

Diffusion due à une terminaison Trou Noir Acoustique imparfaite dans un guide d'onde structural

V. Denis, F. Gautier et A. Pelat

LAUM, UMR-CNRS 6613, Université du Maine, Av. O. Messiaen, 72085 Le Mans, France
vivien.denis.etu@univ-lemans.fr

Les ondes des flexions se propageant dans une poutre peuvent être efficacement absorbées si une extrémité est affinée quadratiquement et couverte avec un film viscoélastique fin. Une telle terminaison induit un effet "Trou Noir Acoustique", conséquence des caractéristiques de propagations des ondes de flexion dans une structure d'épaisseur inhomogène : si l'épaisseur décroît localement, les ondes de flexion ralentissent et leur amplitude augmente, ce qui conduit à une dissipation efficace de l'énergie si un film absorbant est placé sur la zone d'épaisseur minimale.

La réalisation pratique d'une telle extrémité profilée diffère du cas idéal car la fabrication d'épaisseurs aussi faibles est difficile et mène à des imperfections. Par ailleurs, alors que le comportement des ondes est unidimensionnel dans la partie homogène de la poutre, un comportement transverse est observé dans son extrémité profilée. Cette diffusion d'une onde incidente sur des modes d'ordres supérieurs peut être imputée aux irrégularités de l'extrémité. Des modèles d'un guide d'ondes de flexion multimodal et inhomogène et d'une condition à la limite imparfaite sont présentés dans cet article. A partir d'un exemple d'imperfection simple, les résultats en termes de matrices de diffusion et de champs de déplacement montrent l'importance de la qualité de fabrication d'une terminaison Trou Noir expérimentale.

1 Introduction

L'amortissement des vibrations dans des structures comme les poutres ou les plaques est un aspect essentiel dans de nombreuses applications industrielles. Pour réduire ces vibrations, les méthodes classiques consistent à couvrir la structure avec des matériaux visco-élastiques lourds. L'efficacité de ces méthodes est démontrée et largement étudiée mais elles donnent lieu à un ajout de masse important, ce qui peut être rédhibitoire dans l'industrie des transports par exemple. Le développement de méthodes d'amortissement de vibration sans ajout de masse devient dans ce cas nécessaire.

Une de ces méthodes consiste à tirer partie de l'effet "Trou Noir Acoustique" (TN) [1, 2]. L'effet TN tire partie des propriétés des ondes de flexion dans une plaque d'épaisseur inhomogène : Mironov [3] montre qu'au voisinage du bord, si l'épaisseur diminue progressivement jusqu'à zéro, les ondes ralentissent et s'arrêtent sans être réfléchies au bord. La condition de variation de l'épaisseur est remplie avec une loi de puissance en x de la forme :

$$h(x) = \epsilon x^m, \quad (1)$$

où $m \geq 2$. Si l'épaisseur est nulle au bord, on peut montrer que le temps de vol d'une onde dans l'extrémité devient infini. Par conséquent, le coefficient de réflexion tend vers zéro. Malgré cette théorie prometteuse, les procédés de fabrication sont tels que l'épaisseur résiduelle à l'extrémité n'est jamais suffisamment faible que l'effet soit intéressant en pratique.

Toutefois, en recouvrant l'extrémité profilée avec un film visco-élastique fin, Krylov [1] montre, en utilisant les hypothèses de l'acoustique géométrique, que le film amortissant compense l'épaisseur finie de l'extrémité d'une structure réelle. Il obtient une expression analytique du coefficient de réflexion qui baisse drastiquement. Un modèle prenant en compte l'effet des ondes évanescents dans les structures 1D (poutres) est proposé par Georgiev et al. [2]. Les résultats montrent notamment que l'on peut optimiser les paramètres géométriques et matériaux du film visco-élastique. Ces travaux présentent également des résultats expérimentaux de TN circulaires, qui consistent en un développement axisymétrique du profil 1D, sur des plaques. D'autres travaux expérimentaux démontrent l'efficacité de diverses implémentations du TN circulaire sur des structures

de type plaque.

Les procédés de fabrication des extrémités TN sont tels qu'il est également très difficile d'obtenir un profil parfait, au sens où on peut déceler de nombreuses imperfections comme des déformations locales ou des déchirures de l'extrémité. La figure 1(a) montre les déchirures sur un trou noir 2D. Au vu de la finesse de l'extrémité, on peut suspecter que ces imperfections influent de manière non négligeable sur la propagation des ondes et par conséquent sur le comportement du TN. Par ailleurs, on constate que les poutres expérimentales ne se comportent localement plus comme des poutres mais présentent un comportement transverse du fait de la finesse de l'extrémité [4]; on peut constater un tel comportement sur la figure 1(b) : alors que le champ vibratoire est indépendant de la coordonnée transversale y (c'est-à-dire conforme aux hypothèses classiques de la théorie d'Euler-Bernoulli) dans la partie homogène de la structure, ce n'est plus le cas dans l'extrémité TN, où le champ présente des variations transversales. Des couplages entre ondes transverses sont à l'origine de ce phénomène et peuvent avoir une influence sur le coefficient de réflexion de l'extrémité ou de façon équivalente sur le coefficient d'amortissement de la poutre traitée par un TN.

