



Méthode d'inversion généralisée des paramètres effectifs de structures périodiques complexes

A. Castanié^a, J.-F. Mercier^a, S. Felix^b et A. Maurel^c

^aPoems, CNRS, ENSTA ParisTech, INRIA, 828 boulevard des Maréchaux, 91762 Palaiseau, France

^bLAUM, CNRS, Université du Maine, avenue Olivier Messiaen, 72085 Le Mans, France

^cInstitut Langevin, CNRS, ESPCI ParisTech, 1 rue Jussieu, 75005 Paris, France

agnes.maurel@espci.fr

La présente étude porte sur la détermination des paramètres effectifs de métamatériaux. L'objectif est double : proposer une généralisation de la méthode d'inversion proposée initialement par Fokin et présenter une étude critique de la fiabilité de cette méthode. Une première illustration est donnée dans le cas d'un empilement de couches minces pour lequel des résultats analytiques par méthode d'homogénéisation sont disponibles. Une seconde illustration est faite pour des structures plus complexes et une comparaison avec des valeurs de référence issues de l'homogénéisation numérique.

1 Introduction

Les métamatériaux composés de cellules élémentaires complexes sont intensivement étudiés et optimisés afin d'obtenir des milieux avec les propriétés souhaitées. Bien que des calculs numériques directs soient possibles pour obtenir les propriétés de diffusion (de réflexion et de transmission) d'une couche composée d'un agencement périodique de ces cellules, cela prend beaucoup de temps en raison de la taille sub longueur d'onde des cellules. Il est souvent préférable de déterminer les paramètres effectifs de cette couche. Néanmoins, bien que la méthode la plus fiable soit l'homogénéisation mathématique, il est souvent difficile, voire impossible, de résoudre analytiquement le problème de cellule unitaire. Plusieurs alternatives ont ainsi été développées, l'approximation de potentiel cohérent étant l'une des plus populaire. Nous nous intéressons ici à la méthode d'inversion empirique, proposée par Fokin [1], qui se base sur les spectres de réflexion $R(k)$ et de transmission $T(k)$. Ces derniers sont déterminés numériquement pour un nombre assez petit de cellules pour éviter des calculs trop lourds. On cherche à déterminer $(a_{\parallel}, a_{\perp}, b_e)$ de la couche équivalente homogénéisée qui satisfait :

$$\nabla \cdot \left(\begin{pmatrix} 1/a_{\parallel} & 0 \\ 0 & 1/a_{\perp} \end{pmatrix} \nabla u \right) + \omega^2 b_e u = 0. \quad (1)$$

Dans [2], a_{\parallel} (resp. a_{\perp}) est obtenu en envoyant une onde le long de la direction x (resp. la direction y). Ceci implique deux déterminations de b_e . Il est alors admis que cette double détermination permet d'obtenir avec précision les propriétés effectives du milieu. C'est ce qui explique, en plus de la simplicité de la méthode, la popularité de cette méthode (voir [3, 4]). Toutefois, il reste à savoir si quelques cellules sont suffisantes pour obtenir des paramètres effectifs fiables. La fiabilité est liée à la pertinence de cette méthode pour un très grand nombre de cellules, nécessaire pour modéliser des métamatériaux réalistes. En règle générale, un ensemble donné de cellules est équivalent à une couche homogène (avec des paramètres effectifs). Ce qui n'est pas évident est que augmenter le nombre de cellules est bien équivalent à modifier la longueur de la couche avec les mêmes paramètres effectifs. Dans la présente étude, nous vérifions la validité de cette approche par une généralisation de la méthode proposée par Fokin dans la section II. Cette généralisation permet une double détermination des paramètres effectifs $(a_{\parallel}, a_{\perp}, b_e)$ pour un ensemble donné de cellules. Des résultats sont montrés dans le cas de structures pour lesquelles des résultats d'homogénéisation exacts sont disponibles (section III). Nos conclusions sont doubles : tout d'abord, notre méthode d'inversion généralisée constitue un bon indicateur de la fiabilité des paramètres obtenus ; néanmoins, la méthode d'homogénéisation, en résolvant le problème de la cellule, reste la méthode la plus précise pour estimer le comportement de vrais métamatériaux.

