



Outils Statistiques pour l'Amélioration de Systèmes d'Imagerie par Diffraction

M. Diong^a, P. Lasaygues^a, A. Roueff^b et A. Litman^b

^aAix Marseille Université, LMA, LMA - CNRS, 31 chemin Joseph-Aiguier, 13402 Marseille Cedex 20, France

^bAix Marseille Université, Institut Fresnel de Marseille, Campus Universitaire de Saint Jérôme Avenue Escadrille Normandie, 13397 Marseille, France
diong@lma.cnrs-mrs.fr

Dans cet article, nous avons étudié la Borne de Cramér-Rao pour évaluer les performances de reconstruction en imagerie par diffraction. Le problème considéré est l'imagerie par diffraction micro-onde ou acoustique d'un objet 2D cylindrique homogène isotrope. L'objectif général est d'évaluer la capacité de cette borne à rendre compte du comportement de l'erreur empirique de reconstruction dans ce contexte spécifique.

1 Introduction

L'un des enjeux majeurs pour les systèmes d'imagerie par diffraction acoustique ou micro-onde, est de déterminer le type de mesures nécessaires pour obtenir des performances et des résolutions satisfaisantes en reconstruction.

Une manière de répondre à ce problème est de quantifier la quantité d'information disponible dans les données de mesure au vu des paramètres physiques à reconstruire. A cet effet, l'erreur de reconstruction peut être directement utilisée comme étant une fonction décroissante de la quantité d'information disponible. Cependant, cette erreur dépend non seulement de l'algorithme d'imagerie utilisé mais aussi de l'objet à reconstruire. En outre, la prise en compte du caractère aléatoire des mesures implique l'utilisation de méthodes de simulation numérique telles que les méthodes Monte-Carlo pour calculer l'erreur. Ce qui, dans le contexte spécifique de l'imagerie par diffraction, est assez coûteux en termes de temps et de ressources de calcul.

Une seconde solution consiste à utiliser les bornes de performance d'estimation. Ces bornes sont très souvent employées en traitement statistique du signal ; elles permettent, en effet, d'analyser la précision optimale des estimations pour les différents modèles physiques considérés sans être influencé par le choix de la méthode d'estimation. Elles constituent donc une alternative intéressante pour l'optimisation du système d'imagerie en fonction de la classe d'objets considérés.

Dans le cadre de notre étude, nous allons introduire une borne de performance particulière, la borne de Cramér-Rao. Cette borne continue de faire l'objet de nombreuses études notamment pour la détection radar ([9]), pour la localisation de sources([4]) ou encore en optique([2]). Dans le domaine de l'imagerie par diffraction, elle a été employée pour établir des résolutions limites en imagerie micro-onde ([7], [8]) ou pour analyser les performances de reconstruction de paramètres de forme ([11], [12]).

La borne de Cramér-Rao (BCR) présente en effet plusieurs avantages :

- Il s'agit d'une borne minimale d'estimation pour les estimateurs sans biais ou asymptotiquement sans biais ;
- L'estimateur de Maximum de vraisemblance est asymptotiquement sans biais et atteint la BCR sous certaines conditions de régularité peu restrictives ;
- Son expression est relativement simple et le calcul souvent bien plus rapide que l'évaluation de l'erreur empirique ou d'autres bornes d'estimations.

Dans ce présent article, nous allons introduire la borne de Cramér-Rao pour l'étude d'un objet 2D cylindrique et homogène pour un dispositif de mesure circulaire (tomographie). La première partie est consacrée à l'écriture des équations de la diffraction et leur résolution par la méthode des séries de Bessel-Fourier. La seconde partie introduit les définitions et le calcul de la Borne de Cramér-

Rao à partir du modèle de diffraction. La troisième partie présente un exemple numérique suivi d'une discussion des résultats obtenus. Enfin, la dernière partie est consacrée à la conclusion et aux perspectives.

