Résolution itérative de l'équation de Goldstein pour l'acoustique dans un écoulement non potentiel

J.-F. Mercier[a] et V. Pagneux[b]
[a]Poems, CNRS, ENSTA ParisTech, INRIA, 828 boulevard des Maréchaux, 91762 Palaiseau, France
[b]LAUM, Université du Maine Avenue Olivier Messiaen, 72085 Le Mans, France
jean-francois.mercier@ensta-paristech.fr

Nous étudions le rayonnement acoustique dans un écoulement général (non potentiel). En régime harmonique, nous considérons des géométries 2D arbitraires et donc nous privilégions les méthodes d'éléments finis adaptées à des maillages non-structurés. Nous développons une méthode qui combine la résolution de l'équation de Helmholtz convectée (Helmholtz généralisée à la présence d'un écoulement), bien adaptée à une résolution par éléments finis mais valable uniquement pour un écoulement potentiel, et qui prend en compte le couplage acoustique-hydrodynamique : les tourbillons générés par l'acoustique et le bruit généré par les tourbillons. La méthode est basée sur la résolution des équations de Goldstein, valables pour un écoulement non potentiel, combinant l'équation usuelle de Helmholtz convectée et une inconnue supplémentaire vectorielle représentant la vorticité et satisfaisant une équation de transport. La résolution se fait par un processus itératif, dans lequel la vorticité sert de terme source à l'acoustique et est remise à jour à chaque itération. L'efficacité de la méthode a été testée dans des domaines de propagation borné ou non borné (le domaine de calcul est alors borné par des PML).

1 Les équations de l'aéroacoustique pour un écoulement général

1.1 Géometrie et écoulement

Un domaine Ω contient un fluide parfait compressible en écoulement, supposé stationnaire et homentropique. L'écoulement est caractérisé par ses champs non uniformes de vitesse $\vec{v}_0$, de densité ρ_0, de pression p_0 qui satisfont les équations d'Euler combinées avec l'équation d'état :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\rho_0\vec{v}_0) = 0, \\ \rho_0\left(\vec{v}_0\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v}_0 + \vec{\nabla}p_0 = 0, \\ p_0 = \mu\rho_0^{\gamma}, \end{cases}$$

où μ est une constante, $\gamma = c_p/c_v$ avec c_v la capacité de chaleur spécifique à volume constant et c_p la capacité de chaleur spécifique à pression constante. Sur les parois rigides notées Γ la condition aux limites s'écrit :

$$\vec{v}_0.\vec{n} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma,$$

où $\vec{n}$ désigne le vecteur normal extérieur. Enfin, nous introduisons la vorticité de l'écoulement $\vec{\omega}_0 = \vec{rot}\,\vec{v}_0$. Deux principaux modèles de propagation acoustique existent en fonction de la valeur de $\vec{\omega}_0$.

1.2 Cas d'un écoulement potentiel

Si $\vec{\omega}_0 = \vec{0}$, l'écoulement est potentiel $\vec{v}_0 = \vec{\nabla}\varphi_0$. Si nous notons $\vec{v}$ la perturbation de vitesse, on montre qu'elle est également potentielle, associée au potentiel φ tel que $\vec{v} = \vec{\nabla}\varphi$. En régime harmonique de fréquence ω, le potentiel satisfait l'équation de Helmholtz convectée [1, 2] :

$$\rho_0\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{c_0^2}\frac{D\varphi}{Dt}\right) = \operatorname{div}\left(\rho_0\vec{\nabla}\varphi\right),$$

où $D/Dt = \vec{v}_0\cdot\vec{\nabla} - i\omega$ est la dérivée convective, avec la condition aux limites $\partial\varphi/\partial n = 0$ sur Γ. La vitesse du son c_0 est déduite de la vitesse du fluide par la relation de Bernouilli :

$$\frac{|\vec{v}_0|^2}{2} + \frac{c_0^2}{\gamma-1} = \text{cste}.$$

La pression et la densité sont déduites de $c_0^2 = \gamma p_0/\rho_0$ et de la loi d'état $p_0 = \mu\rho_0^{\gamma}$.

L'équation de Helmholtz convectée est attractive car elle est bien adaptée à une résolution par une méthode d'éléments finis et il existe des codes industriels performants [3].

