

## **Solitons acoustiques dans un guide d'onde connecté à des résonateurs de Helmholtz**

J.-F. Mercier<sup>a</sup>, B. Lombard<sup>b</sup> et O. Richoux<sup>c</sup>

<sup>a</sup>Poems, CNRS, ENSTA ParisTech, INRIA, 828 boulevard des Maréchaux, 91762 Palaiseau, France

<sup>b</sup>CNRS, Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, 31 chemin Joseph Aiguier, 13402 Marseille, France

<sup>c</sup>LAUM, Université du Maine Avenue Olivier Messiaen, 72085 Le Mans, France

jean-francois.mercier@ensta-paristech.fr

Les solitons sont des ondes de grande amplitude qui se propagent sans déformation, résultant de la compétition entre des effets non linéaires (raidissement) et de dispersion (étalement). Ils existent dans de nombreux systèmes physiques : équations de Korteweg de Vries en mécanique des fluides, équation de Schrödinger non linéaire en mécanique quantique... Les travaux de Sugimoto dans les années 90 ont montré que des solitons acoustiques pouvaient exister si des mécanismes dispersifs suffisants étaient introduits, typiquement par des résonateurs de Helmholtz connectés à un guide d'onde 1D.

Le modèle de Sugimoto met en jeu un système couplé : une équation hyperbolique non linéaire de propagation et une équation différentielle décrivant les oscillations dans les résonateurs. Dans chaque équation, les effets de couche-limite visqueuse et thermique sont décrits par des dérivées fractionnaires en temps. Nous avons développé une stratégie numérique pour résoudre ces équations. En particulier, nous remplaçons les dérivées fractionnaires, non locales en temps, par des variables de mémoire, qui satisfont des équations différentielles locales. Après une étape de validation des algorithmes, nous comparons les résultats à ceux d'expériences réelles.

## 1 Introduction

La propagation d'ondes acoustiques non linéaires dans des réseaux a été étudiée par Sugimoto et ses co-auteurs dans une série de travaux théoriques et expérimentaux [1, 2, 3, 4, 5]. La configuration étudiée est un tube relié à un réseau de résonateurs de Helmholtz (Fig. 1). Ces derniers induisent de la dispersion en compétition avec les effets non linéaires dans le tube ce qui peut empêcher l'émergence de choc. La motivation initiale de ces travaux était d'ailleurs la réduction des ondes de choc générées par un train d'ondes à grande vitesse dans un tube.

Des questions plus fondamentales se posent également concernant des ondes non linéaires bien connues : les solitons [6, 7]. Ce sont des ondes solitaires stables qui maintiennent leur forme pendant qu'elles se déplacent à vitesse constante. Les solitons résultent d'une compétition entre des effets non linéaires et dispersifs dans le milieu. Beaucoup de modèles physiques donnent de telles solutions, par exemple l'équation de Korteweg-de Vries, l'équation non linéaire de Schrödinger et l'équation de sine-Gordon. En acoustique, l'effet des termes non linéaires est largement supérieur à la dispersion, de sorte qu'on a longtemps cru que des ondes solitaires étaient impossibles à produire. Mais dans la configuration de Sugimoto, il a été démontré que des solitons acoustiques peuvent exister et se propager à la place des ondes de choc [5].



FIGURE 1 – Guide avec un réseau de résonateurs de Helmholtz

Le modèle proposé par Sugimoto consiste en deux équations couplées : une équation aux dérivées partielles (EDP) non linéaire décrivant la propagation des ondes acoustiques de grandes amplitudes dans le tube, et une équation différentielle ordinaire (EDO) linéaire décrivant les oscillations dans les résonateurs de Helmholtz. Les effets de dissipation dans le tube et dans les cols des résonateurs sont modélisés par des dérivées fractionnaires

[8], correspondant à des produits de convolution avec des noyaux singuliers. Une bonne modélisation numérique repose sur les trois caractéristiques suivantes :

- le calcul précis des ondes non linéaires ;
- le calcul efficace des dérivées fractionnaires, sans stocker les valeurs passées des solutions ;
- un algorithme stable sous une condition CFL, quels que soient les paramètres physiques et l'amplitude des ondes.

La première spécification est résolue depuis plusieurs décennies, par exemple en utilisant des schémas capturant les chocs [9]. La deuxième condition est beaucoup moins standard. Dans ce proceeding, nous suivons une stratégie s'appuyant sur la représentation diffusive des opérateurs fractionnaires [10, 11, 12, 13, 14, 15]. Les dérivées fractionnaires sont remplacées par un ensemble de variables de mémoire qui satisfont des équations différentielles linéaires locales en temps. Les coefficients de cette représentation sont déterminés à partir d'une procédure d'optimisation, ce qui assure un coût de calcul minimal des dérivés fractionnaires. Enfin, la spécification de stabilité exige un couplage adapté entre l'EDP et l'EDO. Un couplage classique entre ces équations engendre en général une augmentation de l'énergie discrète. Ici, nous obtenons un système stable sous une condition CFL optimale.

