



Modélisation numérique des ondes poroélastiques transitoires : le modèle de Biot-JKD avec dérivées fractionnaires

B. Lombard^a, G. Chiavassa^b et E. Blanc^a

^aCNRS, Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, 31 chemin Joseph Aiguier, 13402 Marseille, France

^bEcole Centrale Marseille et M2P2, 38 rue Joliot-Curie, 13451 Marseille, France

lombard@lma.cnrs-mrs.fr

On développe une modélisation numérique des équations de Biot anisotropes dans le domaine temporel. La dissipation visqueuse à l'intérieur des pores est décrite par le modèle de perméabilité dynamique développé par Johnson-Koplik-Dashen (JKD). Certains coefficients du modèle de Biot-JKD sont proportionnels à la racine carrée de la fréquence : dans le domaine temporel, cela introduit des dérivées fractionnaires décalées d'ordre 1/2, qui reviennent à un produit de convolution. Celui-ci est remplacé par un nombre fini de variables de mémoire qui satisfont des équations différentielles locales en temps. Les coefficients de quadrature sont déterminés par une optimisation non linéaire sur la bande de fréquence d'intérêt. Les propriétés mathématiques du système obtenu sont analysées. Un ensemble d'outils actuels de calcul scientifique sont alors rassemblés au sein d'un code 2D : splitting, schéma d'ordre élevé, méthode d'interface immergée pour discrétiser des milieux hétérogènes. Les algorithmes sont validés par des comparaisons avec des solutions analytiques. Des expériences numériques de propagation en milieu complexe sont alors proposées, notamment la diffusion multiple d'ondes poroélastiques à travers un ensemble aléatoire de diffuseurs poroélastiques.

1 Introduction

Le modèle de Biot est largement utilisé pour décrire la propagation d'ondes dans un milieu poroélastique à squelette déformable [1, 2]. Dans les années 90, de nombreuses méthodes numériques ont été développées pour simuler les ondes poroélastiques en régime basse-fréquence et en milieu isotrope [10, 11]. Pour aller plus loin dans le réalisme des simulations, deux améliorations doivent être apportées. D'une part, de nombreux milieux (roches, os) sont anisotropes [16]. D'autre part, l'atténuation en régime haute-fréquence dépend de la racine carrée de la fréquence [14], introduisant des dérivées fractionnaires en temps. Le but de ce travail est de proposer une méthode numérique temporelle efficace pour simuler des milieux isotropes transverses en régime haute-fréquence.

La principale difficulté concerne la discrétisation efficace des dérivées fractionnaires, qui nécessitent de stocker le passé de la solution. Pour éviter cela, on adapte une technique de *représentation diffusive* [19, 12]. Le problème non-local en temps est alors remplacé par un ensemble de problèmes locaux satisfaits par des variables de mémoire. L'efficacité de cette approche repose en grande partie sur la détermination des poids et fréquences de relaxation. Par rapport à nos travaux antérieurs [4, 5], nous proposons ici une amélioration importante, basée sur une optimisation non linéaire avec contrainte.

Dans cet article, nous présentons tout d'abord les modèles physiques employés (Biot isotrope transverse, et atténuation JKD). Nous détaillons ensuite la représentation diffusive des dérivées fractionnaires, les équations d'évolution locales qui en découlent, ainsi que les propriétés des solutions. Les outils numériques sont introduits : splitting, schéma d'ordre élevé sur grille cartésienne, méthode d'interface immergée pour discrétiser les interfaces. Enfin, des expériences numériques montrent l'utilité de cette approche pour traiter des situations complexes de propagation d'ondes en milieu poreux.

2 Modélisation physique

2.1 Modèle de Biot

On considère un milieu poroélastique isotrope transverse, constitué d'une matrice solide saturée par un fluide circulant librement à travers les pores [1, 6, 8]. Les indices 1, 3 représentent les axes x , z , où z est l'axe de symétrie. Le modèle de Biot met en jeu 15 paramètres physiques : la masse volumique ρ_f , la viscosité dynamique η et le module

de compressibilité K_f du fluide, la masse volumique ρ_s et le module de compressibilité K_s des grains, la porosité $0 \leq \phi \leq 1$, les tortuosités $\mathcal{T}_1 \geq 1$, $\mathcal{T}_3 \geq 1$, les perméabilités absolues à fréquence nulle κ_1 , κ_3 , et la matrice symétrique définie positive d'élasticité de la matrice sèche \mathbf{C}

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{13} & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11} - c_{12}}{2} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

La frontière entre le régime basse-fréquence (BF) et haute-fréquence (H-F) est atteint aux fréquences de transition

$$f_{ci} = \frac{\eta \phi}{2\pi \mathcal{T}_i \kappa_i \rho_f} = \frac{\omega_{ci}}{2\pi}, \quad i = 1, 3. \quad (2)$$

En notant \mathbf{u}_s et \mathbf{u}_f les déplacements solide et fluide, les inconnues sont la vitesse solide $\mathbf{v}_s = \frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t}$, la vitesse de filtration $\mathbf{w} = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \phi (\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_s)$, le tenseur de contraintes $\underline{\sigma}$ et la pression acoustique p . Le tenseur des déformations $\underline{\varepsilon}$ s'écrit

