Reconstruction de champ par mesures séquentielles en présence de références imparfaites

J. Antoni
Laboratoire Vibrations Acoustique, INSA de Lyon Bâtiment St. Exupéry 25 bis av. Jean Capelle, 69621 Villeurbanne, France
jerome.antoni@insa-lyon.fr

La reconstruction de champs étendus à l'aide de mesures prises par une antenne de microphones nécessite idéalement de pouvoir déplacer séquentiellement l'antenne en différentes positions, soit pour étendre la zone de mesure, soit pour y densifier le nombre de microphones. Afin de pouvoir resynchroniser des mesures séquentielles, la solution classique consiste à rétablir les relations de phase à partir de mesures fixes nommées « références ». Les références nécessitent théoriquement 1) d'être parfaitement cohérentes avec le champ acoustique à reconstruire, donc caractérisées par un rapport signal-à-bruit infini, 2) et en nombre au moins égal au nombre de composantes indépendantes qui constituent ce champ. En pratique, ces hypothèses sont souvent difficiles à respecter. En particulier, la première dépend fortement du bon positionnement des références, qui requiert idéalement de connaître la structure (distribution et directivité) du champ que l'on cherche justement à caractériser. De même, la deuxième hypothèse est souvent difficile à réaliser en raison du faible nombre de références imposé par des contraintes d'encombrement et de coût. L'objectif de cette contribution est de proposer une solution théorique lorsque les hypothèses précédentes sont dégradées. L'approche se fonde sur une modélisation assez générale de la matrice spectrale du champ acoustique en une composante de rang réduit et une composante de bruit, dont les facteurs sont identifiés en cherchant leurs valeurs les plus probables étant donné l'observation conjointe des données et des références (estimateur du maximum a posteriori). On montre que, posé sous cette forme, le problème accepte une solution même en présence de références imparfaites. Le cas extrême où aucune référence n'est disponible découle comme un cas particulier.

1 Introduction

L'ambition de l'imagerie acoustique est de reconstruire une distribution source à partir du champ acoustique rayonné à une certaine distance. En général, une reconstruction exacte n'est théoriquement possible que si le champ acoustique est mesuré sur l'intégralité d'une surface qui entoure les sources actives. Cette condition est cependant très difficile à réaliser et, en pratique, est remplacée par un échantillonnage spatial du champ par une antenne de capteurs (le cas de microphones est considéré dans cet article). Le fait que le nombre de microphones et que les dimensions de l'antenne sont forcément réduits pour des raisons évidentes de coûts et d'encombrement s'impose comme une des principales limites de l'imagerie acoustique par méthodes d'antennerie.

Une solution naturelle permettant de contourner ce problème consiste à multiplier le nombre de mesures en déplaçant autant de fois que nécessaire une antenne prototype. Il est ainsi possible de couvrir une grande surface (éventuellement fermée) et de densifier l'échantillonnage spatial par la répétition des points de mesures. Cette approche nécessite 1) que le champ acoustique soit stationnaire et 2) que des mesures fixes soient disponibles afin de servir de références de phase pour « raccorder » les mesures séquentielles.

L'utilisation de mesures référencées rencontre en pratique un certain nombre de difficultés. Dans son principe, la méthode exige que le nombre de références linéairement indépendantes soit au moins égal au nombre de degrés de liberté statistiques qui composent le champ acoustiques (c'est-à-dire au nombre de sources virtuelles équivalents capables de reproduire la même matrice de covariance), voire strictement supérieur en présence de bruit de mesure [1][2][3][4]. De plus, l'ensemble des références doit être parfaitement cohérent avec le champ acoustique ce qui interdit la présence de bruit sur les références. Ces conditions sont très difficiles à remplir en pratique et exigeraient de manière paradoxale que le nombre et le positionnement des références soient optimisés par rapport aux caractéristiques inconnues du champ source [5]. En réalité, il faut admettre que toute mesure est généralement bruitée (en particulier dans le cas de références de type vibratoire) et que le nombre de références (qui ont chacune un coût significatif dans la chaîne de mesure) peut vraisemblablement sous-estimer le nombre de degrés de liberté statistique du champ.