Le proceeding est organisé de la façon suivante. Le modèle de Sugimoto est présenté dans la section 2 et la dégénérescence à basse-fréquence vers une équation de KdV généralisée est montrée. La représentation diffusive des dérivées fractionnaires est décrite dans la section 3, conduisant à un système d'EDP du premier ordre. Les méthodes numériques sont détaillées : une méthode de splitting pour assurer une condition CFL optimale et tirer profit de méthodes efficaces, un schéma TVD pour l'EDP de Burgers et une résolution exacte de la partie diffusive. La procédure pour calculer les poids et les nœuds de cette représentation est expliquée. Des expériences numériques sont proposées dans la section 4. Deux essais sont présentés, concernant successivement l'acoustique non linéaire dans le tube sans résonateur, puis le couplage (linéaire et non linéaire) entre les deux sous-systèmes. Des mesures numériques sur le système non linéaire complet confirment une propriété classique des solitons : la dépendance de la vitesse avec l'amplitude. Une conclusion et des orientations futures de recherche sont esquissées dans la section 5.

## 2 Description du problème

### 2.1 Configuration

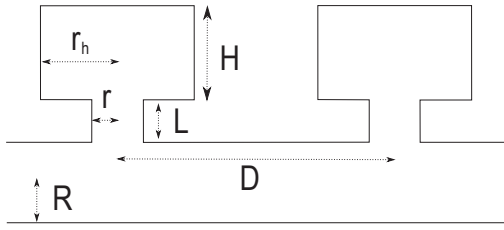


FIGURE 2 – Schéma du guide connecté à des résonateurs de Helmholtz

La configuration étudiée est constituée d'un tube rempli d'air relié à des résonateurs de Helmholtz cylindriques régulièrement répartis (Fig. 2).

### 2.2 Equations

On considère un modèle à une dimension, dans lequel les variables sont la vitesse axiale du gaz  $u$  et la surpression dans la cavité  $p$ . Nous étendons les modèles utilisés dans [2, 16], en incluant les pertes non linéaires et par turbulence dans les résonateurs.

L'onde simple se propageant à droite est modélisée par un système couplé d'une équation aux dérivées partielles et d'une équation différentielle ordinaire :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( au + b \frac{u^2}{2} \right) = c \frac{\partial^{-1/2}}{\partial t^{-1/2}} \frac{\partial u}{\partial x} + d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - e \frac{\partial p}{\partial t} & (1a) \\ \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + f \frac{\partial^{3/2} p}{\partial t^{3/2}} + gp - m \frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2} + n \left| \frac{\partial p}{\partial t} \right| \frac{\partial p}{\partial t} = hu & (1b) \end{cases}$$

L'EDP (1a) modélise les ondes acoustiques non linéaires dans le tube (coefficients  $a$  et  $b$ ). Les pertes visqueuses et thermiques dans les couches limites du tube sont introduites par le coefficient  $c$  [17]. La diffusivité du son dans le tube est également modélisée par le coefficient  $d$ .

L'ODE (1b) modélise l'oscillation de l'air dans le col des résonateurs (coefficients  $f$  et  $g$ ) [18, 19]. Le coefficient  $m$  modélise la non-linéarité due au processus adiabatique dans la cavité, tandis que le coefficient semi-empirique  $n$  représente les pertes de jet [2, 5].

Le couplage entre (1a) et (1b) se fait par les coefficients  $e$  et  $h$ . Si les résonateurs sont supprimés ( $H \rightarrow 0$ ), alors le coefficient  $e \rightarrow 0$  : aucun couplage n'existe, et l'équation classique de Chester est retrouvée [20].

Des opérateurs fractionnaires d'ordre  $-1/2$  et  $3/2$  apparaissent dans le système (1). Ces opérateurs modélisent les pertes viscothermiques dans le tube et dans les résonateurs, respectivement proportionnelles à  $1/(i\omega)^{1/2}$  et  $(i\omega)^{3/2}$  dans le domaine fréquentiel. Dans (1a), l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre  $1/2$  d'une fonction  $w(t)$  est définie par

$$\frac{\partial^{-1/2}}{\partial t^{-1/2}} w(t) = \frac{H(t)}{\sqrt{\pi t}} * w = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t (t-\tau)^{-1/2} w(\tau) d\tau, \quad (2)$$

où  $*$  est le produit de convolution en temps et  $H(t)$  est la fonction de Heaviside [21]. La dérivé fractionnaire de

Caputo d'ordre  $3/2$  dans (1b) est obtenue en appliquant (2) à  $\partial^2 p / \partial t^2$ .

### 2.3 Approximation basse fréquence

Numériquement nous résolvons le système complet (1), mais dans ce paragraphe, les propriétés qualitatives des solutions sont examinées en se concentrant sur les termes d'ordre dominant.