1.3 Les équations dans un écoulement général

Si $\vec{\omega}_0 \neq \vec{0}$, la perturbation de vitesse est décomposée sous la forme :

$$\vec{v} = \vec{\nabla}\varphi + \vec{\xi},$$

où le potentiel des vitesses φ et la nouvelle inconnue $\vec{\xi}$ satisfont le système couplé :

$$\begin{cases} \dfrac{D}{Dt}\left(\dfrac{1}{c_0^2}\dfrac{D\varphi}{Dt}\right) = \dfrac{1}{\rho_0}\operatorname{div}\left[\rho_0\left(\vec{\nabla}\varphi+\vec{\xi}\right)\right], \\ \dfrac{D\vec{\xi}}{Dt} = \vec{\nabla}\varphi\wedge\vec{\omega}_0 - \left(\vec{\xi}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v}_0. \end{cases} \tag{1}$$

Cette équation a été dérivée dans le contexte des ondes acoustiques [4], mais aussi des écoulement hélicoïdaux [5, 6, 7]. La pression p et la densité ρ sont déduites de

$$\begin{aligned} p &= -\rho_0 D\varphi/Dt, \\ p &= c_0^2\rho. \end{aligned}$$

Il a été prouvé [8] que la nouvelle inconnue satisfait $\vec{\xi} = \vec{u}\wedge\vec{\omega}_0$ où $\vec{u}$ est le déplacement de fluide. C'est ce qui rend l'équation (1) si attrayante : $\vec{\xi}$ s'annule dans les zones où l'écoulement est potentiel (en général prépondérantes) et l'équation de Helmholtz convectée habituelle est récupérée.

Contrairement au cas potentiel, Eq. (1) ne peut pas être résolue par une méthode d'éléments finis classiques : l'équation en $\vec{\xi}$ est une équation de transport harmonique non adaptée aux éléments finis de Lagrange (une résolution directe conduit à des résultats erronés). Une solution est par exemple d'utiliser des éléments finis de Galerkin Discontinu. Toutefois, si $\vec{\xi}$ est fixé dans la première équation de Eq. (1), on obtient pour φ l'équation de Helmholtz convectée avec $\vec{\xi}$ comme terme source. Dans la section suivante, nous allons utiliser cette remarque et développer une méthode pour résoudre les équations couplées du système (1) grâce à des éléments finis classiques.

2 Résolution : la méthode itérative

La méthode repose sur le fait qu'on s'attend à ce que $\vec{\xi}$ soit petit. En effet de $|i\omega\vec{\xi}| \sim |\vec{\nabla}\varphi\wedge\vec{\omega}_0|$ on déduit que $|\vec{\xi}| \sim \epsilon|\vec{\nabla}\varphi|$ où $\epsilon = \omega_0/\omega$ avec $\omega_0 = |\vec{\omega}_0|$. Ce terme ϵ est petit car l'acoustique est un phénomène haute fréquence, de fréquence plus élevée que la vorticité de l'écoulement. Ceci peut aussi se voir en comparant les longueurs caractéristiques : si on note a la distance typique de variation de l'écoulement, on a $\omega_0 \sim |\vec{v}_0|/a$ et de $\omega = 2\pi c_0/\lambda$ où λ est la longueur d'onde acoustique, on tire que $2\pi\epsilon \sim M(\lambda/a)$ où $M = |\vec{v}_0|/c_0$ est le nombre de Mach de l'écoulement. Le régime usuel de l'aérocoustique correspond à $M < 1$ et $\lambda \ll a$.

Par conséquent pour ϵ petit la résolution de la première équation de (1) avec $\vec{\xi} = \vec{0}$ donnerait une bonne approximation de la solution. En résolvant alors la seconde équation de (1) de façon itérative il est facile d'en déduire $\vec{\xi}$. Cette remarque se généralise pour conduire à une méthode itérative de résolution des équations de Goldstein (1). Pour le rayonnement d'une source f dans un écoulement général, nous introduisons le processus de résolution itératif suivant : si nous connaissons $\vec{\xi}_{n-1}$ à l'étape $n-1$, alors φ_n est obtenu en résolvant :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \rho_0 \dfrac{D}{Dt}\left(\dfrac{1}{c_0^2}\dfrac{D}{Dt}\varphi_n\right) & = & \operatorname{div}\left[\rho_0\left(\vec{\nabla}\varphi_n + \vec{\xi}_{n-1}\right)\right] + f & \text{dans} \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial n} + \vec{\xi}_{n-1}\cdot\vec{n} & = & 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma. & \end{array}\right.$$

