



## **Calcul de la réponse élastodynamique d'un milieu stratifié à une source localisée en temps et en espace**

P. Mora, E. Ducasse et M. Deschamps

Institut de Mécanique et d'Ingénierie; CNRS, 351 cours de la Libération, 33405 Talence, France  
pierric.mora@u-bordeaux1.fr

Problème à résoudre : étant donné un milieu stratifié infini et une source localisée en temps et en espace, comment calculer numériquement le champ élastodynamique au voisinage de la source sur une durée finie ? Sont concernées les plaques dans le vide, immergées ou enfouies, comportant des couches fluides et/ou viscoélastiques anisotropes. Dans le vide (géométrie bornée dans la direction  $z$  perpendiculaire aux strates), une approche modale est généralement utilisée, laquelle est beaucoup plus délicate à mettre en oeuvre si la plaque rayonne dans un milieu environnant. Notre technique, peu utilisée en géophysique et pas du tout en acoustique, se base sur une double transformation de Fourier en espace dans le plan des strates et une transformation de Laplace en temps. On détermine d'abord la solution du problème dans le domaine  $(\mathbf{k}, z, s)$ . Le retour du domaine de Laplace ( $s$ ) vers l'intervalle de temps d'observation se fait ensuite, comme le passage du domaine des vecteurs d'ondes  $\mathbf{k}$  vers le domaine physique, par transformation de Fourier rapide. Nous illustrons la méthode par l'exemple classique d'une plaque élastique immergée (air/eau) insonifiée par un transducteur oblique, en montrant la formation des modes de Lamb, dont les modes rétrogrades ou à vitesse de groupe nulle.

## 1 Introduction

L'étude de la diffraction des ondes acoustiques dans les guides plans stratifiés intéresse depuis plusieurs décennies les communautés de géophysique, d'acoustique sous-marine, et plus récemment de contrôle non destructif. De nombreuses approches pratiques existent aujourd'hui pour calculer la réponse de ces milieux à des sources, et sont à choisir selon qu'un calcul est souhaité en champ proche, lointain, dans le domaine physique, fréquentiel, pour un guide d'épaisseur borné, ou non... Parmi les plus connues citons les techniques modales, de propagateurs matriciels, de rayons et d'éléments finis ou de frontières. Cependant, des difficultés théoriques ou numériques mettent parfois en défaut ces méthodes. Prenons l'exemple du cas d'un guide plan dans le vide qui est généralement résolu par une approche modale [1]. Si ce guide plan est immergé ou enfoui dans un milieu environnant, alors la nouvelle base modale est incomplète et est de plus nettement plus délicate à obtenir numériquement. Park et Kausel ont montré qu'il était possible de continuer à utiliser la base du guide dans le vide, qui s'obtient sans difficulté numérique, au prix de la résolution d'une équation intégrale de Volterra [2]. Par la suite nous détaillons une approche par intégration numérique sur les nombres d'onde et la variable de Laplace, présentée par Phinney en 1965 [3], qui permet de résoudre de manière exacte au voisinage de la source et dans le domaine spatio-temporel le cas général d'un stratifié anisotrope quelconque, enfoui ou dans le vide, visco-élastique ou non, en évitant toute difficulté numérique et pour un coût calculatoire rendant la méthode tout à fait compétitive pour un calcul 3D.

## 2 Description de la méthode

### 2.1 Notations

Les champs de déplacements et de contraintes selon  $z$  dans un milieu élastique sont notés :

$$\underline{\mathbf{u}} \text{ et } \underline{\boldsymbol{\sigma}}_z = (\mathbf{n} \diamond \nabla) \underline{\mathbf{u}} \text{ dans le domaine } (\mathbf{x}, z, t);$$

$$\underline{\mathbf{u}} \text{ et } \underline{\boldsymbol{\sigma}}_z = (\mathbf{n} \diamond \mathbf{n}) \partial_z \underline{\mathbf{u}} - \mathbf{i} (\mathbf{n} \diamond \mathbf{k}) \underline{\mathbf{u}} \text{ dans le domaine } (\mathbf{k}, z, t);$$

$$\mathbf{U} \text{ et } \boldsymbol{\Sigma}_z = (\mathbf{n} \diamond \mathbf{n}) \partial_z \mathbf{U} - \mathbf{i} (\mathbf{n} \diamond \mathbf{k}) \mathbf{U} \text{ dans le domaine } (\mathbf{k}, z, s),$$

où  $\mathbf{x}$  est le vecteur position dans le plan des strates,  $t$  le temps,  $\nabla$  l'opérateur gradient et :

$$\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2 \text{ est le vecteur d'onde dans le plan des strates} \\ (\kappa \in \mathbb{C} \text{ sera le nombre d'onde selon } z);$$

$s \in \mathbb{C}$  est la variable de Laplace ;

$\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire de l'axe des  $z$  ;

$\diamond$  est un opérateur bilinéaire qui contient les coefficients d'élasticité du milieu [4].