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}_s + \nabla \mathbf{u}_s^T). \quad (3)$$

En utilisant la notation de Voigt, les tenseurs de contrainte et déformation s'écrivent

$$\begin{cases} \underline{\sigma} = (\sigma_{11}, \sigma_{33}, \sigma_{13})^T, \\ \underline{\varepsilon} = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{13})^T. \end{cases} \quad (4)$$

En posant

$$\begin{cases} \xi = -\nabla \cdot \mathbf{W}, \mathbf{C}^u = \mathbf{C} + m \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\beta}^T, \boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_1, \beta_3)^T, & (5a) \\ \beta_1 = 1 - \frac{c_{11} + c_{12} + c_{13}}{3K_s}, \quad \beta_3 = 1 - \frac{2c_{13} + c_{33}}{3K_s}, & (5b) \\ K = K_s (1 + \phi (K_s/K_f - 1)), & (5c) \\ m = \frac{K_s^2}{K - (2c_{11} + c_{33} + 2c_{12} + 4c_{13})/9}, & (5d) \end{cases}$$

où \mathbf{C}^u est le tenseur élastique de la matrice saturée, et ξ est la variation de teneur en fluide, la loi de comportement poroélastique s'écrit

$$\begin{cases} \underline{\sigma} = \mathbf{C}^u \underline{\varepsilon} - m \boldsymbol{\beta} \xi, & (6a) \\ p = m (\xi - \boldsymbol{\beta}^T \underline{\varepsilon}). & (6b) \end{cases}$$

En utilisant (5a) et (5b), on obtient

$$\begin{cases} \underline{\sigma} = \mathbf{C} \underline{\varepsilon} - \boldsymbol{\beta} p, \\ p = m (\xi - \boldsymbol{\beta}^T \underline{\varepsilon}). \end{cases} \quad (7)$$

En introduisant les masses volumiques

$$\rho = \phi \rho_f + (1 - \phi) \rho_s, \quad \rho_{wi} = \frac{\mathcal{T}_i}{\phi} \rho_f, \quad i = 1, 3, \quad (8)$$

le principe fondamental de la dynamique conduit à

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \rho_f \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}, & (9a) \\ \rho_f \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \text{diag}(\rho_{wi}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \text{diag}\left(\frac{\eta}{\kappa_i} F_i(t)\right) * \mathbf{w} = -\nabla p, & (9b) \end{cases}$$

où $\text{diag}(d_i)$ représente la matrice diagonale 2×2 $\begin{pmatrix} d_i & 0 \\ 0 & d_i \end{pmatrix}$, * est le produit de convolution en temps, et $F_i(t)$ sont les opérateurs viscodynamiques.

2.2 Modèle JKD

En HF, les effets de viscosité sont localisés dans une couche-limite de Prandtl à la surface des pores, dont l'épaisseur est proportionnelle à la racine carrée de la fréquence. En 1987, une expression générale de l'opérateur viscodynamique a été proposée par Johnson, Koplik and Dashen pour un réseau aléatoire de pores d'épaisseur constante [14]. L'expression proposée est la fonction la plus simple permettant de retrouver les comportements BF et HF et conduisant à un modèle causal. Le seul paramètre nouveau est la longueur caractéristique visqueuse Λ_i . On note

$$P_i = \frac{4 \mathcal{T}_i \kappa_i}{\phi \Lambda_i^2}, \quad \Omega_i = \frac{\omega c_i}{P_i} = \frac{\eta \phi^2 \Lambda_i^2}{4 \mathcal{T}_i^2 \kappa_i^2 \rho_f}, \quad i = 1, 3, \quad (10)$$

où P_i est le nombre de Pride (typiquement $P_i \approx 1/2$). A partir de transformées de Fourier en temps $\widehat{F}_i(\omega) = \mathcal{F}(F_i(t)) = \int_{\mathbb{R}} F_i(t) e^{-j\omega t} dt$, l'opérateur JKD s'écrit

$$\widehat{F}_i^{JKD}(\omega) = \left(1 + j\omega \frac{4 \mathcal{T}_i^2 \kappa_i^2 \rho_f}{\eta \Lambda_i^2 \phi^2}\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{\Omega_i}} (\Omega_i + j\omega)^{1/2}. \quad (11)$$

Les termes $F_i(t) * w_i(x, z, t)$ dans (6b) s'écrivent alors

$$\begin{aligned} F_i^{JKD}(t) * w_i(x, z, t) &= \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{\Omega_i}} (\Omega_i + j\omega)^{1/2} \widehat{w}_i(x, z, \omega) \right), \\ &= \frac{1}{\sqrt{\Omega_i}} (D + \Omega_i)^{1/2} w_i(x, z, t), \end{aligned} \quad (12)$$

où $D^{1/2}$ est une dérivée fractionnaire en temps d'ordre 1/2, généralisant la dérivée usuelle caractérisée par $\frac{\partial w_i}{\partial t} = \mathcal{F}^{-1}(j\omega \widehat{w}_i)$.