L'objectif de cet article est de proposer une solution théorique pour la prise en compte de références imparfaites, entachées de bruit de mesure et éventuellement en sous-nombre par rapport aux exigences mentionnées ci-dessus. La solution se veut générale, car 1) elle considère aussi bien les situations où les fonctions de transfert entre les sources et les références sont connues ou inconnues et 2) elle accepte comme cas particuliers les configurations

- où les mesures sont simultanées,
- où les références sont parfaites,
- où les mesures sont séquentielles et sans références.

Les résultats présentés dans cet article se concentrent sur les aspects théoriques du problème. La méthodologie sera illustrée sur des expériences numériques comparant différents scénarios de rapports signal-à-bruit et de nombre de références lors de la présentation orale.

2 Formulation du problème

Le problème est résolu dans un cadre probabiliste bayésien qui a l'avantage de prendre explicitement en compte l'effet du bruit de mesure ainsi que l'introduction d'aprioris sur les quantités recherchées [6]. Les motivations sous-jacentes à cette approche ont été décrites dans les références [7], [8] et [9] et ne sont donc pas répétées ici.

2.1 Modèle direct

Dans un cadre générale, trois types de mesures sont à considérer :

1) les pressions aux microphones de l'antenne prototype correspondant à différentes positions de l'antenne et, pour chaque acquisition, décomposées en plusieurs snapshots. Le vecteur des pressions (coefficients de Fourier à une fréquence d'analyse) des M pressions acquises par une antenne de M microphones sera noté

$\mathbf{p}_{ij}$ où les indices $i = 1,...,P$ et $j = 1,...,I_i$ réfèrent à P positions de l'antenne et à I_i snapshots par position.

2) les références pour lesquelles le transfert est connu depuis le domaine source ; il s'agit typiquement de microphones fixes associées au même propagateur que celui des microphones de l'antenne (par exemple le propagateur champ libre). Ces références seront dites de premier type et seront notées par le vecteur $\mathbf{r}_{1,ij}$ de dimension R_1.

3) les références pour lesquelles le transfert est inconnu depuis le domaine source ; il s'agit par exemple d'accéléromètres placés sur une voie de transfert solidienne, corrélés avec les sources acoustiques recherchées, mais selon une relation (linéaire) trop complexe pour être modélisée dans le problème. Ces références seront dites de second type et notées par le vecteur $\mathbf{r}_{2,ij}$ de dimension R_2.

Il est clair que pour chaque couple d'indices (*i,j*), les mesures $\mathbf{p}_{ij}$, $\mathbf{r}_{1,ij}$ et $\mathbf{r}_{2,ij}$ sont acquises simultanément. Le vecteur $\mathbf{z}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{ij}^T & \mathbf{r}_{1,ij}^T & \mathbf{r}_{2,ij}^T \end{bmatrix}^T$ de dimension $M + R_1 + R_2$ représentera alors la concaténation de ces trois vecteurs.

L'objectif de l'imagerie acoustique est de reconstruire la distribution source qui génère les mesures $\mathbf{z}_{ij}$. En adoptant la discrétisation décrite dans la référence [8], cette distribution sera représentée par un vecteur de K coefficients $\mathbf{c}_{ij}$ qui se décompose lui-même en $\mathbf{c}_{ij} = \mathbf{\Lambda\varepsilon}_{ij}$ où les n variables $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}$ jouent le rôle de « sources virtuelles » décorrélées et où $\mathbf{\Lambda}$ est une matrice de passage [1]. L'intérêt de cette décomposition est de réduire la dimension K du champ source à un nombre $n < K$ aussi petit que possible de « degrés de liberté statistiques ». Les méthodes référencées classiques supposent que $R_1 + R_2 \geq n$, hypothèse qui est abandonnée dans le cadre de cette étude. L'hypothèse que les références sont mesurées sans bruit est également abandonnée et trois bruits additifs $\mathbf{n}_{p,ij}$, $\mathbf{n}_{1,ij}$ et $\mathbf{n}_{2,ij}$ seront explicitement pris en compte dans les mesures $\mathbf{p}_{ij}$, $\mathbf{r}_{1,ij}$ et $\mathbf{r}_{2,ij}$. Finalement, le modèle direct qui relie la distribution source aux mesures s'écrit