Sous l'hypothèse de faible non-linéarité, un système plus simple est dérivé, écrit dans les coordonnées sans dimension ( $T, X$ ), où  $T$  est un temps retardé et  $X$  est une variable lente d'espace

$$T = \omega \left( t - \frac{x}{a_0} \right), \quad X = \varepsilon \omega \frac{x}{a_0}, \quad \varepsilon = \frac{\gamma + 1}{2} \frac{u}{a_0}, \quad (3)$$

où  $a_0$  est la vitesse du son. En introduisant les variables réduites  $U$  et  $P$  et les paramètres

$$\omega_e = \frac{a_0 r / r_h}{\sqrt{(L + 0.82r)H}}, \quad \Omega = \left( \frac{\omega_e}{\omega} \right)^2, \quad N = \frac{H(r_h/r)^2}{L + 0.82r}, \quad (4)$$

et si l'on considère des ondes avec des fréquences caractéristiques beaucoup plus faibles que les fréquences propres des résonateurs  $\Omega \gg 1$ , on obtient

$$\frac{\partial U}{\partial X} + K \frac{\partial U}{\partial T} - U \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{K}{\Omega} \frac{\partial^3 U}{\partial T^3} + \frac{2KN}{\Omega} \left| \frac{\partial U}{\partial T} \right|. \quad (5)$$

Lorsque  $N = 0$ , on retrouve l'équation de Korteweg-de Vries (2-35) de [2], qui décrit la propagation de solitons.

## 3 Méthode numérique

### 3.1 Approximation diffusive

L'intégrale fractionnaire (2) est non locale en temps, et s'appuie sur l'histoire complète de  $w(t)$ , ce qui numériquement consomme beaucoup de mémoire. L'autre approche adoptée dans cette étude est basée sur une représentation diffusive des dérivées fractionnaires. En s'inspirant de [13], l'équation (2) est écrite

$$\frac{\partial^{-1/2}}{\partial t^{-1/2}} w(t) = \int_0^{+\infty} \phi(t, \theta) d\theta, \quad (6)$$

où la variable de diffusion  $\phi$  vérifie l'équation différentielle ordinaire locale en temps

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\theta^2 \phi + \frac{2}{\pi} w, \\ \phi(0, \theta) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

De même, la dérivée d'ordre  $3/2$  peut être écrite [16]

$$\frac{\partial^{3/2}}{\partial t^{3/2}} w(t) = \int_0^{+\infty} \left( -\theta^2 \xi(t, \theta) + \frac{2}{\pi} w'(t) \right) d\theta, \quad (8)$$

où la variable de diffusion  $\xi$  vérifie l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\theta^2 \xi + \frac{2}{\pi} w', \\ \xi(0, \theta) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Pour approcher l'intégrale (6), une formule de quadrature sur  $N_q$  points est utilisée, avec les poids  $\mu_\ell$  et les nœuds  $\theta_\ell$  :

$$\frac{\partial^{-1/2}}{\partial t^{-1/2}} w(t) \approx \sum_{\ell=1}^{N_q} \mu_\ell \phi(\theta_\ell, t) = \sum_{\ell=1}^{N_q} \mu_\ell \phi_\ell(t), \quad (10)$$

où les fonctions  $\phi_\ell$  satisfont l'ODE (7). De même, l'intégrale (8) est écrite

$$\frac{\partial^{3/2}}{\partial t^{3/2}} w(t) \approx \sum_{\ell=1}^{N_q} \mu_\ell \left( -\theta_\ell^2 \xi(\theta_\ell, t) + \frac{2}{\pi} w' \right) = \sum_{\ell=1}^{N_q} \mu_\ell \left( -\theta_\ell^2 \xi_\ell + \frac{2}{\pi} w' \right), \quad (11)$$

où les  $\xi_\ell$  satisfont l'EDO (9). La détermination des poids  $\mu_\ell$  et des nœuds  $\theta_\ell$  est discutée dans la section 3.4.

### 3.2 Système du premier ordre

Les équations (1), (7), (9), (10) et (11) sont écrites sous la forme d'un système du premier ordre

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( au + b \frac{u^2}{2} \right) = c \sum_{\ell=1}^{N_q} \mu_\ell \phi_\ell + d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - e q, \\ \frac{\partial p}{\partial t} = q, \\ \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{h u - g p - f \sum_{\ell=1}^{N_q} \mu_\ell \left( -\theta_\ell^2 \xi_\ell + \frac{2}{\pi} q \right) + 2 m q^2 - n |q| q}{1 - 2 m p}, \\ \frac{\partial \phi_\ell}{\partial t} - \frac{2}{\pi} \frac{\partial u}{\partial x} = -\theta_\ell^2 \phi_\ell, \quad \ell = 1 \cdots N_q, \\ \frac{\partial \xi_\ell}{\partial t} = -\theta_\ell^2 \xi_\ell + \frac{2}{\pi} q, \quad \ell = 1 \cdots N_q, \end{cases} \quad (12)$$

avec un terme source en  $x = 0$  modélisant la source acoustique  $u(0, t) = s(t)$  et avec des conditions initiales nulles.