2 Modèle de diffraction

2.1 Description unifiée acoustique/micro-onde

Dans le cadre de notre étude, nous allons considérer un objet 2D (cylindre infini suivant un axe donné \mathbf{e}_z). Nous nous limitons au cas du champ harmonique u de pulsation fixée ω de la forme :

$$u(\mathbf{r}, t) = \text{Re}(u(\mathbf{r}, \omega) \exp(-i\omega t)) \quad (1)$$

En imagerie micro-onde en polarisation $\mathbf{E}_{//}$, le champ mesuré pour effectuer la reconstruction est le champ électrique :

$$\mathbf{E} = E_z \mathbf{e}_z \quad (2)$$

Ce champ est régi par une équation de propagation obtenue à partir des équations de Maxwell (cf. [3]) :

$$\Delta E_z + \omega^2 \mu \varepsilon E_z = i\omega J_z \quad (3)$$

complétée par des conditions limites aux différentes interfaces présentes dans le milieu étudié. La densité de courant $i\omega J_z$ est un terme source fixé par l'expérimentateur. Dans cette équation interviennent deux paramètres physiques qui, une fois reconstruits, caractérisent l'objet à imager :

- La permittivité diélectrique $\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)$ (Farad/m) ;
- La perméabilité magnétique $\mu(\mathbf{r}, \omega)$ (Henry/m).

En acoustique linéaire, une équation similaire peut être obtenue sous certaines réserves : si nous considérons un fluide simple lentement variable et sans pertes ; le champ de pression acoustique p_a est régi par l'équation suivante (cf.[5]) :

$$\Delta p_a + \rho_s \xi_s \omega^2 p_a = -\rho_s \nabla \cdot (\mathbf{f}) \quad (4)$$

avec

$$\xi_s = \frac{1}{\rho_s c_s^2}$$

Cette fois, les deux paramètres physiques qui caractérisent l'objet à imager sont :

- La densité volumique du fluide ρ (kg/m³)
- La célérité de l'onde acoustique c_s (m/s)

Dans les 2 cas, nous avons une équation du type :

$$\Delta u + k^2 u = S \quad (5)$$

avec

$$k^2 = \omega^2 \beta \alpha \quad (6)$$

α et β étant des paramètres physiques caractéristiques des milieux de propagation. Cette analogie ainsi exprimée entre les équations de l'acoustique et de l'électromagnétisme nous permet d'envisager une formalisation commune du problème de diffraction. Le tableau (1) détaille cette analogie :

Champ u	$p_a(\mathbf{r}, \omega)$	$E_z(\mathbf{r}, \omega)$
Paramètre α	$\xi_s(\mathbf{r}, \omega)$	$\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)$
Paramètre β	$\rho_s(\mathbf{r}, \omega)$	$\mu(\mathbf{r}, \omega)$

TABLEAU 1 – Analogie Acoustique-Micro-onde

Dans la suite de l'article, nous utilisons cette formalisation commune avec l'hypothèse supplémentaire que β est constant (milieu non magnétique en micro-onde ; milieu à célérité variable et à densité constante en acoustique). Ainsi, les milieux de propagation dans cet article sont entièrement caractérisés par α ou de manière équivalente par k^2 .

2.2 Équations de diffraction

Considérons un objet D homogène isotrope de frontière ∂D à symétrie cylindrique plongé dans un milieu ambiant D_{inc} imposé par l'expérimentateur. Ce milieu est supposé homogène et infini. Du fait de la symétrie cylindrique, nous avons un problème de diffraction 2D.

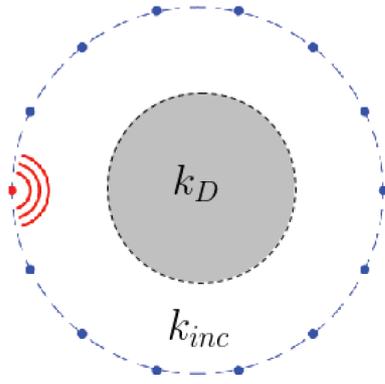


FIGURE 1 – Dispositif de mesure étudié ; en rouge une source, en bleu les récepteurs

L'objet D est caractérisé par un nombre d'onde k_D tandis que le milieu ambiant l'est par k_{inc} .