3 Modèle de Biot-DA

3.1 Approximation diffusive

Les dérivées fractionnaires décalées dans (12) s'écrivent

$$(D + \Omega_i)^{1/2} w_i(., t) = \int_0^t \frac{e^{-\Omega_i(t-\tau)}}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \left(\frac{\partial w_i}{\partial t}(., \tau) + \Omega_i w_i(., \tau) \right) d\tau. \quad (13)$$

A partir de la fonction Gamma d'Euler, la représentation diffusive de la fonction *totalelement monotone* $\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$ est [19]

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\theta}} e^{-\theta t} d\theta. \quad (14)$$

En injectant (14) dans (13), on obtient

$$(D + \Omega_i)^{1/2} w_i(0, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\theta}} \psi_i(., \theta, t) d\theta, \quad (15)$$

où les variables de mémoire sont définies par

$$\psi_i(., \theta, t) = \int_0^t e^{-(\theta + \Omega_i)(t-\tau)} \left(\frac{\partial w_i}{\partial t}(., \tau) + \Omega_i w_i(., \tau) \right) d\tau. \quad (16)$$

De (16), il découle que les ψ_i satisfont l'équation différentielle

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t} = -(\theta + \Omega_i) \psi_i + \frac{\partial w_i}{\partial t} + \Omega_i w_i. \quad (17)$$

Ainsi, la représentation diffusive transforme un problème non-local (13) en un continuum de problèmes locaux (15). On approche alors ce dernier par une formule de quadrature sur N points, de poids a_ℓ^i et abscisses θ_ℓ^i ($i = 1, 3$):

$$(D + \Omega_i)^{1/2} w_i(., t) \approx \sum_{\ell=1}^N a_\ell^i \psi^i(., \theta_\ell^i, t) \equiv \sum_{\ell=1}^N a_\ell^i \psi_\ell^i(., t). \quad (18)$$

A partir de (17), les $2N$ variables de mémoire ψ_ℓ^i satisfont

$$\frac{\partial \psi_\ell^i}{\partial t} = -(\theta_\ell^i + \Omega_i) \psi_\ell^i + \frac{\partial w_i}{\partial t} + \Omega_i w_i. \quad (19)$$

3.2 Système du premier ordre

On remplace les dérivées fractionnaires découlant dans (9b) et (12) par leur approximation diffusive (18). Après quelques manipulations algébriques, on obtient le modèle de Biot-DA (pour "Diffusive Approximation")

$$\begin{cases} \frac{\partial v_{s1}}{\partial t} - \frac{\rho_{w1}}{\chi_1} \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z} \right) - \frac{\rho_f}{\chi_1} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\rho_f}{\rho} \gamma_1 \sum_{\ell=1}^N a_\ell^1 \psi_\ell^1, \\ \frac{\partial v_{s3}}{\partial t} - \frac{\rho_{w3}}{\chi_3} \left(\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} \right) - \frac{\rho_f}{\chi_3} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\rho_f}{\rho} \gamma_3 \sum_{\ell=1}^N a_\ell^3 \psi_\ell^3, \\ \frac{\partial w_1}{\partial t} + \frac{\rho_f}{\chi_1} \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z} \right) + \frac{\rho}{\chi_1} \frac{\partial p}{\partial x} = -\gamma_1 \sum_{\ell=1}^N a_\ell^1 \psi_\ell^1, \\ \frac{\partial w_3}{\partial t} + \frac{\rho_f}{\chi_3} \left(\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} \right) + \frac{\rho}{\chi_3} \frac{\partial p}{\partial z} = -\gamma_3 \sum_{\ell=1}^N a_\ell^3 \psi_\ell^3, \\ \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial t} - c_{11}^u \frac{\partial v_{s1}}{\partial x} - c_{13}^u \frac{\partial v_{s3}}{\partial z} - m\beta_1 \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_3}{\partial z} \right) = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial t} - c_{55}^u \left(\frac{\partial v_{s3}}{\partial x} + \frac{\partial v_{s1}}{\partial z} \right) = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial t} - c_{13}^u \frac{\partial v_{s1}}{\partial x} - c_{33}^u \frac{\partial v_{s3}}{\partial z} - m\beta_3 \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_3}{\partial z} \right) = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + m \left(\beta_1 \frac{\partial v_{s1}}{\partial x} + \beta_3 \frac{\partial v_{s3}}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_3}{\partial z} \right) = 0, \\ \frac{\partial \psi_j^1}{\partial t} + \frac{\rho_f}{\chi_1} \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z} \right) + \frac{\rho}{\chi_1} \frac{\partial p}{\partial x} \\ = \Omega_1 w_1 - \gamma_1 \sum_{\ell=1}^N a_\ell^1 \psi_\ell^1 - (\theta_j^1 + \Omega_1) \psi_j^1, \\ \frac{\partial \psi_j^3}{\partial t} + \frac{\rho_f}{\chi_3} \left(\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} \right) + \frac{\rho}{\chi_3} \frac{\partial p}{\partial z} \\ = \Omega_3 w_3 - \gamma_3 \sum_{\ell=1}^N a_\ell^3 \psi_\ell^3 - (\theta_j^3 + \Omega_3) \psi_j^3. \end{cases} \quad (20)$$