Les  $(3 + 2 N_q)$  inconnues sont réunies dans un vecteur

$$\mathbf{U} = (u, p, q, \phi_1, \dots, \phi_{N_q}, \xi_1, \dots, \xi_{N_q})^T. \quad (13)$$

Le système non linéaire (12) peut alors être écrit sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{G} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{U} + \mathbf{S}(\mathbf{U}). \quad (14)$$

$\mathbf{F}$  est le vecteur de flux. Les valeurs propres de la matrice jacobienne  $\mathbf{F}'$  sont réelles, elles valent  $a + b u$ , et 0 de multiplicité  $2 N_q + 2$ , ce qui assure la propagation à vitesse finie. Ces valeurs propres ne dépendent pas des coefficients de quadrature  $\mu_\ell$  et  $\theta_\ell$ .  $\mathbf{G}$  est la matrice diagonale  $\text{diag}(d, 0, \dots, 0)$  de taille  $(3 + 2 N_q) \times (3 + 2 N_q)$ .  $\mathbf{S}$  est le vecteur de sources.

### 3.3 Schéma numérique

Afin d'intégrer le système (14), une grille est introduite avec un pas de maillage uniforme  $\Delta x$  et un pas de temps variable  $(\Delta t)_n$ , noté  $\Delta t$  pour simplifier. L'approximation de la solution exacte  $\mathbf{U}(x_j = j \Delta x, t_n = t_{n-1} + \Delta t)$  est notée  $\mathbf{U}_j^n$ . Une méthode de splitting est utilisée, en raison de son efficacité et sa simplicité de mise en œuvre [16]. Au lieu d'intégrer l'équation originale (14), une équation de propagation

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{G} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{U}, \quad (15)$$

et une équation de forçage

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} = \mathbf{S}(\mathbf{U}), \quad (16)$$

sont successivement considérées. Les opérateurs discrets pour résoudre (15) et (16) sont respectivement désignés par  $\mathbf{H}_a$  et  $\mathbf{H}_b$ . Un splitting de Strang [22] est alors utilisé entre  $t_n$  et  $t_{n+1}$ , en résolvant successivement (15) et (16) avec des incréments de temps adéquats :

$$\begin{aligned} \bullet \mathbf{U}_j^{(1)} &= \mathbf{H}_b\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \mathbf{U}_j^n, \\ \bullet \mathbf{U}_j^{(2)} &= \mathbf{H}_a(\Delta t) \mathbf{U}_j^{(1)}, \\ \bullet \mathbf{U}_j^{n+1} &= \mathbf{H}_b\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \mathbf{U}_j^{(2)}. \end{aligned} \quad (17)$$

L'équation de propagation (15) est résolue par un schéma classique de TVD du second ordre pour les EDP hyperboliques non linéaires [9] combinée avec une approximation de différences finies centrées :

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1/2}^1 - F_{j-1/2}^1) + \frac{d \Delta t}{\Delta x^2} (u_{j+1}^n - 2 u_j^n + u_{j-1}^n), \\ \phi_{j,\ell}^{n+1} &= \phi_{j,\ell}^n + \frac{1}{\pi} \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n), \quad \ell = 1, \dots, N_q, \end{aligned} \quad (18)$$

où  $F_{j\pm 1/2}^1$  est la fonction de flux numérique de l'équation de Burgers. En définissant le maximum de la vitesse  $a_{\max}^{(n)}$  et le nombre de Péclet discret  $\text{Pe}$

$$a_{\max}^{(n)} = a + b \max_j(u_j^n), \quad \text{Pe} = a_{\max}^{(n)} \frac{\Delta x}{2d} \gg 1, \quad (19)$$

l'opérateur discret  $\mathbf{H}_a$  dans (18) est stable sous la condition CFL usuelle

$$\frac{a_{\max}^{(n)} \Delta t}{\Delta x} \leq \left(1 + \frac{1}{\text{Pe}}\right)^{-1} \approx 1 - \frac{1}{\text{Pe}} \approx 1. \quad (20)$$

L'équation de forçage (16) est résolue par une méthode implicite des trapèzes du second ordre [22]

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \frac{\tau}{2} (\mathbf{S}(\mathbf{U}^n) + \mathbf{S}(\mathbf{U}^{n+1})), \quad (21)$$

avec  $\tau = \Delta t/2$ . Le système non linéaire (21) est résolu de manière itérative par la méthode de Newton-Raphson. Dans la pratique, une seule itération est assez précise. En linéarisant les équations et en utilisant le Jacobien  $\mathbf{T} = \mathbf{S}'$ , l'opérateur discret  $\mathbf{H}_b$  revient à appliquer la méthode des trapèzes semi-implicite

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \tau \left( \mathbf{I} - \frac{\tau}{2} \mathbf{T}^n \right)^{-1} \mathbf{S}(\mathbf{U}^n), \quad (22)$$

qui est inconditionnellement stable.