Soit S^i une source imposée par l'expérimentateur. Pour définir le problème de diffraction, nous allons considérer les notations suivantes :

- Le champ incident u^i en présence de la source ;
- Le champ total u^t en présence de la source et de l'objet ;
- Le champ diffracté par l'objet u^d ;

Nous avons par définition :

$$u^d(\mathbf{r}) = u^t(\mathbf{r}) - u^i(\mathbf{r}) \quad (7)$$

L'objet est caractérisé par un contraste complexe $\chi(\mathbf{r})$ défini par :

$$\chi(\mathbf{r}) = k_i^2(\mathbf{r}) - k_{inc}^2 \quad (8)$$

avec $k_i(\mathbf{r})$ défini par :

$$k_i(\mathbf{r}) = k_{inc} \quad ; \quad \text{pour } \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 \setminus D$$

$$k_i(\mathbf{r}) = k_D \quad ; \quad \text{pour } \mathbf{r} \in D$$

D étant un cylindre 2D homogène, $\chi(\mathbf{r})$ est paramétré par 2 variables : le rayon r_0 et le contraste χ_0 suivant la relation :

$$\chi(\mathbf{r}) = \chi_0 \cdot I_D(\mathbf{r} - r_0) \quad (9)$$

avec $\chi_0 = k_D^2 - k_i^2$ et $I_D(\mathbf{r} - r_0) = I_D(|\mathbf{r}| - r_0)$ la fonction d'appartenance au disque D . La caractérisation de l'objet se fait grâce à la mesure des champs diffractés. Elle nécessite une relation entre le champ u^d et χ . Nous allons maintenant établir cette relation. Le champ en l'absence d'objet u^i est caractérisé par l'équation suivante :

$$\Delta u^i(\mathbf{r}, \omega) + k_{inc}^2 u^i(\mathbf{r}, \omega) = S^i(\mathbf{r}, \omega) \quad (10)$$

à laquelle on adjoint une condition de (rayonnement infini) Sommerfeld 2D :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u^i(\mathbf{r}, \omega)}{\partial r} - ik_{inc}(\mathbf{r}, \omega) u^i(\mathbf{r}, \omega) \right) = 0 \quad (11)$$

Le champ total u^t est lui caractérisé par l'équation suivante :

$$\Delta u^t(\mathbf{r}) + k_i^2(\mathbf{r}) u^t(\mathbf{r}) = S^t(\mathbf{r}) \quad (12)$$

S^t est la résultante de la source S^i et de son interaction avec l'objet. Cette équation est complétée par les conditions limites à l'interface ∂D entre l'objet et le milieu ambiant. Dans le cadre de notre étude, ces conditions sont du type Dirichlet :

$$[u^t]_{int \rightarrow ext} = u_{int}^t - u_{ext}^t = 0 \quad (13)$$

et Neumann :

$$\left[\frac{\partial u^t}{\partial n} \right]_{int \rightarrow ext} = 0 \quad (14)$$

Nous allons faire l'hypothèse d'une absence de couplage entre l'objet et la source, i.e. $S^i = S^t$.

En soustrayant l'équation portant sur u^t et celle portant sur u^i , nous obtenons celle du champ diffracté u^d :

$$\Delta(u^d(\mathbf{r}, \omega)) + k_i^2(\mathbf{r}, \omega) u^d(\mathbf{r}, \omega) = -\chi(\mathbf{r}, \omega) u^i(\mathbf{r}, \omega) \quad (15)$$

Cette équation est complétée par les conditions de Neumann et Dirichlet à l'interface et par celle de Sommerfeld (rayonnement infini). La résolution de cette équation permet d'écrire une équation de mesure du champ diffracté du type :

$$u^d = f(\chi_0, r_0) \quad (16)$$

ou, de manière équivalente :

$$u^d = f(k_D, r_0) \quad (17)$$

2.3 Résolution par les décompositions de Bessel-Fourier

Pour l'objet cylindrique 2D homogène, il est possible d'obtenir une expression analytique du champ diffracté en utilisant les séries de Bessel-Fourier.

Les autres méthodes de résolution (Représentation de Green, Éléments finis, etc.) nécessitent une discrétisation du problème du fait de la non-linéarité du problème. Cette discrétisation peut potentiellement induire des problèmes numériques et des limitations pour le calcul de la borne de Cramér Rao que nous ne souhaitons pas traiter dans cet article.