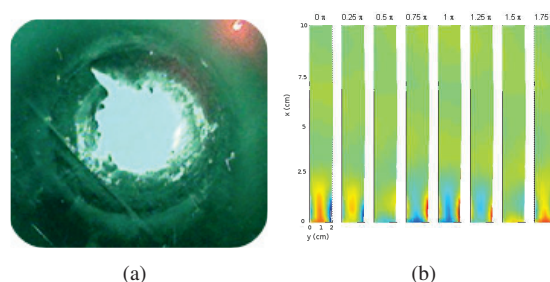


FIGURE 1 – (a) Extrémité réelle déchirée d'un profil TN 2D (b) Observation au vibromètre du champ de déplacement de l'extrémité d'une poutre TN à 1296 Hz.

Ce papier propose de déterminer l'effet d'une imperfection de l'extrémité sur le comportement du TN, en observant notamment le coefficient de réflexion de l'extrémité et les couplages entre modes transverses à l'extrémité. Dans la section 2, on propose une modélisation du problème, en précisant la forme de la solution recherchée.

Dans la section 3, on décrit la méthode numérique de résolution du problème. Enfin, les résultats obtenus en terme de coefficient de réflexion et de matrice de diffusion pour un cas d'imperfection sont discutés dans la section 4.

2 Théorie

2.1 Mise en équation

On considère une plaque fine de l'épaisseur variable selon la dimension x (figure 2). Dans le cas d'un mouvement harmonique (la dépendance temporelle $e^{j\omega t}$ est implicite dans toutes les équations) on peut décrire l'état du système par l'équation d'évolution suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = \mathbf{H} \mathbf{W}, \quad (2)$$

où \mathbf{W} est le vecteur d'état

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w(x, y) \\ \theta_x(x, y) \\ M_x(x, y) \\ V_x(x, y) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

et où la matrice d'évolution \mathbf{H} est donnée par

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -v \frac{\partial^2}{\partial y^2} & 0 & -1/D(x) & 0 \\ 0 & -2(v-1)D(x) \frac{\partial^2}{\partial y^2} & 0 & 1 \\ (-\rho(x)h(x)\omega^2 + D(1-v^2) \frac{\partial^4}{\partial y^4}) & 0 & -v \frac{\partial^2}{\partial y^2} & 0 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Les variables w , θ_x , M_x et V_x sont respectivement le déplacement transverse, la flèche selon x , le moment fléchissant selon x et l'effort tranchant selon x . $D(x)$ est la rigidité de la plaque, $h(x)$ est sa hauteur, $\rho(x)$ est sa masse volumique, variables selon x , et v est coefficient de Poisson. On peut d'ores et déjà considérer la plaque comme un guide d'onde de flexion suivant x . La rigidité de plaque $D(x)$ et la hauteur $h(x)$ décrivant le guide et leurs expressions sont données par (voir 2) :

$$h(x) = \begin{cases} h_0 \frac{(x+x_0)^m}{(x_0+x_{ABH})^m} & \text{si } x \leq x_{ABH} \\ h_0 & \text{si } x > x_{ABH} \end{cases} \quad (5)$$

et

$$D(x) = \frac{Eh(x)^3}{12\rho(1-v^2)}(1 - j\eta(x)), \quad (6)$$

où E est le module d'Young du matériau de la plaque et $\eta(x)$ est le facteur de perte dans la structure. Un modèle d'amortissement équivalent permet de prendre en compte simplement l'action du film visco-élastique (modèle de Ross-Ungar-Kerwin [5]) et rend ce facteur de perte dépendant de x via l'expression [1] :

$$\eta(x) = \begin{cases} \eta_p, & \text{si } x \leq x_l, \\ \eta_p + \frac{3E_l h_l}{Eh(x)}, & \text{si } x > x_l, \end{cases} \quad (7)$$

avec E_l le module d'Young du film visco-élastique et h_l son épaisseur.

Les deux bords suivant x sont simplement supportés et les deux bords suivant y sont libres mais la condition limite du bord $x = 0$ sera modifiée pour tenir compte de l'extrémité imparfaite. Ces aspects sont développés dans la suite.