Le Strang splitting conduit à une erreur de splitting d'ordre 2. Comme  $\mathbf{H}_a$  est d'ordre 2 et  $\mathbf{H}_b$  est d'ordre infini, la méthode (17) donne une approximation précise au second ordre de l'équation originale (14).

### 3.4 Coefficients de quadrature

Ils nous reste à déterminer les  $2 N_q$  coefficients de quadrature  $\mu_\ell$  et  $\theta_\ell$  de l'approximation diffusive dans (10). Dans [16], une discussion détaillée sur les stratégies possibles a été proposée, et une optimisation linéaire a été

choisie. Dans ce cas, les nœuds  $\theta_\ell$  sont répartis linéairement sur une échelle logarithmique dans la gamme de fréquences d'intérêt, puis les poids sont déterminés par une simple méthode des moindres carrés. Un inconvénient est que des poids négatifs  $\mu_\ell$  peuvent être obtenus, ce qui ne garantit pas la décroissance de l'énergie. Ici, nous revisitons et améliorons la procédure d'optimisation.

L'analyse de dispersion montre que le modèle original de Sugimoto (1) et son homologue de diffusion (12) ne diffèrent que par leurs symboles

$$\begin{cases} \chi(\omega) = (i\omega)^{-1/2}, \\ \tilde{\chi}(\omega) = \frac{2}{\pi} \sum_{\ell=1}^N \frac{\mu_\ell}{\theta_\ell^2 + i\omega}. \end{cases} \quad (23)$$

Pour un nombre donné  $K_q$  de fréquences angulaires  $\omega_k$ , on introduit la fonction objectif

$$\mathcal{J}(\{(\mu_\ell, \theta_\ell)\}_\ell) = \sum_{k=1}^{K_q} \left| \frac{\tilde{\chi}(\omega_k)}{\chi(\omega_k)} - 1 \right|^2 = \sum_{k=1}^{K_q} \left| \frac{2}{\pi} \sum_{\ell=1}^{N_q} \mu_\ell \frac{(i\omega_k)^{1/2}}{\theta_\ell^2 + i\omega_k} - 1 \right|^2 \quad (24)$$

qui doit être minimisée par rapport aux paramètres  $\{(\mu_\ell, \theta_\ell)\}_\ell$  pour  $\ell = 1, \dots, N_q$ . Une optimisation non linéaire avec les contraintes de positivité  $\mu_\ell \geq 0$  et  $\theta_\ell \geq 0$  est choisie à cet effet. La contrainte supplémentaire  $\theta_\ell \leq \theta_{\max}$  est également introduite pour éviter que l'algorithme ne diverge. Ces  $3N_q$  contraintes peuvent être relâchées en posant  $\mu_\ell = \mu'_\ell{}^2$  et  $\theta_\ell = \theta'_\ell{}^2$  et en résolvant le problème suivant avec seulement  $N_q$  contraintes

$$\min_{\{(\mu'_\ell, \theta'_\ell)\}_\ell} \mathcal{J}(\{(\mu'_\ell{}^2, \theta'_\ell{}^2)\}_\ell) \quad \text{avec } \theta'_\ell{}^2 \leq \theta_{\max} \text{ pour } \ell = 1, \dots, N_q. \quad (25)$$

Comme le problème (25) est non linéaire et dépend de façon non-quadratique des nœuds  $\theta'_\ell$ , nous appliquons l'algorithme SolvOpt [23, 24] basé sur la méthode itérative de Shor [25]. Enfin, les fréquences angulaires  $\omega_k$  pour  $k = 1, \dots, K_q$  dans (24) sont choisies de façon linéaire sur une échelle logarithmique dans une bande d'optimisation  $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$ , soit

$$\omega_k = \omega_{\min} \left( \frac{\omega_{\max}}{\omega_{\min}} \right)^{\frac{k-1}{K_q-1}}. \quad (26)$$

En plus de la positivité des coefficients de quadrature, une grande amélioration de la précision numérique est observée lors de l'utilisation de l'optimisation non linéaire décrite ci-dessus.

## 4 Dispositif expérimental

### 4.1 Configuration et source

Le dispositif expérimental se compose d'un guide d'ondes cylindrique de 6,2 m de long, de rayon intérieur  $R = 2.5$  cm. Ce guide d'onde est connecté à un réseau de 60 résonateurs de Helmholtz distribués périodiquement. La distance entre deux résonateurs consécutifs est  $D = 10$  cm et chaque résonateur est composé d'un col (tube cylindrique de rayon intérieur  $r = 1$  cm et de longueur  $L = 2$  cm) et une cavité de longueur variable (tube cylindrique d'un rayon intérieur  $r_h = 2.15$  cm et d'une longueur maximale  $H_{\max} = 16.5$  cm). L'extrémité du tube est fermée par un

bouchon rigide située à  $D/2$  du dernier résonateur. Ainsi les ondes sont réfléchies en bout de tube et peuvent parcourir une seconde fois le tube (la longueur apparente du tube passe de 6 m à 12 m).