La méthode Bessel-Fourier consiste à effectuer la décomposition en série de Fourier spatiale des champs

u^i , u^t et u^d , puis à utiliser les conditions de passage sur ∂D pour déterminer les coefficients.

Le champ total à l'intérieur de l'objet s'écrit dans la représentation en série de Fourier en coordonnées cylindriques (r, φ) :

$$u_{int}^t(r, \varphi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e_p^{t,int}(r) \exp(-ip\varphi) \quad (18)$$

À l'extérieur de l'objet :

$$u_{ext}^t(r, \varphi) = u_{ext}^d(r, \varphi) + u_{ext}^i(r, \varphi) \quad (19)$$

avec :

$$u_{ext}^d(r, \varphi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e_p^{diff}(r) \exp(-ip\varphi) \quad (20)$$

et

$$u_{ext}^i(r, \varphi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e_p^{inc}(r) \exp(-ip\varphi) \quad (21)$$

Ensuite, en utilisant le fait que u^i , u^t et u^d doivent vérifier respectivement les équations 10, 12 et 15. On peut montrer cela impose les contraintes suivantes sur les coefficients de Fourier des différents champs :

- e_p^{diff} vérifie une équation de Bessel avec une condition de Sommerfeld :

$$e_p^{diff} = \phi_p H_p^+(k_i r) \quad (22)$$

où H_p^+ est une fonction de Hankel d'ordre p .

- e_p^{inc} et $e_p^{t,int}$ vérifient chacun une équation de Bessel avec une condition de régularité à l'origine :

$$e_p^{inc} = \eta_p J_p(k_i r) \quad (23)$$

$$e_p^{t,int} = \psi_p J_p(k_D r) \quad (24)$$

η_p est calculé à partir de la source S^i . Dans notre problème, une source filaire est placée en \mathbf{r}_s :

$$S^i = 4i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) \quad (25)$$

Dans ce cas le champ incident s'écrit :

$$u_{ext}^i = H_0^+(k_i |\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|) \quad (26)$$

En utilisant la relation dite de Graf ([1]), on montre que

$$H_0^+(k_i |\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|) = \sum_{-\infty}^{+\infty} H_p^+(k_i r_s) \exp(ip\varphi_s) J_p(k_i r) \exp(-ip\varphi) \quad (27)$$

Par identification, nous obtenons :

$$\eta_p = H_p^+(k_i r_s) \exp(ip\varphi_s) \quad (28)$$

Ensuite en utilisant les relations de passage sur ∂D :

$$u_{int}^t(r_0, \varphi) = u_{ext}^t(r_0, \varphi) \quad (29)$$

et

$$\frac{\partial u_{int}^t}{\partial n}(r_0, \varphi) = \frac{\partial u_{ext}^t}{\partial n}(r_0, \varphi) \quad (30)$$

On en déduit les relations suivantes entre η_p , ϕ_p et ψ_p :

$$\eta_p J_p(k_i r_0) + \phi_p H_p^+(k_i r_0) = \psi_p J_p(k_D r_0) \quad (31)$$

et

$$k_i \eta_p J_p'(k_i r_0) + k_i \phi_p (H_p^+)'(k_i r_0) = k_D \psi_p J_p'(k_D r_0) \quad (32)$$

où J_p' désigne la dérivée de la fonction J_p . La résolution de ces équations linéaires nous permettent de calculer u_{ext}^d :

$$u_{ext}^d(r, \varphi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \phi_p H_p^+(k_i r) \exp(-ip\varphi) \quad (33)$$

avec

$$\phi_p = -\eta_p \frac{k_D J_p(k_i r_0) J_p'(k_D r_0) - k_i J_p'(k_i r_0) J_p(k_D r_0)}{k_D H_p^+(k_i r_0) J_p'(k_D r_0) - k_i (H_p^+)'(k_i r_0) J_p(k_D r_0)} \quad (34)$$