Notons que cette équation peut être résolue par des éléments finis classiques. Une fois que φ_n a été déterminé, $\vec{\xi}_n$ est calculé, toujours par éléments finis, grâce à la relation explicite :

$$-i\omega\vec{\xi}_n = \vec{\nabla}\varphi_n \wedge \vec{\omega}_0 - \left(\vec{\xi}_{n-1}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v}_0 - \left(\vec{v}_0\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{\xi}_{n-1}.$$

Notons que pour ϵ petit, comme on s'attend à ce que $\vec{\xi}$ soit de faible amplitude, le processus itératif est initié avec $\vec{\xi}_0 = \vec{0}$ et on s'attend à ce que peu d'itérations soient nécessaires.

3 Exemples numériques

Nous présentons maintenant deux illustrations numériques de la méthode, avec un écoulement de type tourbillon dans un domaine borné et un écoulement cisaillé dans un domaine ouvert.

3.1 Ecoulement de type tourbillon

Nous choisissons un écoulement tourbillonnaire $\vec{v}_0$ centré en $\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{v}_0(\vec{0}) = \vec{0}$, la vitesse du son est donnée par $c_0^2 = (c_0^0)^2 - (\gamma-1)|\vec{v}_0|^2/2$ où $c_0^0 = c_0(\vec{0})$. En prenant c_0^0 comme vitesse de référence, on peut écrire les équations (1) sous une forme sans dimension. Notant ρ_0^0 la densité de référence (telle que $(c_0^0)^2 = \gamma\mu(\rho_0^0)^{\gamma-1}$) et en introduisant les grandeurs sans dimension $\tilde{c}_0 = c_0/c_0^0$, $\tilde{\vec{v}}_0 = \vec{v}_0/c_0^0$ et $\tilde{\rho}_0 = \rho_0/\rho_0^0$, on se ramène à (les tildes sont omis pour simplifier les écritures) :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \rho_0 \dfrac{D}{Dt}\left(\dfrac{1}{c_0^2}\dfrac{D}{Dt}\varphi\right) & = & \operatorname{div}\left[\rho_0\left(\vec{\nabla}\varphi + \vec{\xi}\right)\right] + f & \text{dans} \quad \Omega, \\ \left(\vec{v}_0\cdot\vec{\nabla} - ik\right)\vec{\xi} & = & \vec{\nabla}\varphi \wedge \vec{\omega}_0 - \left(\vec{\xi}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v}_0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial n} + \vec{\xi}\cdot\vec{n} & = & 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma, & \end{array}\right.$$

où

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{D}{Dt} & = & \vec{v}_0\cdot\vec{\nabla} - ik, \\ c_0^2 & = & 1 - \dfrac{\gamma-1}{2}|v_0|^2 = \rho_0^{\gamma-1}, \end{array}\right.$$

avec $k = \omega/c_0^0$ la fréquence réduite.

Dans Ω un disque de rayon R avec une frontière rigide, nous choisissons le tourbillon de Rankine de rayon de cœur $a < R$ défini en coordonnées polaires par $\vec{v}_0(r,\theta) = V_0(r)\ \vec{e}_\theta$ où $V_0 = \gamma g(r)/2\pi$ avec :

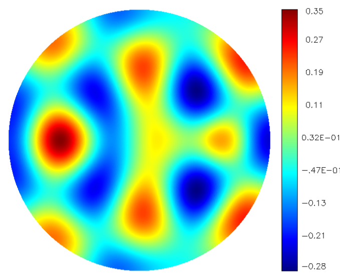
$$\left\{\begin{array}{rcl} g(r) & = & \dfrac{r}{a^2} \quad \text{si} \quad r \le a, \\ & = & \dfrac{1}{r} \quad \text{si} \quad r \ge a. \end{array}\right.$$

A cet écoulement est associée la vorticité $\operatorname{rot}\vec{v}_0 = h(r)$ avec :

$$\left\{\begin{array}{rcl} h(r) & = & \dfrac{\gamma}{\pi a^2} \quad \text{si} \quad r \le a, \\ & = & 0 \quad \text{si} \quad r \ge a. \end{array}\right.$$

Pour un test numérique, nous avons choisi $R = 3$, un vortex de rayon $a = 2$ et de vorticité $\gamma = 0,4$, une source $f = 1$ sur un disque de rayon $0,5$ centrée en $(2,0)$ et $k = 3$. Le paramètre ϵ vaut $\epsilon = \omega_0/\omega = \gamma/\pi a^2 k = 0.011$, petit devant 1 donc on s'attend à ce que peu d'itérations soient nécessaires. Sur la Fig. 1 sont tracées les parties réelles du