De plus,  $\underline{\mathbf{f}}$ ,  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{F}$  désignent une force volumique, et  $\underline{\boldsymbol{\Phi}}$ ,  $\boldsymbol{\Phi}$ ,  $\mathbf{\Phi}$  une force surfacique située à une interface, qui peut correspondre à un transducteur en contact.

### 2.2 Définition du problème

L'équation à résoudre dans le domaine physique  $(\mathbf{x}, z, t)$  est à l'intérieur de chaque couche élastique de densité  $\rho$  :

$$\rho \partial_t^2 \underline{\mathbf{u}} - (\nabla \diamond \nabla) \underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{f}}, \quad (1)$$

où  $\underline{\mathbf{f}}$  est une source causale (nulle à  $t < 0$ ) localisée en espace et dont la transformée de Fourier en espace est bornée.

À l'interface entre deux couches (voir Fig. 1), on a continuité des déplacements et les contraintes normales présentent un saut correspondant à une source surfacique  $\underline{\boldsymbol{\Phi}}_q(\mathbf{x}, t)$  de force entre les deux strates :

$$\begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}}(z_q^+) \\ \underline{\boldsymbol{\sigma}}_z(z_q^+) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}}(z_q^-) \\ \underline{\boldsymbol{\sigma}}_z(z_q^-) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \underline{\boldsymbol{\Phi}}_q \end{pmatrix}. \quad (2)$$

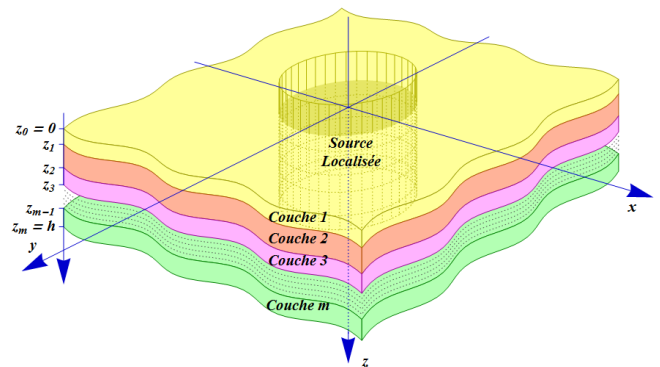


FIGURE 1 – Schéma d'une plaque stratifiée. Le nombre  $m$  de couches est fini, la première et la dernière peuvent être des milieux non bornés. Chacune des couches peut être fluide ou solide, isotrope ou anisotrope, viscoélastique ou non.

Pour condenser le propos, nous considérons par la suite que toutes les couches sont élastiques. Pour plus de détails concernant les cas fluide ou solide visco-élastique, contacter les auteurs.

## 2.3 Résolution analytique dans le domaine $(\mathbf{k}, z, s)$

En appliquant aux équations (1) et (2) une transformation de Fourier dans le plan de la plaque et une transformation de Laplace sur la variable temporelle, on obtient dans le domaine  $(\mathbf{k}, z, s)$  :

$$-(\mathbf{n} \diamond \mathbf{n}) \partial_z^2 \mathbf{U} + \mathbf{i} (\mathbf{k} \diamond \mathbf{n} + \mathbf{n} \diamond \mathbf{k}) \partial_z \mathbf{U} + (\mathbf{k} \diamond \mathbf{k} + \rho s^2 \mathbb{I}_3) \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (3)$$

dans chaque couche, et

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}(z_q^+) \\ \boldsymbol{\Sigma}_z(z_q^+) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{U}(z_q^-) \\ \boldsymbol{\Sigma}_z(z_q^-) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\Phi}_q \end{pmatrix} \quad (4)$$

aux interfaces.