3 Calcul de la Borne de Cramér Rao

3.1 Erreur Quadratique Moyenne

La reconstruction des caractéristiques χ_0 et r_0 de l'objet s'effectue à l'aide de mesures collectées par le dispositif circulaire de mesures (cf. fig. 1). Posons :

$$\theta = [\chi_0, r_0] \quad (35)$$

Nous allons supposer que χ_0 est réel; l'extension au cas complexe s'effectue en considérant le vecteur $[Re(\chi_0), Im(\chi_0), r_0]$. Nous supposons que les récepteurs ne sont pas couplés entre eux et sont donc indépendants. Pour une source placée en \mathbf{r}_S et pour un récepteur placé en \mathbf{r}_R , Le champ mesuré suit le modèle statistique suivant :

$$u_{R,S}^{mes} = u_{R,S}^d(\theta) + \epsilon \quad (36)$$

avec $u_{R,S}^d$ le champ diffracté complexe pour le couple émetteur-récepteur $(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}_R)$ et ϵ le bruit supposé gaussien circulaire complexe :

$$\epsilon \sim CN(0, \sigma^2) \quad (37)$$

Soit $\hat{\theta}$ un estimateur des paramètres inconnus à partir des champs mesurés. On évalue l'erreur de reconstruction à l'aide de la matrice d'Erreur Quadratique Moyenne définie par l'espérance du carré de l'erreur :

$$EQM = E((\hat{\theta} - \theta)(\hat{\theta} - \theta)^H) \quad (38)$$

où

$$\theta^H = (\theta^*)^T$$

est le vecteur transposé-conjugué de θ . L'analyse de cette erreur peut être effectuée via sa décomposition biais-variance([10]) :

$$EQM = b_{\hat{\theta}} b_{\hat{\theta}}^H + var(\hat{\theta}) \quad (39)$$

où $b_{\hat{\theta}}$ est le biais ou espérance de l'erreur simple ($\hat{\theta} - \theta$) et $var(\hat{\theta})$ est la matrice de covariance de l'estimateur.

3.2 Borne de Cramér-Rao

Dans le cadre des estimateurs à biais nul ou asymptotiquement nul, l'Erreur Quadratique Moyenne (EQM) se réduit à la variance de l'estimateur et est bornée par une quantité nommée Borne de Cramér-Rao (BCR) :

$$[EQM]_{i,i} = \text{var}(\hat{\theta}_i) \geq [BCR]_{i,i} \quad (40)$$

où $[EQM]_{i,i}$ étant les termes diagonaux de la matrice EQM. La BCR est l'inverse de la matrice d'information de Fisher I_θ , qui est définie pour le modèle statistique adopté par (cf. [6], [10]) :

$$I_\theta = \sum_{R,S} \frac{2}{\sigma^2} \text{Re}((\nabla_\theta u_{R,S}^d)^H \nabla_\theta u_{R,S}^d) \quad (41)$$

$\nabla_\theta u^d$ étant la sensibilité du champ diffracté i.e., la Jacobienne de u^d par rapport à θ . On fait l'hypothèse que le niveau de bruit est le même pour tous les récepteurs et que σ^2 ne dépend pas des paramètres inconnus.

L'expression de la sensibilité du champ est alors la suivante :

$$\nabla_\theta u^d(r, \varphi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \nabla_\theta \phi_p H_p^+(k_i r) \exp(-ip\varphi) \quad (42)$$

où $\nabla_\theta \phi_p$ s'obtient en dérivant l'expression (34).

Une propriété intéressante de la BCR est qu'elle permet de décrire dans certains cas le comportement de l'estimateur de Maximum de vraisemblance. En effet, sous certaines conditions de régularité, la distribution de l'erreur pour cet estimateur est asymptotiquement gaussien de loi $\mathcal{N}(0, I_\theta^{-1})$ (cf. [6], [10]). Le régime asymptotique est atteint lorsque le nombre de mesures est suffisamment élevé et/ou le niveau de bruit est assez faible. En dehors de ce régime, la BCR peut s'avérer trop optimiste, mais il existe d'autres bornes d'estimation pour décrire l'erreur dans ces conditions (cf. [10]).