Le système (20) peut s'écrire sous forme compacte

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z} = -\mathbf{S} \mathbf{U}, \quad (21)$$

où \mathbf{A} et \mathbf{B} sont des matrices de propagation $(2N + 8) \times (2N + 8)$, et \mathbf{S} est une matrice de diffusion. Une analyse de Fourier de (20) montre que le modèle de Biot-DA revient au système de Biot-JKD d'origine en prenant comme correction fréquentielle

$$\widehat{F}_i^{DA}(\omega) = \frac{\Omega_i + j\omega}{\sqrt{\Omega_i}} \sum_{\ell=1}^N \frac{a_\ell^i}{\theta_\ell^i + \Omega_i + j\omega}. \quad (22)$$

4 Modélisation numérique

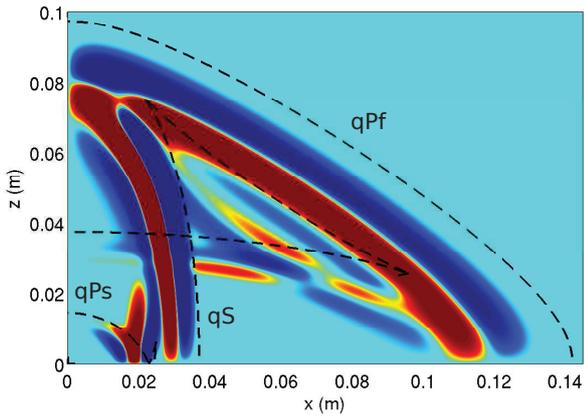
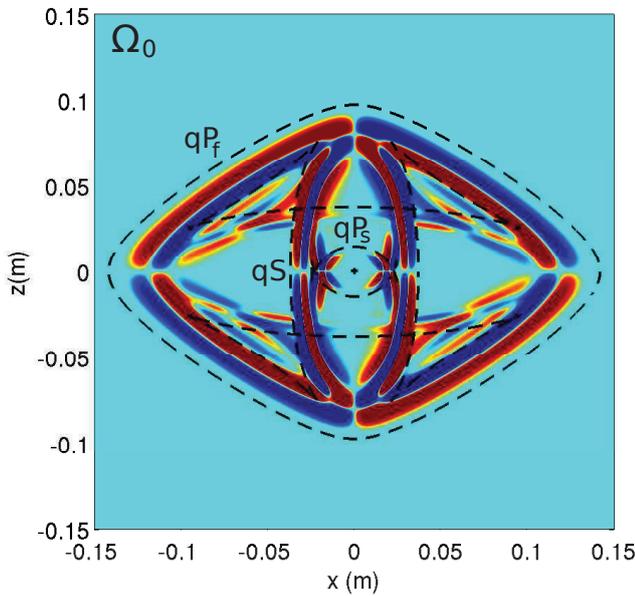


FIGURE 1 – Pression émise par un point source au centre du domaine. Ondes de quasi-compression rapide et lente (qP_f et qP_s), et de quasi-cisaillement (qS).

4.1 Coefficients de quadrature

Nous déterminons ici les coefficients θ_ℓ et a_ℓ de l'approximation diffuse. Pour cela, on approche $\widehat{F}^{JKD}(\omega)$ par $\widehat{F}^{DA}(\omega)$ (22) sur une bande de fréquence $I = [\omega_{\min}, \omega_{\max}]$

centrée sur la fréquence centrale de la source. Cela conduit à minimiser χ^2 par rapport aux points θ_ℓ et poids a_ℓ

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^K \left| \frac{\widehat{F}^{DA}(\omega_k)}{\widehat{F}^{JKD}(\omega_k)} - 1 \right|^2 = \sum_{k=1}^K \left| \sum_{\ell=1}^N a_\ell \frac{(\Omega + j\omega_k)^{1/2}}{\theta_\ell + \Omega + j\omega_k} - 1 \right|^2, \quad (23)$$

où les pulsations ω_k sont distribuées linéairement sur une échelle logarithmique de K points

$$\omega_k = \omega_{\min} \left(\frac{\omega_{\max}}{\omega_{\min}} \right)^{\frac{k-1}{K-1}}, \quad k = 1 \dots K. \quad (24)$$

Dans [4, 5], les abscisses θ_ℓ étaient distribuées linéairement sur une échelle logarithmique, comme (24). Seuls les poids a_ℓ étaient optimisés par moindres-carrés linéaires (23). Certains poids négatifs étaient obtenus, ce qui pose des problèmes de stabilité du modèle de Biot-DA.

Pour éliminer ce problème et améliorer la détermination des coefficients de quadrature, une optimisation non linéaire avec contrainte de positivité est mise en oeuvre. Une contrainte supplémentaire $\theta_\ell \leq \theta_{\max}$ est aussi introduite pour la stabilité de la méthode. En posant

$$\theta_\ell = (\theta'_\ell)^2, \quad a_\ell = (a'_\ell)^2, \quad (25)$$

le nombre de contraintes diminue de $3N$ à N , conduisant au problème de minimisation :

$$\min_{(\theta'_\ell, a'_\ell)} \chi^2, \quad \theta'_\ell \leq \sqrt{\theta_{\max}}. \quad (26)$$

Ce problème est non linéaire et non quadratique en θ'_ℓ . On le résout avec le programme SolvOpt, basé sur l'algorithme de Shor [22]. En pratique, nous utilisons

$$\omega_{\min} = \omega_0/10, \quad \omega_{\max} = 10\omega_0, \quad \theta_{\max} = 100\omega_0, \quad K = 2N, \quad (27)$$

où $\omega_0 = 2\pi f_0$ est la fréquence centrale de la source.