L'équation aux dérivées partielles (1) est ainsi remplacée par une infinité d'équations différentielles linéaires (3) sur la variable  $z$  paramétrées par  $\mathbf{k}$  et  $s$ . On peut résoudre chacune d'entre elles analytiquement : la solution s'exprime dans chaque couche sous forme d'un champ incident produit par la source en l'absence des autres couches et d'un champ réfracté aux interfaces avec les couches adjacentes (voir Fig. 2).

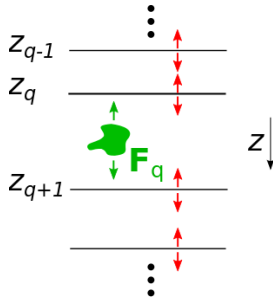


FIGURE 2 – Champ incident produit par la source  $F_q$  en l'absence d'interfaces (en vert) et champ réfracté aux interfaces (en rouge)

### 2.3.1 Champ incident

Considérons la couche n°  $q$  contenant le terme source  $F_q$ , et résolvons l'équation (3) en supposant que la couche est d'épaisseur infinie. Par la suite, nous appelons cette quantité « *champ incident dans la couche* ».

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}_{inc}(z) \\ \boldsymbol{\Sigma}_{z,inc}(z) \end{pmatrix}_{z_{q-1} < z < z_q} \quad (5)$$

Une manière de calculer (5) pour une source quelconque est d'obtenir le tenseur de Green de la couche, c'est à dire la réponse à une source surfacique  $\mathbf{F}(\mathbf{k}, z, s) = \delta(z) \mathbf{G}(\mathbf{k}, s)$ , puis de convoluer sur  $z$ .

### 2.3.2 Champ réfracté

Définissons à présent le champ réfracté par la plaque comme étant la solution générale de l'équation différentielle (3) en l'absence de source (sans second membre  $\mathbf{F}$ ). Ce champ s'exprime dans la base des  $2 \times 3$  ondes de volume de chaque couche solide. Pour la couche  $q$  située entre les interfaces  $q$  et  $q+1$  :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}_{ref}(z) \\ \boldsymbol{\Sigma}_{z,ref}(z) \end{pmatrix}_{z_{q-1} < z < z_q} = \sum_{i=1}^6 a_{q,i} \boldsymbol{\xi}_{q,i} \exp(-\mathbf{i} \kappa_{q,i} z) \quad (6)$$

Pour les deux couches extrêmes, on ne considère que la moitié des nombres d'ondes correspondant aux ondes rayonnées par la plaque stratifiée. Pour la couche du dessus, on ne garde que les ondes pour lesquelles la partie imaginaire du nombre d'onde  $\kappa_{1,i}$  est positive, et pour la couche du dessous, celles dont la partie imaginaire du nombre d'onde  $\kappa_{m,i}$  est négative.

Dans l'équation (6) les polarisations  $\boldsymbol{\xi}_{q,i}$  et nombres d'ondes  $\kappa_{q,i}$  sont les vecteurs et valeurs propres de la matrice suivante, de type « *matrice de Stroh* » [5, 6]

$$\begin{pmatrix} -(\mathbf{n} \diamond \mathbf{n})^{-1} (\mathbf{n} \diamond \mathbf{k}) & \mathbf{i} (\mathbf{n} \diamond \mathbf{n})^{-1} \\ \mathbf{i} [\rho s^2 \mathbb{I}_3 + (\mathbf{k} \diamond \mathbf{k}) - (\mathbf{k} \diamond \mathbf{n}) (\mathbf{n} \diamond \mathbf{n})^{-1} (\mathbf{n} \diamond \mathbf{k})] & -(\mathbf{k} \diamond \mathbf{n}) (\mathbf{n} \diamond \mathbf{n})^{-1} \end{pmatrix} \quad (7)$$

### 2.3.3 Détermination du champ total

Le champ total dans chaque couche s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}(z) \\ \boldsymbol{\Sigma}_z(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{ref}(z) \\ \boldsymbol{\Sigma}_{z,ref}(z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{inc}(z) \\ \boldsymbol{\Sigma}_{z,inc}(z) \end{pmatrix} \quad (8)$$

Les champs incidents dans les différentes couches sont d'abord déterminés en fonction des termes sources  $\mathbf{F}$ .

Les champs réfractés, caractérisés par leurs polarisations  $\boldsymbol{\xi}_{q,i}$  et leurs nombres d'ondes  $\kappa_{q,i}$ , se calculent ensuite en déterminant les amplitudes  $a_{q,i}$  grâce aux équations de continuité (4) aux interfaces.