2 Procédé d'inversion par le calcul des propriétés effectives

Dans cette section, on généralise la méthode proposée par Fokin [1] pour déterminer les paramètres $(a_{\parallel}, a_{\perp}, b_e)$ d'un milieu effectif, connaissant (R, T) ; ici, en complément de la dépendance en k , la dépendance en θ (l'angle d'incidence, voir Figs. 1 et 2) est considérée.

Deux orientations différentes pour les directions principales associées à a_{\parallel} et a_{\perp} sont considérées : Cas A : $a_x = a_{\parallel}$, $a_y = a_{\perp}$, et Cas B : $a_x = a_{\perp}$, $a_y = a_{\parallel}$. Dans la suite, afin de simplifier la discussion, nous considérons le cas de deux milieux caractérisés par a_0, b_0 et par a, b .

Pour une couche occupant $[0, L]$, le champ à l'intérieur et à l'extérieur de la couche peut s'écrire :

$$\begin{cases} u(x \leq 0) = e^{ik \sin \theta y} \left[e^{ik \cos \theta x} + R e^{-ik \cos \theta x} \right], \\ u(0 < x \leq L) = e^{ik \sin \theta y} \left[A e^{ik_e x} + B e^{-ik_e x} \right], \\ u(L \leq x) = e^{ik \sin \theta y} T e^{ik \cos \theta (x-L)}, \end{cases} \quad (2)$$

et les conditions de continuité de u et $a \partial_x u$ donnent :

$$\begin{aligned} R &= \frac{(1 - \xi^2)(e^{ik_e L} - e^{-ik_e L})}{(1 + \xi)^2 e^{-ik_e L} - (1 - \xi)^2 e^{ik_e L}}, \\ T &= \frac{4\xi}{(1 + \xi)^2 e^{-ik_e L} - (1 - \xi)^2 e^{ik_e L}}, \end{aligned} \quad (3)$$

où $\xi \equiv (a_x/a)(k/k_e) \cos \theta$, et k_e satisfait la relation de dispersion :

$$k_e^2 = k^2 \left[\frac{a_x b_e}{a b} - \frac{a_x}{a_y} \sin^2 \theta \right]. \quad (4)$$

En suivant [1], il est facile de montrer que k_e peut être calculé à partir de (R, T) grâce à la relation :

$$k_e L = i \log \frac{(1 - R^2 + T^2 + \tilde{\xi})}{2T} + 2n\pi, \quad (5)$$

avec $\tilde{\xi} \equiv \pm \sqrt{(1 - R^2 + T^2)^2 - 4T^2}$. Le problème de multi-évaluation de k_e peut être résolu par continuité des propriétés (sujet non abordé ici). Le signe de $\tilde{\xi}$ découle des relations :

$$\xi = \frac{\tilde{\xi}}{(1 - R)^2 - T^2} = \frac{a_x k}{a k_e} \cos \theta, \quad (6)$$

et il correspond au fait que k_e est soit réel positif, soit purement imaginaire avec une valeur positive (voir Eq. (4) avec la convention $e^{ik_e x}$ pour une onde allant vers la droite). Une fois que k_e est donné par Eq. (5), a_x peut être calculé à partir de $a_x = a \xi (k_e/k \cos \theta)$ et est indépendant de θ et k . Finalement, (a_y, b_e) est déduit de Eq. (4) en fittant $(k_e^2/k^2)(a/a_x)$ par $X_1 - X_2 \sin^2 \theta$ pour déduire $b_e = b X_1$ et $a_y = a/X_2$ (tous indépendants de k).

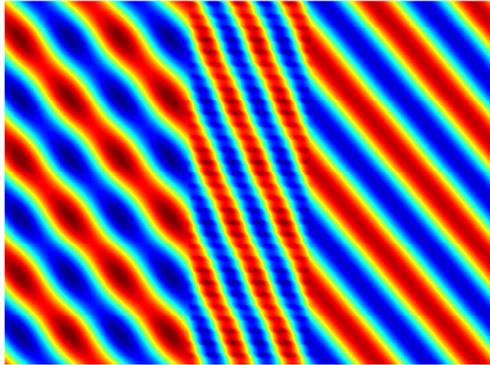
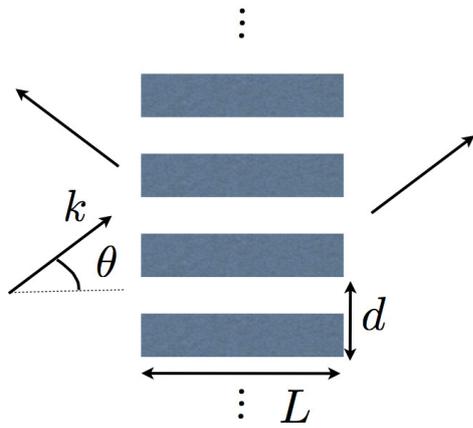


FIGURE 1 – Cas A : Slab contenant des couches horizontales et exemple de champ pour $kd = 0.1$, $L/d = 10$, $\theta = 40^\circ$.