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{p}_{ij} \\ \mathbf{r}_{1,ij} \\ \mathbf{r}_{2,ij} \end{bmatrix}}_{\mathbf{z}_{ij}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{H}_i\mathbf{\Lambda} \\ \mathbf{F\Lambda} \\ \mathbf{L} \end{bmatrix}}_{\mathbb{H}_i} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} + \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{p,ij} \\ \mathbf{n}_{1,ij} \\ \mathbf{n}_{2,ij} \end{bmatrix} \tag{1}$$

où $\mathbf{H}_i$ et $\mathbf{F}$ sont des matrices de transfert connues, la première dépendant de la position i de l'antenne et la seconde en étant indépendante, et où $\mathbf{L}$ est une matrice de transfert inconnue. Les inconnues du problème sont donc $\mathbf{\Lambda}$, $\mathbf{L}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}$, les bruits additifs étant des variables de nuisance.

2.2 Modèle probabiliste

Le problème inverse inhérent à l'imagerie acoustique consiste à retrouver les inconnues identifiées dans le paragraphe précédant à partir des mesures bruitées $\mathbf{z}_{ij}$. Pour cela, le problème est retranscrit dans un cadre probabiliste bayésien [6][7][8]. Les bruits additifs $\mathbf{n}_{p,ij}$, $\mathbf{n}_{1,ij}$ et $\mathbf{n}_{2,ij}$ sont supposés suivre des lois normales, complexes et centrées, de matrices de covariance $\mathbf{\Omega}_{p,i}$, $\mathbf{\Omega}_1$ et $\mathbf{\Omega}_2$ diagonales. Les éléments de la matrice inconnue $\mathbf{\Lambda}$ sont supposés suivre indépendamment et *a priori* une loi normale, complexe et centrée, de variance α^2. Il en résulte que la densité de probabilité des mesures $\mathbf{z}_{ij} \mid \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}$ conditionnées aux sources virtuelles est également normale, de moyenne $\mathbb{H}_i\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}$ et de matrice de covariance

$$\mathbf{\Omega}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{\Omega}_{p,i} & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{\Omega}_1 & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{\Omega}_2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Selon le principe de l'approche bayésienne, l'estimation des paramètres $\mathbf{\Lambda}$ et $\mathbf{L}$ est obtenue par les valeurs les plus probables compatibles avec l'observation des mesures. Il s'agit donc de résoudre

$$(\hat{\mathbf{\Lambda}}, \hat{\mathbf{L}}) = \operatorname{Arg\,max}\left[\mathbf{\Lambda}, \mathbf{L} \mid \mathbf{z}_{ij}\right] \tag{3}$$

(où les crochets symbolisent une densité de probabilité) à partir des densités de probabilités listées ci-dessus. Il faut cependant rajouter à ces inconnues les matrices de covariance de l'Eq. (2) et le paramètre α^2 (puissance apriori des sources) qui jouent le rôle d'hyperparamètres. Etant donné les statuts différents de ces paramètres dans le modèle probabiliste, leurs estimations donnent lieu à des stratégies algorithmiques distinctes qui sont décrites dans les paragraphes suivants.

3 Déclinaison des estimateurs

Le problème de maximisation décrit par l'Eq. (3) ne trouve pas de solution explicite. Une solution relativement élégante consiste alors à le résoudre à l'aide de l'algorithme Espérance-Maximisation (EM) [10] qui, dans le contexte présent, se résume à itérer la solution obtenue en supposant les sources virtuelles $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}$ connues et à réajuster ces dernières à partir de la solution précédente.