Pour un total de  $m$  couches (et  $m-1$  interfaces), on obtient en effet un système linéaire de type « *Global Matrix* » [7] sur les  $a_{q,i}$  avec autant d'équations que d'inconnues ( $6 \times (m-1)$ ) si toutes les couches sont solides), dont le second membre est la somme des traces des champs incidents sur les interfaces et des termes-sources  $\boldsymbol{\Phi}_q$  à ces mêmes interfaces.

## 2.4 Retour numérique vers le domaine physique

Etant donné le cas très général traité, un retour dans le domaine physique n'est pas envisageable de manière analytique. Il faut donc s'y prendre de manière numérique. Ceci a deux conséquences bien connues :

- le problème est périodisé dans le domaine physique à cause de la discrétisation dans le domaine spectral,
- des phénomènes de Gibbs apparaissent à cause de la troncature des spectres des sources.

Le second point donne lieu à une erreur numérique que l'on maîtrise en tronquant arbitrairement loin le spectre des sources ou en lui appliquant une fenêtre apodisante. Nous insistons sur l'importance de contrôler cette erreur car nous verrons par la suite qu'elle est exponentiellement amplifiée au cours du temps. Le premier point se traduit quant à lui différemment pour les variables d'espace et la variable de temps. En espace, la conséquence est que la source de départ est remplacée par une infinité de sources identiques espacées périodiquement. Ceci n'est pas problématique aux temps courts : tant que l'onde la plus rapide n'a pas atteint le bord de la fenêtre spatiale les sources voisines n'ont aucune influence sur le résultat. Si on veut un résultat à un temps plus long, il faut augmenter la taille de la fenêtre spatiale de manière à éloigner les sources voisines. En temps, la conséquence est que l'énergie qui persiste à la fin de la

simulation est réinjectée au début. Il est donc crucial que l'onde se soit entièrement éteinte, par rayonnement et/ou dissipation visqueuse, à la fin de la durée de simulation, sous peine de faire apparaître un phénomène de Gibbs et d'obtenir un résultat erroné. Lorsqu'on travaille en régime harmonique à la pulsation  $\omega$  ceci est particulièrement problématique dans le cas des guides d'ondes faiblement dissipatifs ou rayonnants. Pour ces milieux, qui sont aussi les plus intéressants au plan du contrôle non destructif par ondes guidées, l'intégration directe en  $(\mathbf{k}, \omega) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  est impossible.

C'est la raison pour laquelle il est nécessaire d'utiliser une autre méthode pour déterminer numériquement la réponse d'un milieu stratifié à une source brève localisée. Dans [8, 9], Gatignol, Potel, *et al* décrivent comment le décalage dans le plan complexe du chemin d'intégration sur  $\mathbf{k}$  leur permet d'arriver au résultat en  $(\mathbf{x}, z, \omega)$ . Ce décalage doit distinguer les propagations vers les  $x > 0$  de celles vers les  $x < 0$ . Pour notre part, le résultat étant souhaité en  $(\mathbf{x}, z, t)$ , il nous apparaît bien plus simple de garder  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2$  et de décaler le contour d'intégration sur  $\omega$ . En effet, l'hypothèse de causalité permet de ne garder que le sens  $t > 0$  : comparé au cas précédent, aucune distinction n'est à faire. Ce formalisme est celui de Laplace, c'est pourquoi nous parlons depuis le début de  $s$  et non de  $\omega$ .

Le retour numérique vers le domaine physique  $(\mathbf{x}, z, t)$  se fait de la façon suivante :

$\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{x}$  : utilisation usuelle de la double  $FFT^{-1}$ ,  
 $s \rightarrow t$  : utilisation de la formule de Bromwich-Mellin :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \sigma_z(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \begin{pmatrix} \mathbf{U}(s) \\ \Sigma_z(s) \end{pmatrix} \exp(st) ds \quad , \quad (9)$$

qui peut se calculer par  $FFT^{-1}$  en multipliant le résultat par  $\exp(\gamma t)$ .