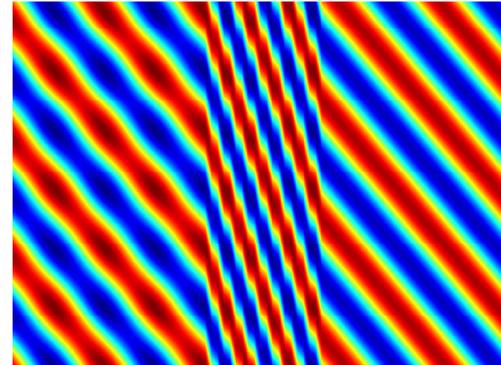
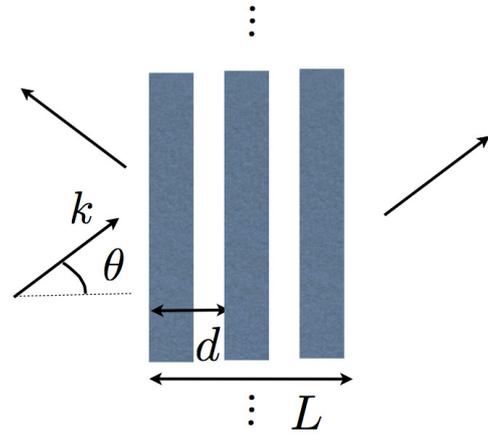


FIGURE 2 – Cas B : Slab contenant des couches verticales et exemple de champ pour $kd = 0.1$, $L/d = 10$, $\theta = 40^\circ$.

3 Resultats

3.1 Comparaison avec résultats analytiques

On s'intéresse d'abord à des milieux stratifiés composés de couches horizontales ou verticales pour lesquels nous avons des résultats analytiques d'homogénéisation. En notant a_{\parallel} la valeur de a effective le long de la direction des couches et a_{\perp} la valeur de a effective le long de la direction perpendiculaire aux couches, nous avons :

$$\begin{aligned} 1/a_{\parallel} &= \varphi/a_0 + (1 - \varphi)/a, \\ a_{\perp} &= \varphi a_0 + (1 - \varphi)a, \\ b_e &= \varphi b_0 + (1 - \varphi)b, \end{aligned} \quad (7)$$

avec φ le taux de remplissage.

Pour commencer, afin d'avoir une idée du comportement réel du slab en termes de milieu équivalent, on reporte dans les figures 1 et 2 les isovalues du champ pour 10 cellules élémentaires dans les Cas A et B, respectivement. Dans les deux cas, la propagation effective de l'onde à l'intérieur de l'ensemble des cellules est visible (les résultats sont représentés pour $a = 1 = b$, $a_0 = 4$, $b_0 = 2$ et un taux de remplissage $\varphi = 0.5$).

Fig. 3 illustre la validité des différentes étapes de la méthode dans le Cas A. Fig. 3(a) montre k_e/k en fonction de θ , après avoir déterminé $\tilde{\xi}$ et n à partir de l'équation 5 (un signe + et $n = 0$ sont trouvés ici). Comme attendu avec Eq. 4, il ne dépend pas de k (100 valeurs de k ont été collectées et superposées sur la même courbe). Fig. 3(b) montre les valeurs de $a_x = a\xi(k_e/k \cos \theta)$ en fonction de θ pour 100 valeurs de k . Bien qu'une faible dispersion en fonction de k soit visible, a_x reste bien constant en θ et k . Finalement,

Fig. 3(c) montre le comportement de $(k_e/k)^2(a/a_x)$ (a_x après avoir pris la moyenne sur θ et k). C'est cette dernière courbe qui est fittée pour déterminer b_e et a_y grâce à Eq. (4).

