitement	L	0.315m

TABLEAU 1 – Dimension du silencieux.

modes les moins atténués sont pris en compte dans le raccordement modal afin d'assurer la convergence du TL. Les résultats sont comparés avec une approche élément finis tridimensionnel à $M = 0$ et $M = 0.2$. Le

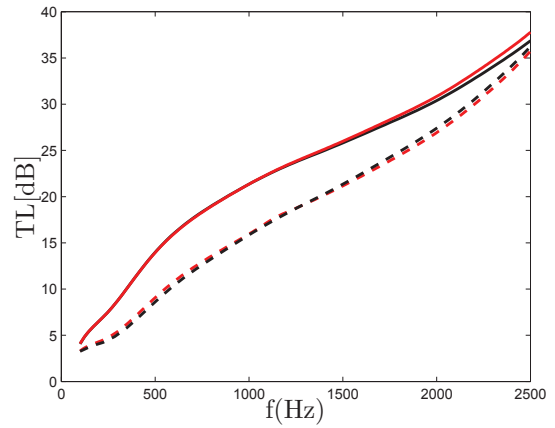


FIGURE 2 – TL prédit avec de la laine RGW2 :
— Raccordement modal $M = 0$, — Méthode EF 3D $M = 0$, - - Raccordement modal $M = 0.2$, - - Méthode EF 3D $M = 0.2$.

traitement poreux est ici une laine décrit par le modèle Limp dont les propriétés sont données en annexe. Les comparaisons sont en parfait accord sur l'ensemble du spectre d'étude et valide l'approche présentée.

3.2 Configuration aéronautique

Les dimensions du conduit sont maintenant représentative d'une entrée d'air de turboréacteur (Tableau 2). On s'intéresse au bruit de la soufflante

Rayon interne	r_1	0.98m
Rayon externe	r_2	1m
Longueur du traitement	L	0.60m

TABLEAU 2 – Dimension du conduit traité.

à régime de pale subsonique généré par l'interaction rotor/stator avec l'écoulement. A ce régime, le spectre incident est vu comme la somme d'un bruit large bande et d'un bruit de raie, dont les harmoniques fréquentielles sont situées aux BPF (blade passing frequency). Dans l'étude, la puissance du bruit large bande est fixée à 90dB dont l'énergie est équirépartie sur l'ensemble des modes propagatif, les émergences de 10dB représentative du bruit de raie sont distribuées sur un certain nombre de modes décrit par l'analyse de Tyler et Sofrin. Par ailleurs, le couplage entre les modes est pris en compte, les modes sont supposés décorrelés (phase aléatoire) pour le bruit large bande alors que les modes de Tyler et Sofrin sont supposés en phase aux BPF. Le calcul de la puissance transmise est donc vu comme la somme de 2 contributions à la manière de [9] :

$$W_{\text{phasé}}^{III,+} = \frac{1}{2} [P^{(i)H} T^H M T P^{(i)}] \quad (19)$$

$$W_{\text{aléatoire}}^{III,+} = \frac{1}{2} [P^{(i)H} \text{diag}(T^H M T) P^{(i)}] \quad (20)$$

T est la matrice de transmission du silencieux liant les amplitudes modale incidente et transmise : $P^{(t)} = T P^{(i)}$, et M est la matrice diagonale dont les termes sont déduits de l'expression de Joseph *et al.* [12].

La contribution (19) est présente uniquement aux BPF.

Les résultats sont présentés jusqu'à $ka=50$ (2800Hz) où les 4 premières BPF sont indiquées par des traits pointillés verticaux à $ka=11.7, 23.4, 35.2$ et 46.8 . Notons qu'à 2800Hz, plus de 700 modes sont propagatifs dans les conduits amont et aval pour un écoulement inverse de $M = -0.3$. Afin d'optimiser les temps de calcul, le nombre de modes pris en compte dans le modèle numérique est ajusté à chaque pas fréquentiel, il est choisi supérieur au nombre de modes propagatifs dans les conduits amont et aval et doit être suffisamment élevé pour assurer la convergence du TL. Les performances de 3 matériaux poreux métalliques (une mousse nickel, aluminium et acier), dont les propriétés ont été caractérisées sur les banc de l'UTC et données en annexe, sont comparées avec un traitement localement réactif typiquement utilisé dans l'aéronautique [10]. Fig.(3) montre les TL sans

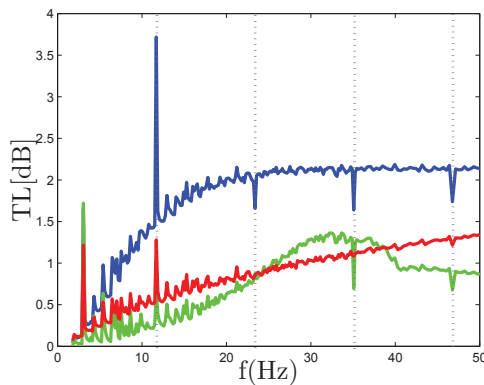


FIGURE 3 – TL prédit pour $M = 0$: (—), Mousse aluminium ; (—), Mousse nickel ; (—), Mousse nickel ; (—), Localement réactif.