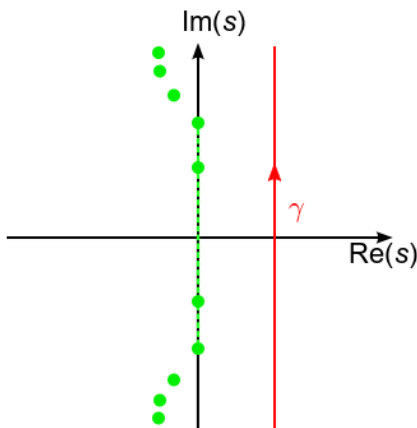


FIGURE 3 – Chemin d'intégration pour l'équation (9) (ligne rouge). Grâce à la causalité et à la stabilité du système, on est assuré que toutes les fonctions sont holomorphes sur  $\mathbb{R}_+^* + i\mathbb{R}$ . Tous les problèmes (pôles, coupures...) sont donc dans la moitié gauche, frontière incluse.

La figure 3 illustre le rôle crucial du paramètre  $\gamma$ , qui permet de choisir un chemin d'intégration arbitrairement loin des singularités des fonctions  $\mathbf{U}(s)$  et  $\Sigma_z(s)$ . L'interprétation que l'on peut donner est que considérer l'équation (9) revient à multiplier les signaux temporels par une fenêtre exponentiellement décroissante  $\exp(-\gamma t)$ . Le réglage du paramètre  $\gamma$  permet de rendre les signaux sur lesquels

on travaille négligeables en fin de simulation, avant de les remultiplier à la toute fin du calcul par  $\exp(\gamma t)$  pour retrouver les signaux physiques. Cette méthode, bien connue dans le domaine du traitement du signal, porte généralement le nom de “*Exponential Window Method*”. À notre connaissance, le premier article à l'utiliser pour calculer numériquement des arrivées d'ondes est dû à Phinney [3]. Plus récemment, Kausel & Roëssel [10] en discutent l'implémentation et interprètent  $\gamma$  comme un terme d'amortissement qui aurait été rajouté à l'équation physique initiale (1). Enfin, le lecteur pourra trouver en [11, 12] des exemples récents d'utilisation de la méthode dans des codes de “*Boundary Element Method*”. À notre connaissance, aucune utilisation de cette technique n'a encore été faite pour résoudre le cas général de la simulation temporelle en 3D d'un guide stratifié anisotrope quelconque.

Pour revenir à l'équation (9), il y a un compromis numérique à faire concernant la valeur de  $\gamma$ . En effet, choisir  $\gamma$  trop petit nous expose à une troncature trop brusque de l'intégrale (9), et donc à des phénomènes de Gibbs non négligeables en début de simulation. *A contrario*, une valeur de  $\gamma$  trop grande engendrera un bruit numérique (erreurs d'arrondi) trop important à la fin de la fenêtre temporelle de simulation et nous forcera à ne conserver que le début des signaux temporels obtenus. Ce compromis est discuté dans les références [10, 11, 12]. Retenons simplement que selon le besoin, l'erreur numérique peut être réduite arbitrairement, éventuellement au prix d'un surdimensionnement de la fenêtre temporelle.

### 3 Exemples

Pour illustrer la méthode, nous nous proposons de simuler l'expérience classique [13, 14] d'excitation des modes de Lamb d'une plaque en aluminium (Fig. 4). La plaque est immergée dans de l'eau de manière à utiliser un transducteur sans contact. Une onde incidente de 30 cycles de fréquence  $f$  avec une enveloppe gaussienne est générée. Le transducteur est relativement long et large par rapport à la longueur d'onde (env.  $40 \lambda_{eau}$ ), épais d'environ  $2 \lambda_{eau}$  et forme un angle  $\theta$  avec l'horizontale de manière à insonifier la plaque avec un front quasi-plan en incidence oblique, et ainsi sélectionner à la fois une fréquence et un nombre d'onde dans la plaque. Notre but est d'observer le mode  $S_1$  autour de sa région à vitesse de groupe nulle. En effet, ces modes (appelés ZGV pour Zero Group Velocity) ont connu un regain d'intérêt récent en raison de la possibilité de les exploiter pour mesurer localement et très précisément l'épaisseur ou les caractéristiques des ondes de volume d'une plaque [15]. Clorennec, Prada et Royer ont ainsi pu imager des décollements de structures composites et des dépôts de corrosion induisant des variations d'épaisseur de moins de 0.1% [16].

Pour nous guider dans le choix des paramètres de la source nous nous appuyons sur les courbes de dispersion de la plaque dans le vide (*cf.* Fig. 5), ces dernières étant relativement peu modifiées par la présence environnante de l'eau ([17, 18, 19] par exemple).