Nous avons appliqué la méthode d'inversion dans les Cas A et B en faisant varier la longueur du slab L . Dans le Cas A de couches le long de la direction x , cela correspond à une variation continue de L tandis que dans le Cas B, $L = Nd$ est augmenté en ajoutant une couche verticale (le long de y) dans le slab. Fig. 4 montre la variation de $(a_{\parallel}, a_{\perp}, b_e)$ en fonction de L dans les deux cas. La valeur des paramètres effectifs obtenus par homogénéisation, Eq. (7), sont reportés en pointillés sur la figure. Ceci est le principal résultat de notre étude. Les tendances suivantes sont visibles : dans les deux cas, les paramètres effectifs tendent à converger vers les paramètres homogénéisés ; néanmoins, en fonction de l'orientation de cellules et des paramètres considérés, une légère différence est observée. Plus quantitativement, les résultats ont convergé au bout de 5 couches sauf pour a_{perp} dans le Cas A qui tend vers 2.44 au lieu de 2.5 (2% d'erreur).

Le cas d'une structure en damier (voir Fig. 5) conduit aussi à des résultats analytiques [5] : $a_{\parallel} = a_{\perp} = \sqrt{aa_0} = 2$ et $b_e = (b + b_0)/2$. De nouveau, au bout de 5 couches, on obtient une bonne estimation des paramètres effectifs.

3.2 Extension à des géométries complexes

On s'intéresse maintenant à des structures pour lesquelles il n'existe pas de résultats d'homogénéisation analytiques. En revanche, il existe une méthode alternative pour déterminer les paramètres effectifs : l'homogénéisation numérique [5]. Cette méthode indique qu'un milieu périodique infini dans lequel la cellule de base est le carré de

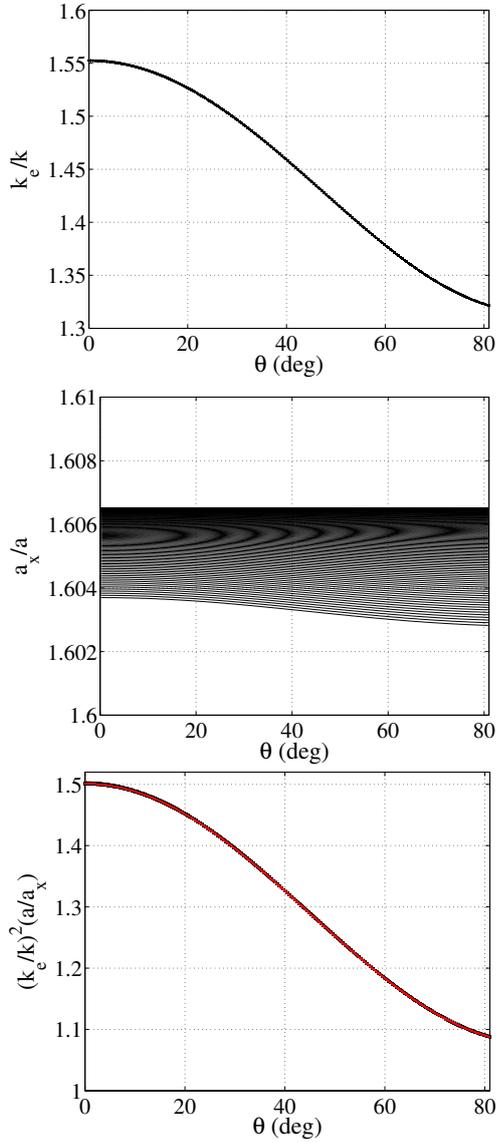


FIGURE 3 – Illustration des différentes étapes de l’inversion pour kd variant entre 10^{-3} à 10^{-1} et θ entre 0 et 80° dans le Cas A. (a) k_e/k pour toutes les valeurs de k , (b) a_x/a pour toutes les valeurs de k et (c) $(k_e/k)^2(a/a_x)$ pour toutes les valeurs de k (points noirs), la courbe rouge correspond au fit permettant d’obtenir a_y et b_e .