La BCR dépend des paramètres intrinsèques au dispositif de mesure (positions des sources, des récepteurs, type d'antennes ou d'éléments d'antenne utilisés, etc.); ce qui permet son utilisation pour la conception optimale de dispositifs expérimentaux.

4 Exemple en simulation : analyse de la BCR en fonction du contraste

4.1 Configuration numérique

L'exemple numérique traité compare le comportement en fonction du contraste de la Borne de Cramér-Rao (BCR) et celui de l'erreur de reconstruction pour l'estimateur de Maximum de Vraisemblance. La configuration numérique adoptée est la suivante : nous considérons un dispositif de tomographie micro-onde composée de 32 émetteurs/récepteurs. Le nombre de mesures effectués est $N_{R,S} = 32 \times 32$. La longueur d'onde utilisée est fixée à $\lambda = 1 \text{ m}$ et le nombre d'onde du milieu incident vaut $k_{inc} = 25 \text{ rad/m}$. L'objet cylindrique utilisé est de taille $r_0 = \lambda$ et le contraste normalisé par k_{inc} est choisi dans l'intervalle $[-1, 1]$. Le niveau de bruit choisi correspond à un Rapport Signal sur Bruit (RSB) de 20 dB. La définition

du RSB adoptée est la suivante :

$$RSB = 20 \log\left(\frac{\sum_{N_{R,S}} |u_{R,S}^d|^2}{N_{R,S} \sigma^2}\right) \quad (43)$$

Dans le cadre de notre modèle statistique, l'estimateur de Maximum de Vraisemblance est défini par :

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{\text{argmin}} \left(\frac{1}{\sigma^2} \sum_{N_{R,S}} (u_{R,S}^{mes} - u_{R,S}^d(\theta))^H (u_{R,S}^{mes} - u_{R,S}^d(\theta)) \right) \quad (44)$$

L'Erreur Quadratique Moyenne et la variance d'estimation sont évaluées de manière empirique par simulation Monte-Carlo.

4.2 Résultats et discussion

Les résultats obtenus sont présentés dans les figures 2 et 3. La figure 2 montre l'évolution de la BCR et de la variance d'estimation pour le contraste. La première remarque est que pour la plupart des valeurs testées, la BCR, la variance et l'EQM coïncident. Cela s'explique par le fait que le nombre de mesures considéré est sans doute suffisant pour atteindre le régime asymptotique de l'estimateur du Maximum de Vraisemblance. Pour des contrastes faibles cependant, le comportement de la BCR et celui de la variance diffèrent ; plusieurs hypothèses pour expliquer cette divergence sont actuellement en cours de test.

La seconde remarque est la dissymétrie entre les valeurs de variance et de BCR pour les contrastes positifs et ceux pour les contrastes négatifs. En effet, si on écarte les valeurs extrêmes (-1 et 1), l'estimation est plus aisée pour les contrastes négatifs que pour ceux positifs.

La figure 3 montre l'évolution de la BCR et de la variance d'estimation pour le rayon. La BCR, la variance et l'EQM coïncident aussi. Le pic pour les valeurs de contraste faibles s'explique par la difficulté à estimer le rayon dans ces cas de figure. En effet, l'objet devient transparent et le champ diffracté est quasiment nulle dans ces cas. Contrairement, à la BCR pour le contraste, la dissymétrie entre contrastes positifs et négatifs est moins visible.

Dans les deux cas, la BCR peut substituer l'erreur quadratique moyenne pour analyser les performances de reconstruction pour la configuration numérique étudiée.