écoulement, la mousse nickel donne les meilleurs niveaux d'atténuation sur l'ensemble du spectre, les mousses métalliques ont clairement un comportement large bande comparé au traitement localement réactif qui absorbe sur une bande de fréquence limitée. L'effet

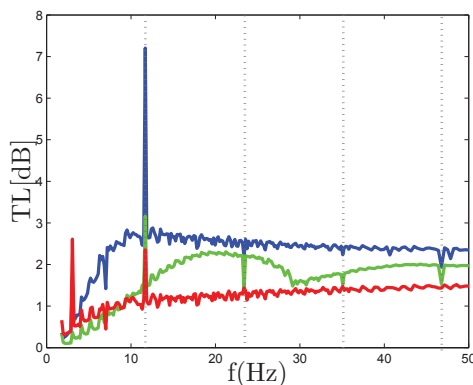


FIGURE 4 – TL prédit pour $M = -0.3$: (—), Mousse aluminium ; (—), Mousse nickel ; (—), Mousse nickel ; (—), Localement réactif.

d'un écoulement aval de 0.3 Mach est pris en compte sur la Fig. 4 afin de simuler un régime de vol. Si l'effet

de l'écoulement modifie l'impédance du matériaux localement réactif [10], l'impact d'un écoulement rasant sur les propriétés des matériaux poreux reste une question ouverte et dépasse le cadre de l'étude. On peut noter que le niveau des pertes par transmission augmente sur l'ensemble du spectre pour tous les traitements et particulièrement aux BPF. A noter que le pic d'absorption du traitement localement réactif a été déplacé vers les basses fréquences. Quelque soit la vitesse d'écoulement, c'est la mousse nickel qui admet les meilleurs niveaux aux BPF, ce constat est confirmé par l'étude des puissances transmises aux BPF (Fig.5). A ces fréquences, la puissance portée par les modes de TS ($0,9 \cdot 10^{-2} W$) représente la majorité de la puissance totale incidente ($1 \cdot 10^{-2} W$), l'examen de la puissance transmise par les modes de TS donne donc une bonne indication sur les niveaux du TL. De façon générale, la

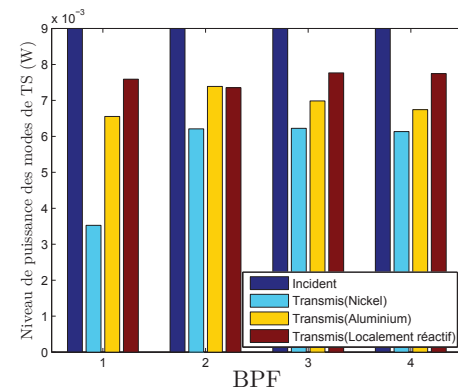


FIGURE 5 – Niveau de puissance porté par les modes de Tyler/Sofrin aux BPF ($M=0$).

première BPF est mieux absorbée, en effet, l'énergie acoustique incidente est portée par seulement 2 modes de TS qui ont un azimuth élevé ($m = -8$ et $m = 9$, $n = 1$), ainsi, l'étude des pertes modales des modes du conduit traité montre que les modes les moins évanescents d'azimut -8 et 9 sont fortement atténués pour la mousse nickel (Fig.6), pour cela, on calcul la perte modale en dB par mètre définie par :

$$\frac{20|\text{Im}(\beta_{m,n}^+)|}{\ln(10)} \quad (21)$$

D'après [11], l'énergie de ces modes est concentrée proche du traitement ce qui favorise leurs dissipations. A la BPF2, plusieurs modes de TS ont un azimuth faible $m = 1$ dont les des pertes modales sont minimales (Fig.7), expliquant la différence du TL entre les 2 premières BPF.

4 Conclusion

Un modèle a été développé afin de prédire les pertes par transmission d'une entrée d'air de turboréacteur traité avec un matériaux poreux métallique. Le problème étant de taille aéronautique et de géométrie simple, l'analyse est basée sur une approche modale. L'utilisation de la méthode spectrale de Chebyshev a permis de développer un outil de calcul des modes performant qui répond au problème avec une grande

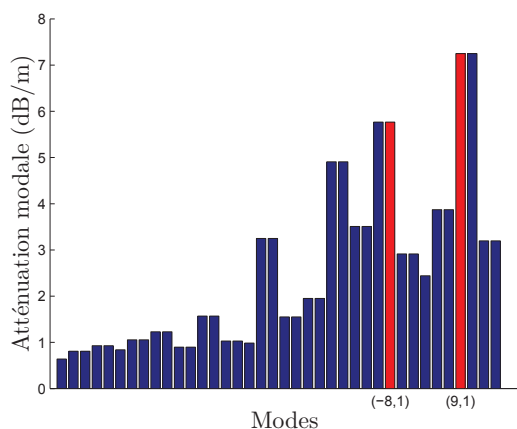


FIGURE 6 – Pertes modales à la BPF1 pour la mousse nickel. Les modes de Tyler et Sofrin sont indiqués en rouge.