4.2 Schéma numérique

Pour intégrer (21), on introduit une grille uniforme de pas d'espace Δx , Δz et de temps Δt . L'approximation de $\mathbf{U}(x_i = i\Delta x, z_j = j\Delta z, t_n = n\Delta t)$ est notée \mathbf{U}_{ij}^n , avec $0 \leq i \leq N_x$, $0 \leq j \leq N_z$. Une discrétisation directe de (21) par un schéma explicite conduit à une condition de stabilité

$$\Delta t \leq \min \left(\Upsilon \frac{\Delta x}{\max_{\varphi \in [0, \pi/2]} c_{pf}^\infty(\varphi)}, \frac{2}{R(\mathbf{S})} \right), \quad (28)$$

où $\Upsilon > 0$ dépend du schéma considéré et $R(\mathbf{S})$ est le rayon spectral de \mathbf{S} , ce qui s'avère pénalisant. On suit ici une approche, basée sur le *Strang splitting* d'ordre 2 [17]. On découpe le système d'origine (21) en une partie propagative

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z} = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{H}_p) \quad (29)$$

et une partie diffusive

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\mathbf{S} \mathbf{U} + \mathbf{G}, \quad (\mathbf{H}_d) \quad (30)$$

où \mathbf{H}_p et \mathbf{H}_d sont les opérateurs discrets de chaque partie. On résout alors alternativement ces deux parties :

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{H}_d \left(t_{n+1}, \frac{\Delta t}{2} \right) \circ \mathbf{H}_p(\Delta t) \circ \mathbf{H}_d \left(t_n, \frac{\Delta t}{2} \right) \mathbf{U}^n. \quad (31)$$

L'opérateur discret \mathbf{H}_p (29) est un schéma ADER d'ordre 4 en temps et en espace, avec $\Upsilon = 1$. L'opérateur discret \mathbf{H}_d est

$$\mathbf{H}_d\left(t_k, \frac{\Delta t}{2}\right) \mathbf{U}(t_0) \simeq e^{-S \frac{\Delta t}{2}} \mathbf{U}(t_0) - (\mathbf{I} - e^{-S \frac{\Delta t}{2}}) \mathbf{S}^{-1} \mathbf{G}(t_k), \quad (32)$$

avec $k = n$ ou $n + 1$, et est inconditionnellement stable. Le schéma (31) est d'ordre 2, et stable sous la condition CFL

$$\Delta t = \Upsilon \frac{\Delta x}{\max_{\varphi \in [0, \pi/2]} c_{P_f}^{\infty}(\varphi)}, \quad \Upsilon \leq 1, \quad (33)$$

indépendamment des coefficients de l'approximation diffusive.

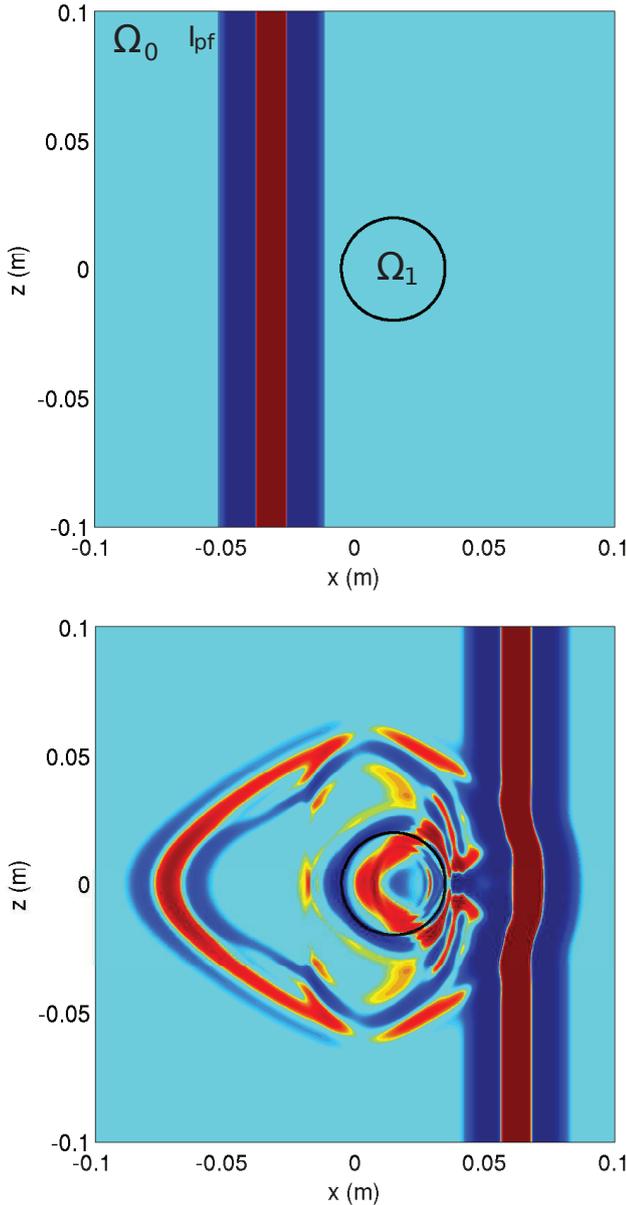


FIGURE 2 – Interaction d'une onde plane avec un cylindre. Pression à l'initialisation (haut) et après propagation (bas).