$\Re e(\varphi_1)$:



$\Re e[(\xi_x)_1]$:

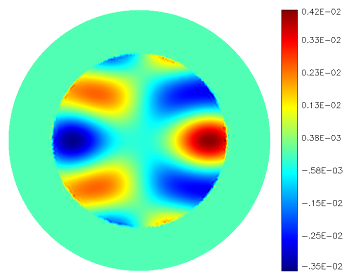


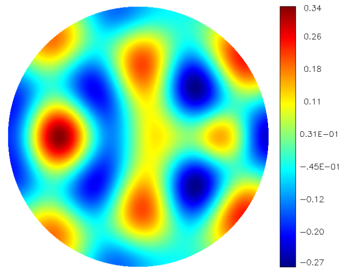
FIGURE 1 – Première itération pour un tourbillon

potentiel des vitesses et de la composante horizontale de $\vec{\xi}$ à la première itération. ξ_x s'annule clairement en dehors du cœur du tourbillon (pour $r > a$) car $\vec{\xi} = \vec{u} \wedge \vec{\omega}_0$. Sur la Fig. 2 sont tracées les mêmes quantités à la deuxième itération : le potentiel des vitesses a légèrement changé (l'échelle est passée de $[-0.28, 0.35]$ à $[-0.27, 0.34]$) en raison du terme source supplémentaire $\operatorname{div}(\rho_0\vec{\xi}_1)$. Cette solution s'avère être la solution convergée : les itérations suivantes modifient très peu les valeurs de φ ou de $\vec{\xi}$.

3.2 Ecoulement cisaillé

Nous considérons à présent un écoulement de cisaillement $\vec{v}_0 = V_0(y)\vec{e}_x$ dans un conduit de hauteur 1. Pour un tel écoulement $c_0 = $ cste et $\rho_0 = $ cste. En notant

$\Re e(\varphi_2)$:



$\Re e[(\xi_x)_2]$:

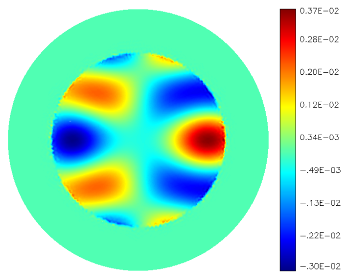


FIGURE 2 – Seconde itération pour le tourbillon

$M(y) = V_0(y)/c_0$ et $\mathrm{D} = M(y)\partial/\partial x - ik$, nous obtenons :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{D}^2\varphi & = & \mathrm{div}\left(\vec{\nabla}\varphi + \vec{\xi}\right) + f, \\ \mathrm{D}\vec{\xi} & = & \left(\begin{array}{c} -M'\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} + \xi_y\right) \\ M'\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} \end{array}\right). \end{array}\right.$$

Contrairement au cas précédent, le domaine de propagation est maintenant illimité. Pour borner le domaine d'intérêt, noté Ω_b, tout en sélectionnant la solution sortante, nous introduisons des PML (couches parfaitement adaptées) $\Omega_\pm^L$ de longueur L (voir Fig. 3). En présence de PML, le

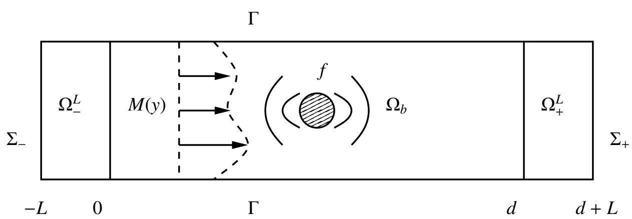


FIGURE 3 – Domaine de calcul avec PML

problème est posé dans le domaine de calcul $\Omega = \Omega_b \cup \Omega_\pm^L$ et il devient :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \mathrm{D}_\alpha^2\varphi & = & \mathrm{div}_\alpha\left(\nabla_\alpha\varphi + \vec{\xi}\right) + f & \text{dans} \quad \Omega, \\ -ik\vec{\xi} & = & \left(\begin{array}{c} -M'\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} + \xi_y\right) \\ M'\tilde{\alpha}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} \end{array}\right) - M\tilde{\alpha}\dfrac{\partial\vec{\xi}}{\partial x} & \text{dans} \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} + \xi_y & = & 0 & \text{sur} \quad \Gamma, \\ \varphi & = & 0 & \text{sur} \quad \Sigma_\pm. \end{array}\right.$$

L'indice α signifie que $\partial/\partial x$ a été remplacé par $\tilde{\alpha}\partial/\partial x$. $\tilde{\alpha} = 1$ dans Ω_b et $\tilde{\alpha} = \alpha$ dans les PML avec α un nombre complexe choisi tel que $\Re e(\alpha) > 0$ et $\Im m(\alpha) < 0$.