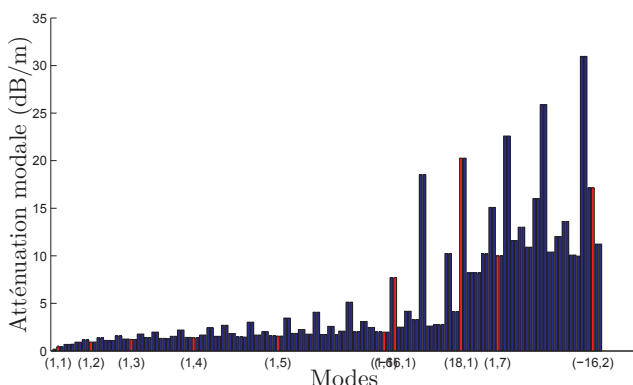


FIGURE 7 – Pertes modales à la BPF2 pour la mousse nickel. Les modes de Tyler et Sofrin sont indiqués en rouge.

précision. Ensuite, les pertes par transmission sont calculées par raccordement modale en entrée et en sortie du tronçon traité avec une source incidente réaliste du bruit de soufflante. Différents matériaux poreux métalliques sont testés et comparés avec un traitement classique localement réactif. Les résultats confirment la propriété large bande de ces matériaux. Le modèle permet de prendre en compte une plaque perforée entre le traitement et le conduit central afin d'être en conformité avec les applications industrielles bien que la démarche ne soit pas présentée ici.

Remerciements

Nous voudrions remercier la SNECMA pour son soutien financier apporté dans le cadre d'un contrat CIFRE, ainsi que B. Nennig pour avoir fourni des résultats issus de [7], qui ont servi d'éléments de comparaison (Section 3.1).

Annexe

Propriétés des matériaux

Matériaux	Laine RGW2	Mousse aluminium	Mousse nickel
ϕ	0.99	0.90	0.96
$\sigma(\text{Nm}^{-4}\text{s})$	9000	1001	6000
α_∞	1	1.07	1.11
$\Lambda'(\mu\text{m})$	192	282	117
$\Lambda(\mu\text{m})$	384	828	189

Plaque perforée	
POA (%)	15
Diamètre des trous (mm)	0.99
Epaisseur τ (mm)	0.64
Cavité	
Profondeur (m)	20×10^{-3}

Références

- [1] Peat, K. S. and Rathi, K. L., A finite element analysis of the convected acoustic wave motion in dissipative silencer, *Journal of Sound and Vibration*, **184**, 529-545 (1995).
- [2] Selamet, A. and Lee, I.J and Huff, N.T., Acoustic attenuation of hybrid silencers, *Journal of Sound and Vibration*, **262**, 509-527 (2003).
- [3] Kirby, R. and Denia, F. D., Analytic mode matching for a circular dissipative silencer containing mean flow and a perforated pipe, *The Journal of the Acoustical Society of America*, **122**, 3471-3482 (2007).
- [4] Sun, X. and Du, L. and Yang, V., A homotopy method for determining the eigenvalues of locally or non-locally reacting acoustic liners in flow ducts,

- Journal of Sound and Vibration*, **303**, 277-286 (2007).
- [5] Alonso, J. S. and Burdisso, R. A., Eigenvalue solution for the convected wave equation in a circular soft wall duct, *Journal of Sound and Vibration*, **315**, 1003-1015 (2008).
- [6] Cummings, A. and Chang, I.-J., Sound attenuation of a finite length dissipative flow duct silencer with internal mean flow in the absorbent, *Journal of Sound and Vibration*, **127**, 1-17 (1987).
- [7] Nennig, B. and Perrey-Debain, E. and Ben Tahar, M., A mode matching method for modeling dissipative silencers lined with poroelastic materials and containing mean flow, *The Journal of the Acoustical Society of America*, **128**, 3308-3320 (2010).
- [8] Selamet, A. and Xu, M. B. and Lee, I.-J. and Huff, N. T., Analytical approach for sound attenuation in perforated dissipative silencers with inlet/outlet extensions, *Journal of Sound and Vibration*, **117**, 2078-2089 (2005).
- [9] Félix, S. and Pagneux, V., Sound attenuation in lined bends, *The Journal of the Acoustical Society of America*, **116**, (2004).
- [10] Jones, M. and Tracy, M. and Watson, W. and Parrott, T., Effects of Liner Geometry on Acoustic Impedance, *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, (2002).
- [11] Morse, P.M. and Ingard, K.U., Theoretical Acoustics, *Princeton University Press*, (1968).
- [12] Joseph, P. and Morfey, C.L. and Lewis, C.R., Multi-mode sound transmission in ducts with flow, *Journal of Sound and Vibration*, **264**, 523-544 (2003).