côté 1, pour un milieu caractérisé par l’équation :

$$\nabla \cdot (D \nabla u) + \omega^2 b u = 0,$$

où $D(x, y)$ est une fonction, peut-être approximé par un milieu homogène caractérisé par l’équation moyenne :

$$\nabla \cdot (D^* \nabla u) + \omega^2 b_e u = 0,$$

avec

$$b_e = \int_0^1 \int_0^1 b(x, y) dx dy,$$

et D^* est une matrice 2×2 telle que

$$D_{ij}^* = \int_0^1 \int_0^1 D(x, y) (e_j + \nabla w_j) \cdot e_i dx dy,$$

où $e_1 = e_x$, $e_2 = e_y$, $w_1(x, y)$ et $w_2(x, y)$ sont périodiques et satisfont les problèmes de cellule :

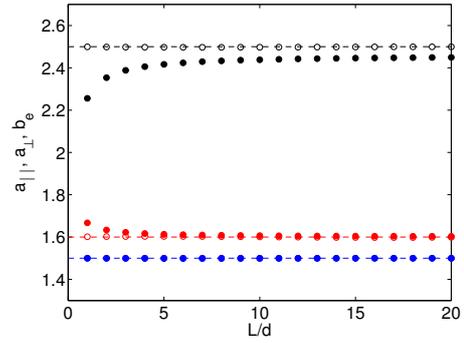


FIGURE 4 – Paramètres effectifs a_{\parallel} en rouge, a_{\perp} en noir et b_e en bleu, dans le Cas A (symboles fermés) et dans le Cas B (symboles ouverts). $a_{\parallel} = 1.6$, $a_{\perp} = 2.5$ et $b_e = 1.5$ sont les paramètres homogénéisés obtenus à partir de Eq. (7).

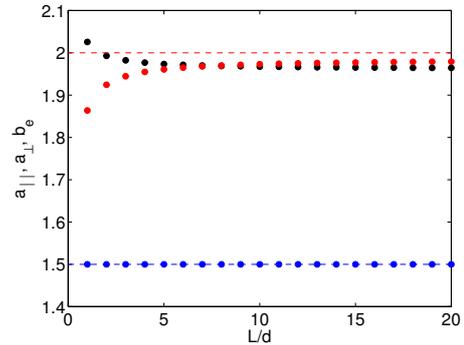
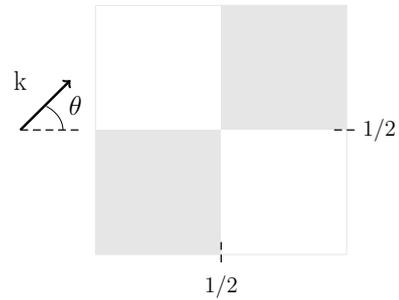


FIGURE 5 – Cas du damier : Paramètres effectifs a_{\parallel} en rouge, a_{\perp} en noir et b_e en bleu.

$$\nabla \cdot [D(e_i + \nabla w_i)] = 0.$$

Pour des géométries complexes, les problèmes de cellules sont résolus numériquement puis la matrice D^* est déduite. Dans le Cas A on retrouve le résultat analytique : $D(x, y) = D(y) = 1/a(y)$ ne dépend que de y ce qui implique qu’on a de même pour w_1 et w_2 . On montre alors que $D_{12}^* = 0 = D_{21}^*$ et que

$$D_{11}^* = \frac{1}{a_{\parallel}} = \int_0^1 D(y) dy,$$

$$D_{22}^* = \frac{1}{a_{\perp}} = \left(\int_0^1 \frac{1}{D(y)} dy \right)^{-1}.$$

ce qui redonne les formules (7).

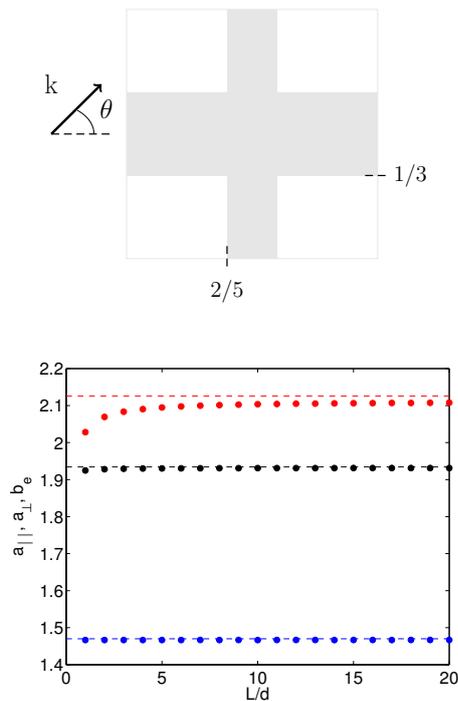


FIGURE 6 – Cas de la croix affinée : Paramètres effectifs a_{\parallel} en rouge, a_{\perp} en noir et b_e en bleu.