La discrétisation des interfaces nécessite un soin particulier. Sur une grille cartésienne, les interfaces sont représentées par des "marchés d'escalier", qui conduisent à des diffractions parasites. De plus, les conditions de saut ne sont pas prises en compte par le schéma numérique.

Pour éliminer ces défauts et maintenir l'efficacité d'une grille cartésienne, on implémente une *méthode d'interface immergée* [10, 11].

5 Résultats

5.1 Milieu homogène

On considère un milieu homogène de couches d'époxy et de verre. $N = 3$ variables diffusives sont utilisées pour représenter les dérivées fractionnaires. Un point source au centre du domaine émet un Ricker de fréquence centrale $f_0 = 200$ kHz, générant trois ondes : des ondes de quasi-compression rapide et lente et une onde de quasi-cisaillement, notées respectivement qP_f , qP_s and qS . La figure 1 représente la pression simulée, ainsi que les fronts d'onde théoriques découlant d'une analyse de dispersion.

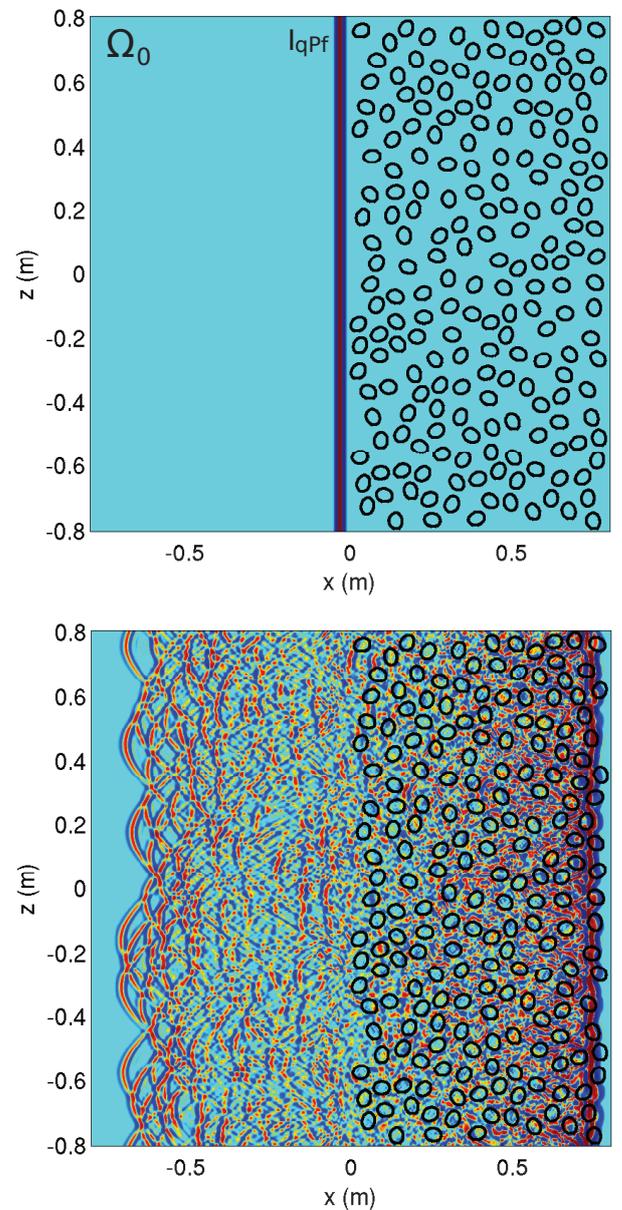


FIGURE 3 – Diffusion multiple à travers 200 diffuseurs elliptiques. Pression à l'initialisation (haut) et après propagation (bas)

5.2 Diffraction par un cylindre

En figure 2, on représente l'interaction d'une onde plane dans l'époxy avec un cylindre rempli de grès saturé d'eau. La méthode d'interface immergée permet de représenter précisément la géométrie de l'interface circulaire sur une grille cartésienne : aucune diffraction parasite n'est observé. La forme de l'onde réfléchi illustre l'anisotropie du milieu extérieur.