La figure 6a montre un paquet d'ondes se déplaçant à une vitesse de groupe positive. Fig. 6b, le paquet d'onde reste centré à la même position : c'est un mode à vitesse de groupe nulle. Fig. 6c, on distingue deux longueurs d'onde

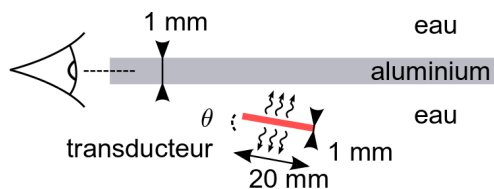


FIGURE 4 – Vue en coupe de l'expérience simulée. Les champs sont calculés dans le plan médian de la plaque.

	(a)	(b)	(c)
$f$ [MHz]	3.0	2.87	3.0
$\theta$ [°]	12.0	7.7	2.6

TABEAU 1 – Paramètres utilisés pour les 3 sources.

différentes : le paquet d'ondes est principalement composé de  $S_1$  mais également, en plus petite proportion, du mode voisin. Le déplacement en groupe du paquet  $S_1$  s'effectue lentement et de manière rétrograde.

## 4 Conclusion

La méthode décrite dans cet article permet de traiter le cas général d'un guide plan stratifié anisotrope et viscoélastique, dans le vide ou enfoui, insonifié par une source causale localisée quelconque. La solution est exacte au sens numérique et les paramètres sont maîtrisés, contrairement par exemple aux approches par intégration directe en temps qui présentent parfois des instabilités, ou aux approches modales qui peuvent rencontrer des difficultés à obtenir tous les modes. Une précision arbitraire peut être obtenue pour un temps fini donné. Le calcul 2D-3D est rapide et le code informatique hautement parallélisable. La même approche peut être utilisée pour traiter le cas des guides d'ondes 1D de type cylindres stratifiés.

## Remerciements

Ce travail est mené dans le cadre d'une thèse cofinancée par la Région Aquitaine et le CEA-LIST, que nous remercions.

Nous remercions également J.-L. Charles, P. Gay et R. Bouchourbat pour leurs conseils sur les choix de programmation. Les calculs présentés dans cette étude ont été réalisés grâce au MCIA (Mésocentre de Calcul Intensif Aquitain) de l'Université de Bordeaux et de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour.

## Références

- [1] Kausel E., Thin-layer method : Formulation in the time domain. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **37**; 927–941 (1994).
- [2] Park J. and Kausel E., Response of Layered Half-Space Obtained Directly in the Time Domain, Part I : SH Sources. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **96(5)**, 1795-1809 (2006).

Modes de Lamb d'une plaque d'aluminium dans le vide

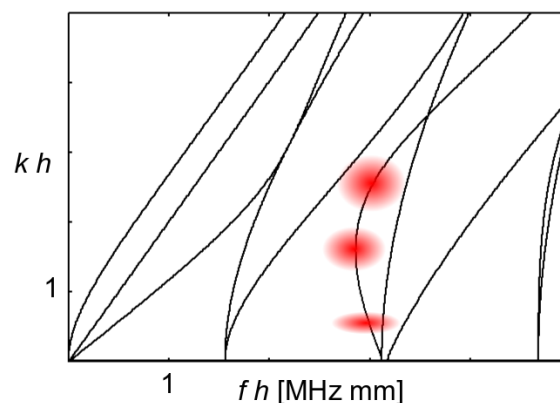


FIGURE 5 – En rouge : amplitudes des spectres des sources utilisées (a), (b), (c) (de haut en bas)