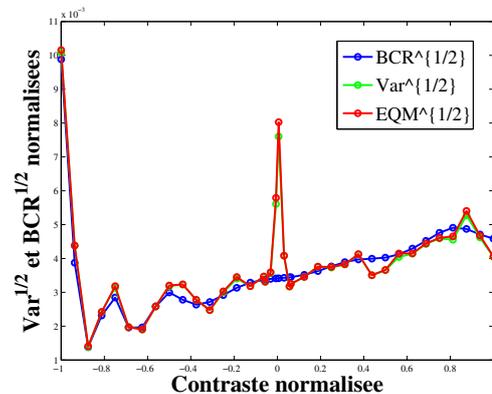


FIGURE 2 – BCR et Variance associées à l'estimation du contraste

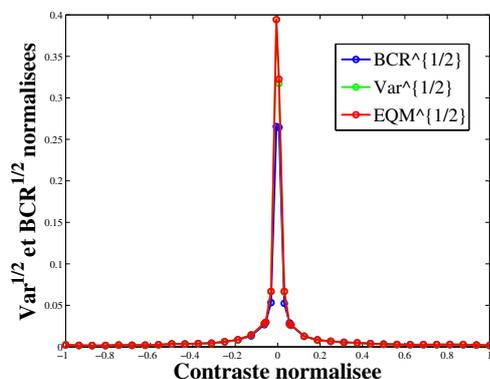


FIGURE 3 – BCR et Variance associées à l'estimation du rayon

5 Conclusion

Pour l'exemple numérique, la Borne de Cramér-Rao (BCR) décrit de manière assez correcte le comportement de l'erreur de reconstruction. Ce qui permet d'envisager son utilisation pour évaluer les gains ou les pertes de performance d'un dispositif de mesure à l'autre. Cependant, du fait de la configuration choisie et de l'objet testé, nous avons atteint le régime asymptotique pour l'estimateur de Maximum de Vraisemblance. La prochaine étape consiste à évaluer les limites de ce régime asymptotique. Pour cela, nous allons étudier l'impact sur la BCR et l'erreur d'estimation, du nombre de récepteurs utilisés et des différents paramètres expérimentaux (fréquence, milieu incident, diagramme de rayonnement des antennes, etc.). Ensuite, nous allons considérer des objets plus complexes (objets multi-couches, objets inhomogènes) et éventuellement étudier d'autres bornes d'estimation si la BCR s'avérait insatisfaisante.

Remerciements

Nous remercions l'Institut Carnot Star (Marseille) pour avoir financé cette étude dans le cadre d'un contrat doctoral entre cet institut et l'Ecole Doctorale 353 d'Aix Marseille Université.

Références

- [1] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, pages 358-389, Dover Publications (1964).
- [2] F. Champagnat and G. Le Besnerais and C. Kulcsár, Statistical performance modeling for superresolution : a discrete data-continuous reconstruction framework, *Josa*, (2009)
- [3] W. C. Chew, *Waves and Fields in Inhomogeneous Media Electromagnetic Waves*, IEEE Computer Society Press(1995).
- [4] M.N.El Korso and A. Renaux and R. Boyer and S. Marcos, Deterministic Performance Bounds on the Mean Square Error for Near Field Source Localization, *IEEE Trans. on Signal Processing*, (2013)
- [5] P. J. T. Filippi et al., *Acoustique générale*, Les Editions de Physique,(1994).
- [6] S. M. Kay, *Fundamentals statistical signal processing*, volume 1, Prentice-Hall, (1993)
- [7] S. Nordebo and M. Gustafsson and B. Nilsson, Fisher information analysis for two-dimensional microwave tomography, *Inverse Problems*, (2007).
- [8] S. Nordebo and A. Fhager and M. Gustafsson and B. Nilsson, A Green's function approach to Fisher information analysis and preconditioning in microwave tomography, *Inverse Problems in Science and Engineering*(2010).
- [9] A. Roueff and A. Arnaubec and P-C Dubois-Fernandez and Ph. Réfrégier, Cramér-Rao lower bound analysis of vegetation height estimation with random volume over ground model and polarimetric SAR interferometry, *IEEE Geosci. Remote Sens. Lett.*, (2011)
- [10] H. L. Van Trees and K. L. Bell, *Detection Estimation and Modulation Theory*,part 1, Wiley, (2013).
- [11] J. C. Ye and Y. Bresler and P. Moulin, Cramér-Rao Bounds for 2-D Target Shape Estimation in Nonlinear Inverse Scattering Problems with Application to Passive Radar, *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, (2001)
- [12] J. C. Ye and Y. Bresler and P. Moulin, Cramér-Rao Bounds for Parametric Shape Estimation in Inverse Problems, *IEEE Trans. on Image Processing*, (2003)