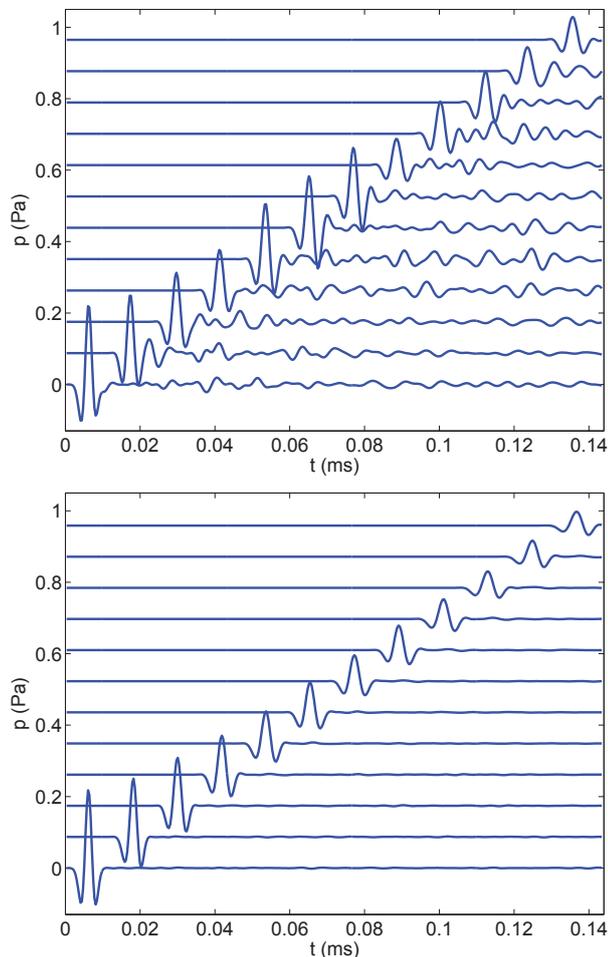


FIGURE 4 – Pression de l'onde qP_s , enregistrée avant (haut) et après (bas) sommation.

5.3 Diffusion multiple en milieu aléatoire

Pour illustrer l'intérêt de la méthode numérique proposée, on considère un domaine dans lequel sont distribués aléatoirement 200 diffuseurs elliptiques, conduisant à une concentration surfacique de 25 %. La pression est représentée en figure 3 à différents instants.

Un réseau uniforme de $N_l = 800$ lignes et $N_c = 25$ colonnes de récepteurs enregistre les champs simulés à chaque instant. Le champ U_{ij}^n enregistré le long d'une ligne de récepteurs est représenté en figure 4. On observe une onde balistique, suivie d'une coda. En sommant les sismogrammes, on obtient des estimations du champ cohérent dans la direction x :

$$\bar{U}_i^n = \frac{1}{N_l} \sum_{j=0}^{N_l-1} U_{ij}^n. \quad (34)$$

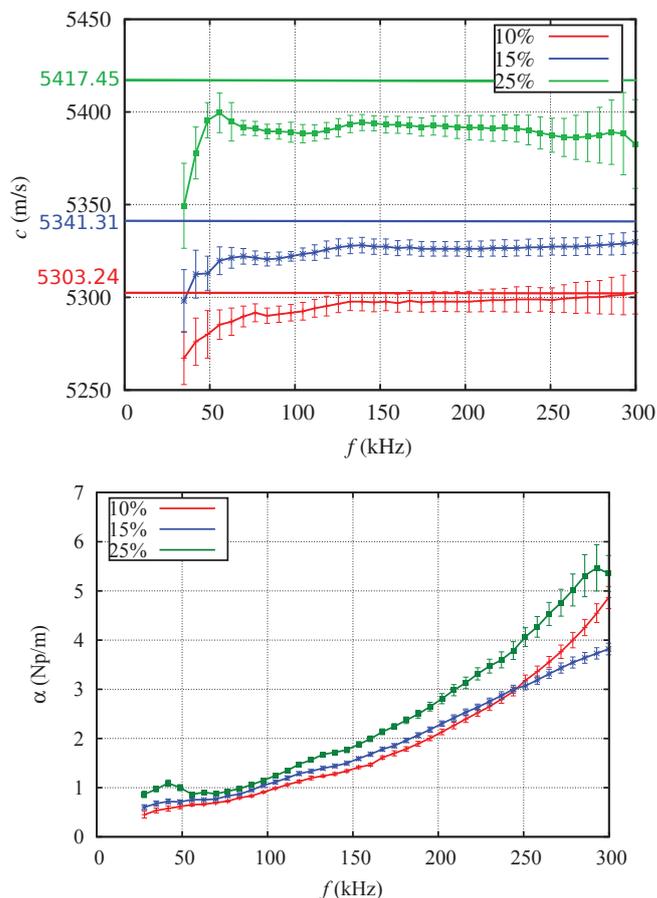


FIGURE 5 – Vitesse de phase effective (haut) et atténuation effective (bas), pour différentes concentrations de diffuseurs. Les droites verticales représentent les barres d'erreur. Les droites horizontales (haut) représentent la moyenne pondérée des vitesses dans les milieux Ω_0 et Ω_1 .

Sur les sismogrammes cohérents ainsi obtenus, représentés en figure 4, la coda a disparu et l'onde cohérente est renforcée. En figure 5, on représente la vitesse de phase et l'atténuation cohérentes qui en découlent.

6 Conclusion

On propose ici deux applications / généralisations de l'approche numérique développée au cours de cet article.