3.1 Estimateurs de $\boldsymbol{\Lambda}$ et $\mathbf{L}$

En supposant les sources virtuelles connues, l'estimation de $\boldsymbol{\Lambda}$ et $\mathbf{L}$ consiste à maximiser la log-vraisemblance $\mathbb{E}\left\{\ln\left[\mathbf{z}_{ij} \mid \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}, \boldsymbol{\Lambda}, \mathbf{L}\right]\right\} + \ln\left[\boldsymbol{\Lambda}\right]$ qui contient les densités de probabilités décrites au paragraphe 2.2 et où $\mathbb{E}$ représente l'espérance mathématique par rapport à $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} \mid \mathbf{z}_{ij}$. Il vient alors

$$\hat{\mathbf{L}} = \left(\sum_{i,j} \mathbf{Q}^{(i)}_{r_2\varepsilon}\right)\left(\sum_{i,j} \mathbf{Q}^{(i)}_{\varepsilon\varepsilon}\right)^{-1} \quad (4)$$

et

$$\mathrm{vec}\hat{\boldsymbol{\Lambda}} = \left(\sum_{i,j}\left(\mathbf{Q}^{(i)}_{\varepsilon\varepsilon} \otimes \left(\mathbf{H}_i^H \boldsymbol{\Omega}_{p,i}^{-1}\mathbf{H}_i + \mathbf{F}^H\boldsymbol{\Omega}_1^{-1}\mathbf{F}\right)\right) + \frac{n}{\alpha^2}\right)^{-1} \times \sum_{i,j} \mathrm{vec}\left(\mathbf{H}_i^H \boldsymbol{\Omega}_{p,i}^{-1}\mathbf{Q}^{(i)}_{p\varepsilon} + \mathbf{F}^H \boldsymbol{\Omega}_1^{-1}\mathbf{Q}^{(i)}_{r_1\varepsilon}\right) \quad (5)$$

où l'opérateur vec concatène les colonnes d'une matrice les unes au dessus des autres, l'exposant ^{H} désigne l'opérateur de transposition-conjugaison et où les matrices $\mathbf{Q}^{(i)}_{\varepsilon\varepsilon}$, $\mathbf{Q}^{(i)}_{p\varepsilon}$, $\mathbf{Q}^{(i)}_{r_1\varepsilon}$ et $\mathbf{Q}^{(i)}_{r_2\varepsilon}$ sont définies dans le paragraphe suivant.

3.2 Estimateurs des sources virtuelles

Les sources virtuelles sont indirectement caractérisées par leurs matrices de covariance conditionnées aux mesures. Il vient

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}^{(i)}_{\varepsilon\varepsilon} &\doteq \mathbb{E}\left\{\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^H\right\} \\ &= \sum_j \left(\mathbf{I} - \mathbf{B}_i \mathbb{H}_i\right) + \mathbf{B}_i\left(\sum_j \mathbf{z}_{ij}\mathbf{z}_{ij}^H\right)\mathbf{B}_i\end{aligned} \quad (6)$$

et

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}^{(i)}_{\varepsilon z} &\doteq \mathbb{E}\left\{\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}\mathbf{z}_{ij}^H\right\} \\ &= \left[\mathbf{Q}^{(i)}_{pz} \quad \mathbf{Q}^{(i)}_{r_1 z} \quad \mathbf{Q}^{(i)}_{r_2 z}\right] = \mathbf{B}_i\left(\sum_j \mathbf{z}_{ij}\mathbf{z}_{ij}^H\right)\end{aligned} \quad (7)$$

avec

$$\mathbf{B}_i = \left(\boldsymbol{\Lambda}^H\mathbf{H}_i^H\boldsymbol{\Omega}_{p,i}^{-1}\mathbf{H}_i\boldsymbol{\Lambda} + \boldsymbol{\Lambda}^H\mathbf{F}^H\boldsymbol{\Omega}_1^{-1}\mathbf{F}\boldsymbol{\Lambda} + \mathbf{L}^H\boldsymbol{\Omega}_2^{-1}\mathbf{L} + \mathbf{I}\right)^{-1} \times \left[\boldsymbol{\Lambda}^H\mathbf{H}_i^H\boldsymbol{\Omega}_{p,i}^{-1} \quad \boldsymbol{\Lambda}^H\mathbf{F}^H\boldsymbol{\Omega}_1^{-1} \quad \mathbf{L}^H\boldsymbol{\Omega}_2^{-1}\right] \quad (8)$$