Pour les illustrations numériques, nous avons choisi $d = 2$, $L = 0.5$, la source $f = -1$ dans le disque de rayon 0.2 centrée en $(1, 0.5)$, $k = 5$ et $\alpha = 0.3(1 - i)$. Deux profils de vitesse sont considérés.

3.2.1 Profil en tangente hyperbolique

Nous prenons le profil :

$$M(y) = (M_{max} - M_{min})\tanh\left[\kappa(y - y_c)\right] + M_{max} + M_{min},$$

avec $M_{min} = 0.$, $M_{max} = 0.2$, $\kappa = 10$ et $y_c = 0.5$. La vorticité maximale est $M'(y_c) = \kappa M_{max}$ ce qui donne $\epsilon = \kappa M_{max}/k = 0.4$. Bien que ϵ ne soit pas très petit devant 1, nous allons voir que peu d'itérations sont nécessaires pour obtenir la solution convergée.

Fig. 4 montre la partie réelle du potentiel de vitesse pour $\vec{\xi} = \vec{0}$. Fig. 5 montre la résultante $\vec{\xi}_1$, localisé

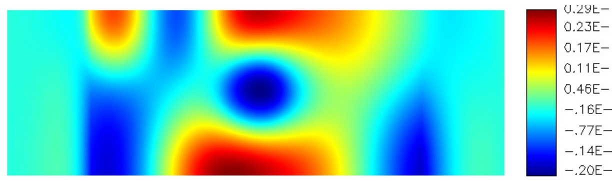


FIGURE 4 – Potentiel des vitesses à la première itération

essentiellement dans la partie de plus grand cisaillement de l'écoulement, autour de $y = y_c$. Fig. 6 montre le potentiel des

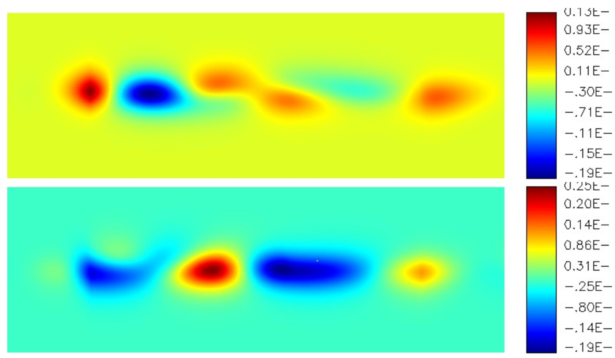


FIGURE 5 – $\Re e(\xi_x)$ en haut, $\Re e(\xi_y)$ en bas, à la première itération

vitesses à la deuxième itération : comme pour l'écoulement tourbillonnaire, de prendre en compte les effets de vorticité ne modifie que légèrement le champ acoustique. Notons que les PML fonctionnent bien : φ en Fig. 6 et $\vec{\xi}$ en Fig. 5 diminuent continûment dans les couches. Les itérations

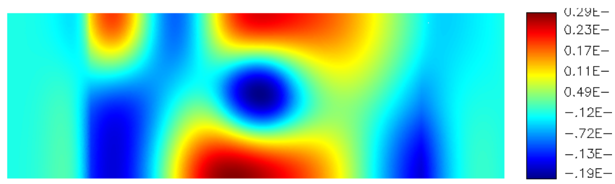


FIGURE 6 – Potentiel des vitesses à la deuxième itération

suivantes ne modifient pas de manière significative le potentiel des vitesses.