De nombreuses méthodes analytiques de diffusion multiple ont été développées pour déterminer les propriétés effectives d'un milieu aléatoire (Watermann-Truell, ISA, ...) . Le principal défaut de ces approches probabilistes est leur domaine de validité, restreint à de faibles concentrations des diffuseurs (typiquement inférieures à 10 %). Les méthodes de simulation numérique que nous avons présentées ici permettent d'envisager une caractérisation purement numérique du nombre d'onde effectif en milieu poroélastique. En adaptant la méthodologie mise au point pour des milieux élastiques [9], il pourra être possible de qualifier la précision de méthodes analytiques telles que celle proposée dans [18].

Par ailleurs, la théorie de Biot est très efficace pour prédire la propagation d'ondes dans des milieux poreux avec des micro-structures de géométrie simple. Des développements théoriques récents ont porté sur

des géométries plus complexes, par exemple fractales [21]. Les modèles obtenus mettent en jeu, en plus de la dispersion temporelle, une dispersion spatiale. Cela revient à introduire des dérivées fractionnaires en espace. L'approche diffusive présentée ici constitue une piste pour simuler ces phénomènes.

Références

- [1] M. A. Biot, Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I : Low-frequency range, *J. Acoust. Soc. Am.*, **28-2**, 168–178 (1956).
- [2] M. A. Biot, Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II : High-583 frequency range, *J. Acoust. Soc. Am.*, **28-2**, 179–191 (1956).
- [3] C. Birk, C. Song, An improved non-classical method for the solution of fractional differential equations, *Comput. Mech.*, **46**, 721-734 (2010).
- [4] E. Blanc, G. Chiavassa, B. Lombard, Biot-JKD model : simulation of 1D transient poroelastic waves with fractional derivatives, *J. Comput. Phys.*, **237**, 1-20 (2013).
- [5] E. Blanc, G. Chiavassa, B. Lombard, A time-domain numerical modeling of two-dimensional wave propagation in porous media with frequency-dependent dynamic permeability, *J. Acoust. Soc. Am.*, **134-6**, 4610–4623 (2013).
- [6] T. Bourbié, O. Coussy, B. Zinszner, *Acoustics of Porous Media*, Gulf Publishing Company, Houston (1987).
- [7] J. M. Carcione, Wave propagation in anisotropic, saturated porous media : Plane-wave theory and numerical simulation, *J. Acoust. Soc. Am.*, **99-5**, 2655–2666 (1996).
- [8] J. M. Carcione, *Wave Fields in real Media : Wave Propagation in Anisotropic, Anelastic, Porous and Electromagnetic Media*, 2nd Edition, Elsevier, Amsterdam (2007).
- [9] M. Chekroun, L. Le Marrec, B. Lombard, J. Piraux, Time-domain numerical simulations of multiple scattering to extract elastic effective wavenumbers, *Waves Random Complex Media*, **22**, 398–422 (2012).
- [10] G. Chiavassa, B. Lombard, Time domain numerical modeling of wave propagation in 2D heterogeneous porous media, *J. Comput. Phys.*, **230**, 5288–5309 (2011).
- [11] G. Chiavassa, B. Lombard, Wave propagation across acoustic / Biot's media : a finite-difference method, *Commun. Comput. Phys.*, **13-4**, 985–1012 (2013).
- [12] H. Haddar, J. R. Li, D. Matignon, Efficient solution of a wave equation with fractional-order dissipative terms, *J. Comput. Appl. Math.*, **234-6**, 2003–2010 (2010).
- [13] A. Hanyga, J. F. Lu, Wave field simulation for heterogeneous transversely isotropic porous media with the JKD dynamic permeability, *Comput. Mech.*, **36**, 196–208 (2005).
- [14] D. L. Johnson, J. Koplik, R. Dashen, Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media, *J. Fluid Mech.*, **176**, 379–402 (1987).
- [15] D. Lafarge, P. Lemarinier, J. F. Allard, V. Tarnow, Dynamic compressibility of air in porous structures at audible frequencies, *J. Acoust. Soc. Am.*, **102-4**, 1995–2005 (1997).
- [16] G. I. Lemoine, M. Y. Ou, R. J. LeVeque, High-resolution finite volume modeling of wave propagation in orthotropic poroelastic media, *SIAM J. Sci. Comput.*, **35-1**, B176–B206 (2013).
- [17] R. J. LeVeque, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge University Press, Cambridge (2002).
- [18] F. Luppé, J. M. Conoir, S. Robert, Coherent waves in a multiply scattering poro-elastic medium obeying Biot's theory, *Waves Random Complex Media*, **18**, 241–254 (2008).
- [19] D. Matignon, *An introduction to fractional calculus, Scaling, Fractals and Wavelets* (Digital Signal and Image Processing Series), ISTE-Wiley (2008).
- [20] G. A. McMechan, M. J. Yedlin, Analysis of dispersive waves by wave field transformation, *Geophysics*, **46-6**, 869–874 (1981).
- [21] N. Nemati, *Macroscopic theory of sound propagation in rigid-framed porous materials allowing for spatial dispersion : principle and validation*, Ph.D. thesis, Université du Maine, France (2012).
- [22] A. Rekić, R. Brenner, Optimization of the collocation inversion method for the linear viscoelastic homogenization, *Mech. Res. Comm.*, **38**, 305-308 (2011).