La source acoustique est obtenue en faisant exploser un ballon de baudruche à l'entrée du tube. La pression mesurée en entrée est représentée en Fig. 3. Ce signal est utilisée comme terme source dans la méthode numérique.

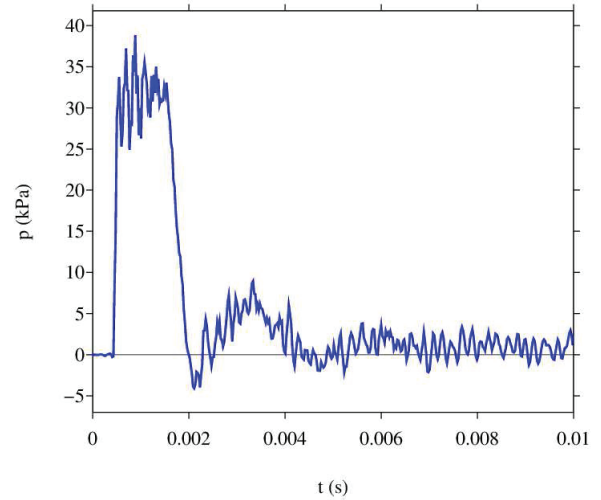


FIGURE 3 – Mesure de la pression en entrée de tube

### 4.2 Comparaisons calculs / expériences

#### 4.2.1 Tube sans résonateurs ( $H = 0$ cm)

La mesure de la pression en  $x_r = 6.1$  m montre l'existence d'un choc et est en très bon accord avec le calcul numérique, qui sans résonateur consiste à résoudre l'équation de Chester (Fig. 4).

#### 4.2.2 Tube avec résonateurs ( $H = 7$ cm)

Les paramètres du problèmes correspondent au régime basses fréquences  $\Omega = (\omega_e/\omega)^2 = 7.47 \gg 1$ , propice à l'apparition de solitons. On observe tout d'abord que la présence des résonateurs a fait disparaître le choc, comme c'était attendu (Fig. 5). De plus on constate que la non prise en compte des mécanismes linéaires d'atténuation ( $m = n = 0$ ) donne des pressions trop intenses. En revanche lorsque les amortissements non linéaires sont pris en compte, un très bon accord entre théorie et expérience est obtenu.

Nous avons donc obtenu une validation expérimentale du modèle et nous avons vérifié que l'atténuation non linéaire est cruciale.

#### 4.2.3 Mesure numérique de la vitesse de propagation

Une caractéristique des structures non linéaires tels que les solitons est que leur vitesse de déplacement dépend de leur amplitude. On peut extraire des simulations numériques cette vitesse : en partant d'une donnée initiale Gaussienne d'amplitude  $u_0$  que l'on laisse évoluer au cours du temps, grâce à des sismogrammes enregistrés sur un réseau de récepteurs placés en  $x_r = j$  ( $j = 1, \dots, 10$ ) (Fig. 6), on déduit la vitesse de propagation du soliton. On effectue des