3.2.2 Ecoulement de couches limites

Ici, nous considérons l'écoulement de couches limites

$$M(y) = (M_{max} - M_{min}) \{\tanh(\kappa y) + \tanh[\kappa(h-y)]\} + 2M_{min} - M_{max},$$

où $M_{min} = 0$, $M_{max} = 0.1$ et $\kappa = 10$. Cet écoulement s'annule sur les parois rigides et est presque constant, égal à M_{max} dans le centre du guide. Pour cet écoulement on obtient $\epsilon = \kappa M_{max}/k = 0.2$, non petit. Comme précédemment, le potentiel des vitesses obtenu lors de la première itération (Fig. 7) est proche de sa valeur convergée. Cette fois $\vec{\xi}$ est

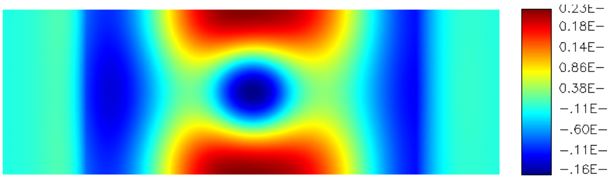


FIGURE 7 – Potentiel des vitesses à la première itération

localisé dans les couches limites en contact avec les parois du guide (fig. 7).

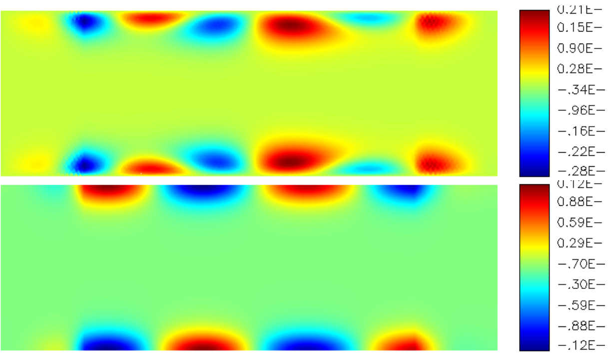


FIGURE 8 – $\Re e(\xi_x)$ en haut, $\Re e(\xi_y)$ en bas, à la première itération

4 Conclusion

Nous avons considéré les équations de Goldstein, étendant l'équation de Helmholtz convectée, valable que pour un écoulement porteur potentiel, au cas d'un écoulement général. Les inconnues sont le potentiel des vitesses φ et la vorticité $\vec{\xi}$. φ satisfait l'équation de Helmholtz convectée dans laquelle la vorticité joue le rôle de source et est déterminé en utilisant une méthode éléments finis classique. En revanche $\vec{\xi}$ satisfait une équation de transport harmonique non adaptée à des éléments finis classiques. La stratégie de résolution proposée consiste à résoudre les équations couplées de Goldstein de façon itérative. Dans les conditions usuelles de l'aéroacoustique, fréquence des ondes grande devant la vorticité de l'écoulement porteur, on s'attend à ce que la méthode itérative converge vite. Nous avons montré que ce scénario se vérifie si le rapport vorticité/fréquence est petit ou modéré, il reste à étudier la convergence du schéma itératif lorsque ce rapport grandit.

Remerciements

Les auteurs remercient l'Agence Nationale de la Recherche (projet AEROSON, ANR-09-BLAN-0068-02 program) pour le soutient financier.

Références

[1] A. D. Pierce, Wave equation for sound in fluids with unsteady inhomogeneous flow, *J. Acoust. Soc. Am.* **87**(6), 2292-2299 (1990)

[2] W. Eversman, Theoretical models for duct acoustic propagation and radiation, Aeroacoustics of Flight Vehicles : Theory and Practice, 2 : Noise Control, NASA RP-1258, 101-63 (1991)

[3] J. P. Coyette, *Manuel théorique ACTRAN*, Free Field Technologies, Louvain-la-Neuve, Belgique (2001)

[4] M. E. Goldstein, Unsteady vortical and entropic distortions of potential flows round arbitrary obstacles, *Journal of Fluid Mechanics* **89**(3), 433-468 (1978)

[5] V. V. Golubev and H.M. Atassi, Sound propagation in an annular duct with mean potential swirling flow, *Journal of Sound and Vibration* **198**(5), 601-616 (1996)

[6] C. J. Heaton and N. Peake, Algebraic and exponential instability of inviscid swirling flow, *Journal of Fluid Mechanics* **565**, 279-318 (2006)

[7] A. J. Cooper, Effect of mean entropy on unsteady disturbance propagation in a slowly varying duct with mean swirling flow, *Journal of sound and vibration* **291**(3-5), 779-801 (2006)

[8] S. E. P. Bergliaffa, K. Hibberd, M. Stone and M. Visser, Wave Equation for Sound in Fluids with Vorticity, *Physica D* **191**, 121-136 (2004)