- [3] Phinney R. A., Theoretical calculation of the spectrum of first arrivals in layered elastic mediums. *J. Geophys. Res.*, **70(20)**, 5107–5123 (1965).
- [4] Ducasse E. and Deschamps M., A nonstandard wave decomposition to ensure the convergence of Debye series for modeling wave propagation in an immersed anisotropic elastic plate. *Wave Motion*, **49(8)**, 745-764 (2012).
- [5] Stroh A.N., Steady state problems in anisotropic elasticity, *J. Math. Phys.* **41** : 77–103 (1962).
- [6] Lothe J. and Barnett D.M., On the existence of surface-wave solutions for anisotropic elastic half-spaces with free surface, *J. Appl. Phys.* **704(2)** : 428–433 (1976).
- [7] Lowe M.J.S., Matrix Techniques for Modeling Ultrasonic Waves in Multilayered Media, *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, **42(4)**, 525-542 (1995).
- [8] Bedrici N., Gagniol Ph., Potel C., An Iterative Method for the Interaction Between a Bounded Beam and an Interface Defect in Solids, Under Kirchhoff Approximation. *Acustica-Acta Acustica*, **95**, 189-202 (2009).
- [9] Vacossin B., Potel C., Gagniol Ph., de Belleval J.F., Interaction of a monochromatic ultrasonic beam with a finite length defect at the interface between two anisotropic layers - Kirchhoff approximation and Fourier representation. *IEEE, Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, **56/10**, 2251-2267 (2009).
- [10] Kausel E. and Roësset J., Frequency Domain Analysis of Undamped Systems. *J. Eng. Mech.*, **118(4)**, 721–734 (1992).
- [11] Xiao J., Ye W. and Wen L., Efficiency improvement of the frequency-domain BEM for rapid transient elastodynamic analysis. *Computational Mechanics*, **52(4)**, 903-912 (2013).
- [12] Moreno P. and Ramirez A., Implementation of the numerical laplace transform : a review. *IEEE Trans Power Deliv.*, **23(4)** : 2599–2609 (2008).

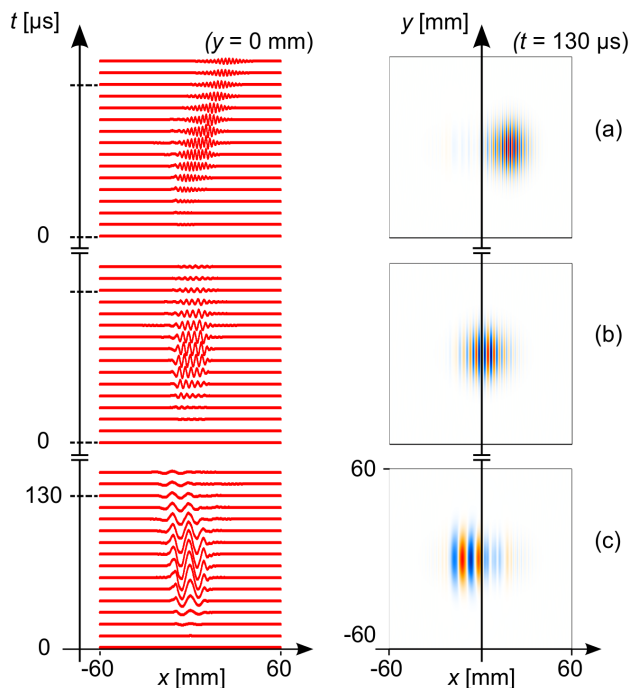


FIGURE 6 – Excitation du mode de Lamb  $S_1$  dans les 3 régions indiquées en fig. 5 : (a) vitesse de groupe positive, (b) vitesse de groupe nulle, (c) vitesse de groupe faiblement négative. A gauche : champs  $(x, t)$  à  $y, z$  fixés, à droite : champs  $(x, y)$  à  $z, t$  fixés.

- [13] Bedrici N., Vacossin B., Gatignol P., Générations d'ondes modales dans une structure multicouche plane par l'impact d'un faisceau ultrasonore. *21ème Congrès Français de Mécanique*, Bordeaux, France (2013)
- [14] Poncelet O., Ondes planes hétérogènes à fréquence complexe : modes propres de plaques immergées. *Thèse de doctorat de l'Université Bordeaux 1* (1996)
- [15] Clorennec D., Prada C., Royer D., Local and noncontact measurements of bulk acoustic wave velocities in thin isotropic plates and shells using zero group velocity Lamb modes. *J. Appl. Phys.* **101** (2007).
- [16] Clorennec D., Prada C., Royer D., Laser ultrasonic inspection of plates using zero-group velocity lamb modes. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control* **57(5)**, 1125-1132 (2010).
- [17] Nayfeh A.H., *Wave Propagation in Layered Anisotropic Media*, North-Holland, Amsterdam, 1995.
- [18] Chimenti D.E., Guided waves in plates and their use in material characterization, *Applied Mechanics Reviews* **50**, 247–284 (1997).
- [19] Shuvalov A.L., Poncelet O., Deschamps M., Analysis of the dispersion spectrum of fluid-loaded anisotropic plates : leaky-wave branches. *Journal of Sound and Vibration* **296(3)**, 494-517 (2006).