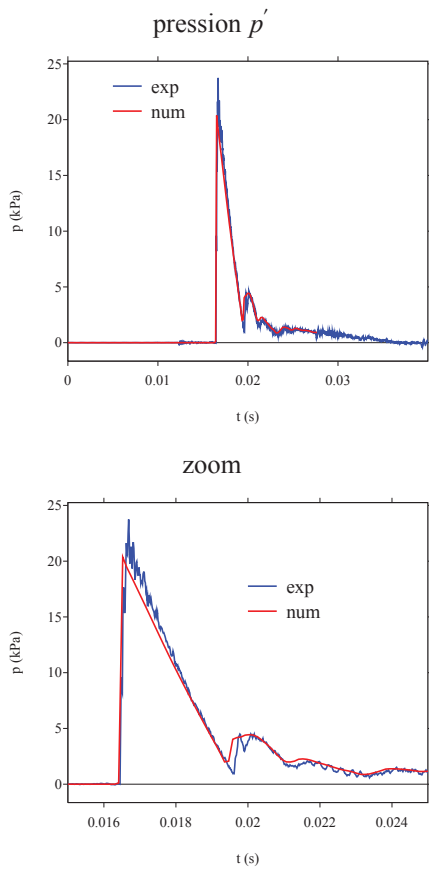


FIGURE 4 – Mesure en  $x_r = 6.1$  m

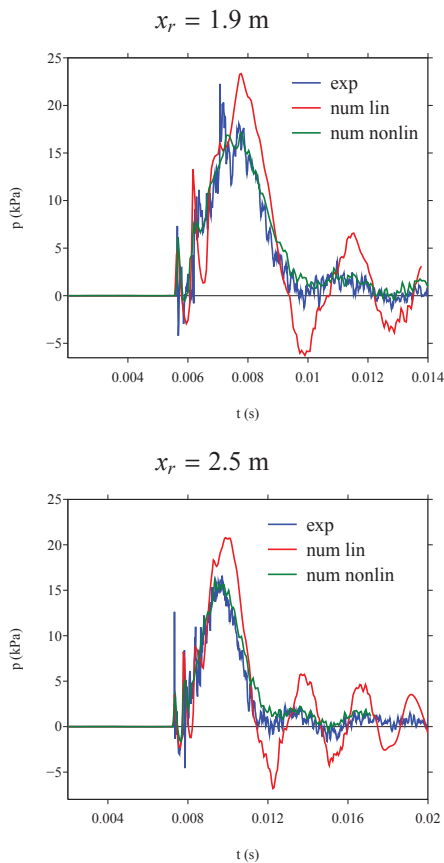


FIGURE 5 – Mesures en  $x_r = 1.9$  m et en  $x_r = 2.5$  m

mesures pour différents forçages  $u_0 = 10j$  ( $j = 1, \dots, 10$ ) ce qui conduit à la loi expérimentale

$$\mathcal{V}(u_0) = 268 + 0.38 u_0$$

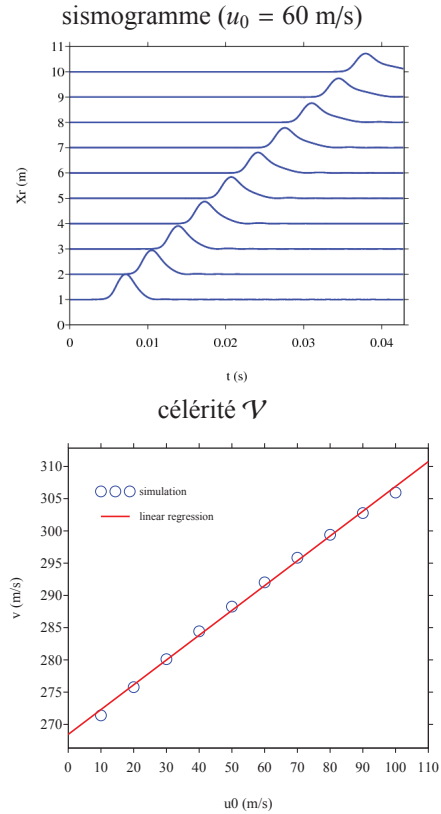


FIGURE 6 – Vitesse de propagation obtenue numériquement

## 5 Conclusion

Nous avons considéré les ondes acoustiques non linéaires dans un tube avec un réseau de résonateurs. Diverses caractéristiques physiques complexes sont impliquées : la non-linéarité due à la grande amplitude des ondes, la dispersion induite par les résonateurs, les dérivées fractionnaires d'ordre  $-1/2$  et  $3/2$  dues aux pertes visqueuses et les mécanismes d'atténuation tels que la turbulence et les pertes non linéaires dans les résonateurs.

Notre contribution originale est de proposer une modélisation numérique efficace et précise de cette configuration. Certains outils sont standards (schéma TVD pour la partie hyperbolique non linéaire), d'autres sont plus récents (représentation diffusive de dérivées fractionnaires). A notre connaissance, c'est la première fois que la représentation diffusive est considérée conjointement avec l'équation de Burgers. Enfin, une stratégie de splitting a assuré une condition CFL optimale pour un schéma explicite. L'approche proposée est numériquement efficace : la condition de stabilité CFL n'est régie que par la non-linéarité (comme usuellement pour l'équation de Burgers), et un nombre minimum d'inconnues supplémentaires est nécessaire pour discrétiser les dérivées fractionnaires.

Ce travail a été motivé par la configuration expérimentale montrée en Fig. 1, déjà utilisée dans le régime linéaire

de propagation [26, 27] et actuellement étudiée dans le régime non linéaire. Notre objectif était de fournir une modélisation numérique efficace et précise, validant (ou non) le modèle (1) et les hypothèses sous-jacentes. Les expériences numériques ont montré un très bon accord avec les résultats expérimentaux.

Une extension de notre travail concerne le cas où la hauteur  $H$  de chaque résonateur varie en fonction de la position, conduisant à coefficients variables dans (1). Numériquement, ceci nécessite une étape de régularisation en construisant des fonctions continues  $e(x)$ ,  $g(x)$  et  $h(x)$ , par exemple avec des splines cubiques. Cette extension permettra d'étudier numériquement la propagation de solitons acoustiques dans des milieux aléatoires [28].

## Remerciements

Cette étude a été soutenue par l'Agence Nationale de la Recherche à travers le projet ANR ProCoMedia, projet ANR-10-0914-INTB.