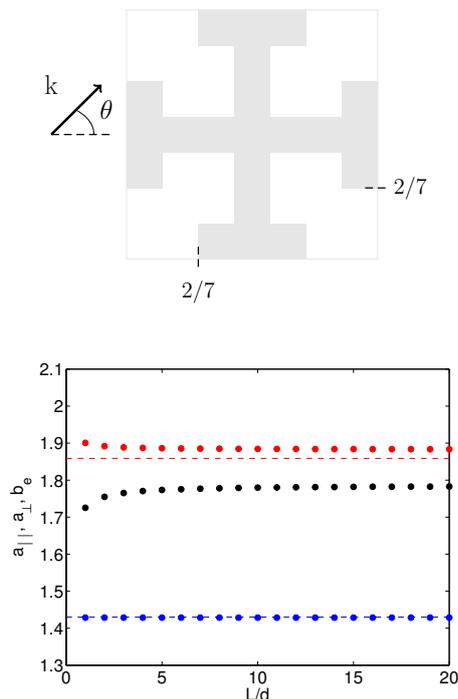


FIGURE 7 – Croix potencée : Paramètres effectifs a_{\parallel} en rouge, a_{\perp} en noir et b_e en bleu.

Nous avons appliqué l'homogénéisation numérique pour avoir des valeurs de référence à deux structures, la croix affinée (Fig. 6) et la croix potencée utilisée dans [2] (Fig. 7). Pour la croix affinée, l'homogénéisation numérique donne $a_{\parallel} = 2.13$, $a_{\perp} = 1.93$ et $b_e = 1.47$. La méthode d'inversion retrouve parfaitement ces valeurs au bout de 5 couches.

Pour la croix potencée, les valeurs de référence pour un milieu infini sont $a_{\parallel} = a_{\perp} = 1.86$ et $b_e = 1.43$. Comme pour les couches horizontales (Cas A), seule la valeur de a_{\perp} ne converge pas parfaitement (converge vers 1.78 soit 4% d'erreur).

4 Conclusion

Une méthode d'inversion généralisée a été présentée et permet une détermination des paramètres effectifs de structures type métamatériaux (symboles ouverts et fermés dans Fig. 4). Dans le cas des couches, l'étude successive des deux orientations possibles, horizontale et verticale, permet une double détermination des paramètres effectifs (dans [2], comme seul l'angle $\theta = 0$ est considéré, chaque orientation ne permet d'obtenir que a_x , qui vaut a_{\parallel} dans le Cas A et a_{\perp} dans le Cas B). Dans une méthode, les deux orientations conduisent à deux jeux de valeurs pour $(a_{\parallel}, a_{\perp})$ qui si elles sont les mêmes indique la fiabilité des résultats pour un nombre N de cellules donné. Les perspectives à partir de cette méthode et des résultats obtenus sont, d'une part, poursuivre la vérification de la validité de ces paramètres effectifs par rapport aux paramètres homogénéisés pour de très grande structure et d'autre part, étendre cette méthode d'inversion lorsque les directions principales ne sont pas connues.

Références

- [1] V. Fokin, M. Ambati, C. Sun and X. Zhang, Method for retrieving effective properties of locally resonant acoustic metamaterials, *Physical Review B* **76**, 144302 (2007).
- [2] B.-I. Popa and S. A. Cummer, Design and characterization of broadband acoustic composite metamaterials, *Physical Review B* **80**, 174303 (2009).
- [3] Y. Xie, B.-I. Popa, L. Zigoneanu and S. A. Cummer, Measurement of a broadband negative index with space-coiling acoustic metamaterials, *Physical Review Letters* **110**, 175501 (2013).
- [4] V. M. García-Chocano, R. Graciá-Salgado, D. Torrent, F. Cervera and J. Sánchez-Dehesa, Quasi-two-dimensional acoustic metamaterial with negative bulk modulus, *Physical Review B* **85**, 184102 (2012).
- [5] V. V. Jikov, S. M. Kozlov and O. A. Oleinik, *Homogenization of differential operators and integral functions*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1994).