Les Eqs. (4)-(8) sont à itérer jusqu'à convergence.

3.3 Estimateurs du bruit

Les matrices de covariance $\boldsymbol{\Omega}_{p,i}$, $\boldsymbol{\Omega}_1$ et $\boldsymbol{\Omega}_2$ ainsi que la puissance apriori des sources α^2 interviennent dans les équations précédentes et doivent donc être également estimées. En répétant l'approche de la référence [9], les matrices $\boldsymbol{\Omega}_{p,i}$ et $\boldsymbol{\Omega}_1$ et l'hyperparamètre α^2 peuvent être obtenus en identifiant le modèle apriori

$$\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{S}}^{(i)}_{pp} & \hat{\mathbf{S}}^{(i)}_{pr_1} \\ \hat{\mathbf{S}}^{(i)}_{r_1 p} & \hat{\mathbf{S}}^{(i)}_{r_1 r_1}\end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix}\alpha^2\mathbf{H}_i\mathbf{H}_i^H + \boldsymbol{\Omega}_{p,i} & \alpha^2\mathbf{H}_i\mathbf{F}^H \\ \alpha^2\mathbf{F}\mathbf{H}_i^H & \alpha^2\mathbf{F}\mathbf{F}^H + \boldsymbol{\Omega}_1\end{bmatrix} \quad (9)$$

par maximum de vraisemblance, où $\hat{\mathbf{S}}^{(i)}_{xy} = \frac{1}{I_i}\sum_j \mathbf{x}_{ij}\mathbf{y}_{ij}^H$.

Cependant, l'estimation de la matrice de covariance $\boldsymbol{\Omega}_2$ ne peut être réalisée de cette manière en raison de la non-identifiabilité de l'équation

$$\hat{\mathbf{S}}^{(i)}_{r_2 r_2} \simeq \mathbf{L}\mathbf{L}^H + \boldsymbol{\Omega}_2 \quad (10)$$

par rapport aux deux inconnues $\boldsymbol{\Omega}_2$ et $\mathbf{L}$. On peut par contre poser $\hat{\boldsymbol{\Omega}}_2 = \mathrm{Arg\,max}\,\mathbb{E}\left\{\ln\left[\mathbf{z}_{ij} \mid \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}, \boldsymbol{\Omega}_2\right]\right\}$ dans les itérations de l'algorithme EM, ce qui donne

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}}_2 = \mathrm{diag}\left(\hat{\mathbf{S}}_{r_2 r_2} + \sum_i \frac{I_i}{I}\left(\mathbf{L}\mathbf{Q}^{(i)}_{\varepsilon\varepsilon}\mathbf{L}^H - 2\mathrm{Herm}\left\{\mathbf{Q}^{(i)}_{r_2\varepsilon}\mathbf{L}^H\right\}\right)\right)$$

avec $I = \sum_i I_i$ et $\mathrm{Herm}\{\mathbf{A}\} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^H\right)$.

4 Discussion

L'ensemble des équations du paragraphe 3 fournie une solution rigoureuse à la problématique annoncée. Une des caractéristiques notables de la méthode proposée est d'être générale. En effet, différents cas particuliers d'intérêt découlent directement de l'Eq. (1) de départ :

- le cas des mesures simultanées est retrouvé en ne conservant que la seconde équation matricielle de l'Eq. (1),
- le cas avec références parfaites s'obtient en annulant d'emblée les matrices de covariance $\boldsymbol{\Omega}_1$ et $\boldsymbol{\Omega}_2$,
- le cas des mesures séquentielles sans référence revient à ne conserver que la première équation matricielle de l'Eq. (1) [9].