## Références

- [1] N. SUGIMOTO, *Burgers equation with a fractional derivative; hereditary effects on nonlinear acoustic waves*, J. Fluid. Mech., 225 (1991), 631-653.
- [2] N. SUGIMOTO, *Propagation of nonlinear acoustic waves in a tunnel with an array of Helmholtz resonators*, J. Fluid. Mech., 244 (1992), 55-78.
- [3] N. SUGIMOTO, *Acoustic solitary waves in a tunnel with an array of Helmholtz resonators*, J. Acoust. Soc. Am., 99-4 (1996), 1971-1976.
- [4] N. SUGIMOTO, M. MASUDA, J. OHNO, D. MOTOL, *Experimental demonstration of generation and propagation of acoustic solitary waves in a air-filled tube*, Phys. Rev. Lett., 83-20 (1999), 4053-4056.
- [5] N. SUGIMOTO, M. MASUDA, K. YAMASHITA, H. HORIMOTO, *Verification of acoustic solitary waves*, J. Fluid. Mech., 504 (2004), 271-299.
- [6] M. TODA, *Nonlinear waves and solitons*, Kluwer Academic Publisher Group, 1989.
- [7] T. TAO, *Why are solitons stable?*, Bull. Amer. Math. Soc. 46 (2009), 1-33.
- [8] D. MATIGNON, *An introduction to fractional calculus, Scaling, Fractals and Wavelets* (Digital Signal and Image Processing Series), ISTE-Wiley, 2008.
- [9] R. J. LEVEQUE, *Numerical methods for conservation laws*, 2nd edition, Birkhäuser-Verlag, 1992.
- [10] L. YUAN, O. M. AGRAWAL, *A numerical scheme for dynamic systems containing fractional derivatives*, J. Vibr. Acoust., 124 (2002), 321-324.
- [11] J. F. LU, A. HANYGA, *Wave field simulation for heterogeneous porous media with singular memory drag force*, J. Comput. Phys., 208 (2005), 651-674.
- [12] A. C. GALUCIO, J. F. DEÛ, S. MENGUÉ, F. DUBOIS, *An adaptation of the Gear scheme for fractional derivatives*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 195 (2006), 6073-6085.
- [13] K. DIETHELM, *An investigation of some nonclassical methods for the numerical approximation of Caputo-type fractional derivatives*, Numer. Algor., 47 (2008), 361-390.
- [14] J. F. DEÛ, D. MATIGNON, *Simulation of fractionally damped mechanical systems by means of a Newmark-diffusive scheme*, Comput. Math. App., 59 (2010), 1745-1753.
- [15] C. BIRK, C. SONG, *An improved non-classical method for the solution of fractional differential equations*, Comput. Mech., 46 (2010), 721-734.
- [16] B. LOMBARD, J.F. MERCIER, *Numerical modeling of nonlinear acoustic waves in a tube with Helmholtz resonators*, J. Comput. Phys., 259 (2014), 421-443.
- [17] W. CHESTER, *Resonant oscillations in closed tubes*, J. Fluid Mech., 18 (1964), 44-64.
- [18] P. MONKEWITZ, N. M. NGUYEN-Vo, *The response of Helmholtz resonators to external excitation. Part 1. Single resonators*, J. Fluid Mech., 151 (1985), 477-497.
- [19] P. MONKEWITZ, *The response of Helmholtz resonators to external excitation. Part 2. Arrays of slit resonators*, J. Fluid Mech., 156 (1985), 151-166.
- [20] L. MENGUY, J. GILBERT, *Weakly non-linear gas oscillations in air-filled tubes; solutions and experiments*, Acustica, 86 (2000), 798-810.
- [21] I. PODLUBNY, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, 1999.
- [22] E.F. TORO, *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. A Practical Introduction*, Springer-Verlag, 1999.
- [23] F. KAPPEL, A. KUNTSEVICH, *An implementation of Shor's r-algorithm*, Comput. Optim. Appl., 15-2 (2000), 193-205.
- [24] A. REKIK, R. BRENNER, *Optimization of the collocation inversion method for the linear viscoelastic homogenization*, Mech. Res. Comm., 38 (2011), 305-308.
- [25] N. SHOR, *Minimization Methods for Non-Differentiable Functions*, Springer-Verlag, 1985.
- [26] O. RICHOUX, C. DEPOLLIER, J. HARDY, *Propagation of mechanical waves in a one-dimensional nonlinear disordered lattice*, Phys. Rev. E 73 (2006), 026611.
- [27] O. RICHOUX, V. TOURNAT, T. LE VAN SUU, *Acoustic wave dispersion in a one-dimensional lattice of nonlinear resonant scatterers*, Phys. Rev. E, 75-2 (2007), 026615.
- [28] J. GARNIER, *Asymptotic transmission of solitons through random media*, SIAM J. Appl. Math., 58-6 (1998), 1969-1995.