De même, la méthode peut être utilisée pour débruiter des références, auquel cas la notion de distribution source devient purement instrumentale.

Une autre caractéristique de la méthode est de posséder un mécanisme de régularisation interne qui apparaît de manière explicite dans les inversions des matrices des Eqs. (5) et (8). Celui-ci repose toutefois entièrement sur la bonne estimation des hyperparamètres tel que discuté au paragraphe 3.3.

Finalement, un aspect essentiel qui transparaît difficilement dans les équations trouvées concerne la manière de réaliser les mesures séquentielles : quantité, taux de recouvrement, etc. La réponse à ces questions dépend essentiellement de la directivité et de la longueur d'autocorrélation du champ source ; il n'est donc pas possible d'y répondre de manière générale, du moins sans introduire d'apriori supplémentaire sur la distribution source.

5 Conclusion

L'objectif de cet article est essentiellement de montrer qu'une solution théorique existe au problème de la reconstruction d'une distribution source à partir de mesures séquentielles et en présence de références insuffisantes et/ou de mauvaise qualité. Le principe de la méthode fonctionne sous l'hypothèse d'un champ acoustique stationnaire qui peut être représenté par un nombre réduit de sources virtuelles. Il s'agit d'une méthode à base de modèle puisque la distribution source recherchée est indirectement utilisée pour combler les données manquantes ou corriger les données bruitées dans un algorithme itératif. Une étape délicate de l'algorithme proposé est l'estimation des matrices de covariance du bruit, d'autant plus que celles-ci jouent un rôle régularisant important. A ce stade, d'autres informations apriori peuvent facilement être injectées afin de gagner en robustesse.

Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein du Labex CeLyA de l'Université de Lyon, géré par l'Agence Nationale de la Recherche (ANR-10-LABX-0060/ ANR-11-IDEX-0007).

Références

[1] S. M. Price, R. J. Bernhard, Virtual coherence: A digital signal processing technique for incoherent source identication, in: Proceedings of the 4th International Modal Analysis Conference, Los Angeles, CA, USA, 1986, pp. 1256-1262.

[2] K.-U. Nam, Y.-H. Kim, Visualization of multiple incoherent sources by the backward prediction of near-

field acoustic holography, The Journal of the Acoustical Society of America 109 (2001) 1808-1816.

[3] Q. Leclere. Acoustic imaging using underdetermined inverse approaches : Frequency limitations and optimal regularization. *Journal of Sound and Vibration*, 321 :605–619, 2009.

[4] Q. Leclère, Multi-channel spectral analysis of multi-pass acquisition measurements, Mechanical Systems and Signal Processing 23 (2009) 1415-1422.

[5] Y.-J. Kim, J. S. Bolton, H.-S. Kwon, Partial sound field decomposition in multireference near-field acoustical holography by using optimally located virtual references, The Journal of the Acoustical Society of America 115 (2004) 1641{1652.

[6] J. Idier. Approche bayésienne pour les problèmes inverses, Traité IC2, Série traitement du signal et de limage. 2001.

[7] J. Antoni, "Focalisation bayésienne: une approche unifiée du problème inverse en acoustique", CFA2010, 10eme Congres Français d'Acoustique - 12-16 Avril 2010 - Lyon, France.

[8] J. Antoni. A bayesian approach to sound source reconstruction : Optimal basis, regularization, and focusing. *Journal of the Acoustical Society of America*, 131(4) :2873–2890, 2012.

[9] J. Antoni, Full-field reconstruction from scanned measurements without references: the latent variable approach, ACOUSTICS2012, Nantes, France, 23-27 april 2012

[10] R. Neal, G. E. Hinton, A view of the em algorithm that justies incremental, sparse, and other variants, in: Learning in Graphical Models, Kluwer Academic Publishers, 1998, pp. 355-368.