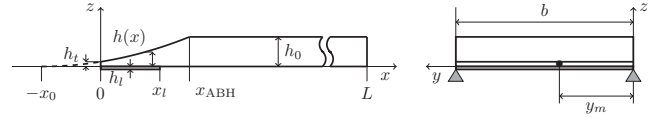


FIGURE 2 – Modèle de plaque TN : les bords suivant x sont simplement supportés, les bords suivant y sont libres. une masse ponctuelle figurant un défaut est placée au point $(0, y_m)$.

2.2 Développement d'une solution multimodale

Dans le cas de la plaque simplement supportée sur deux bords opposés, le champ vibratoire peut être écrit sous une forme à variables séparées et on peut ainsi écrire une solution comme une somme de produits de fonctions de poutres. On exprime chaque variable d'état $q(x, y)$ sous la forme du développement multimodal suivant :

$$q(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(x) \Psi_n(y) \quad (8)$$

où les $\Psi_n(y) = \sqrt{2} \sin(\frac{n\pi}{L}y)$ sont les modes d'une poutre simplement supportée. Ces modes sont orthogonaux et vérifient la relation

$$\frac{1}{b} \int_0^b \Psi_n(y) \Psi_m(y) dy = \delta_{nm} \quad (9)$$

où δ_{nm} le symbole de Kronecker et b est la largeur de la plaque. En utilisant cette expression de variable d'état et en projetant l'équation (2) sur les modes transverses, on obtient une équation d'évolution pour un vecteur d'état "multimodal" :

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \theta_x \\ \mathbf{M}_x \\ \mathbf{V}_x \end{bmatrix} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \theta_x \\ \mathbf{M}_x \\ \mathbf{V}_x \end{bmatrix}, \quad (10)$$

avec

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ -v\mathbf{I}_2 & \mathbb{O} & -\mathbb{I}/D & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & -2(v-1)D\mathbf{I}_2 & \mathbb{O} & \mathbb{I} \\ -\rho h \omega^2 \mathbb{I} + (1-v^2)D\mathbf{I}_4 & \mathbb{O} & -v\mathbf{I}_2 & \mathbb{O} \end{bmatrix} \quad (11)$$

où \mathbb{O} et \mathbb{I} désignent respectivement la matrice nulle et la matrice identité. Les matrices \mathbf{I}_2 et \mathbf{I}_4 sont telles que

$$I_{2nm} = \delta_{nm} \frac{1}{b} \int_0^b \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial y^2} \Psi_m dy \quad (12)$$

$$I_{4nm} = \delta_{nm} \frac{1}{b} \int_0^b \frac{\partial^4 \Psi_n}{\partial y^4} \Psi_m dy. \quad (13)$$

En notant

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_2 \\ \mathbf{H}_3 & \mathbf{H}_4 \end{bmatrix} \quad (14)$$

et en définissant l'impédance $\mathbf{Z}(x)$ comme

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_x \\ \mathbf{V}_x \end{bmatrix} (x) = j\omega \mathbf{Z}(x) \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \theta_x \end{bmatrix} (x), \quad (15)$$

on peut écrire de l'équation (10) sous la forme d'une équation de Riccati :

$$\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x} = -\mathbf{Z}\mathbf{H}_1 - j\omega \mathbf{Z}\mathbf{H}_2 \mathbf{Z} + \frac{\mathbf{H}_3}{j\omega} + \mathbf{H}_4 \mathbf{Z}. \quad (16)$$

De cette façon, la valeur de \mathbf{Z} à l'extrémité $x = 0$ est imposée par la condition libre $\mathbf{Z}(0) = 0$. Le problème aux conditions limites est écrit sous la forme d'un problème à condition initiale. La résolution d'une telle équation est présentée dans la section 3.

En écrivant le vecteur d'état sous la forme d'un développement en ondes [2], il est possible de définir la matrice réflexion à l'abscisse x_{ABH} . On peut également définir la matrice de diffusion \mathbf{S} :

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^- & \mathbf{R}^{+-} \\ \mathbf{R}^{+-} & \mathbf{T}^+ \end{bmatrix} \quad (17)$$

constituée des matrices transmission \mathbf{T}^- (transmission vers les x négatifs) et \mathbf{T}^+ (transmission vers les x positifs) et réflexion \mathbf{R}^{+-} et \mathbf{R}^{-+} .

2.3 Modélisation d'une imperfection à l'extrémité

Les imperfections et défauts d'une structure peuvent être modélisées de nombreuses manières. On choisit ici de décrire l'imperfection par une masse ponctuelle unique placée sur le bord $x = 0$ de la plaque (voir figure 2). Cela ne rend pas compte de la complexité d'une extrémité réelle mais est néanmoins suffisant pour modifier le comportement dans le guide en couplant les modes transverses. Il est également aisé de modéliser l'effet de cette masse en utilisant le formalisme décrit en 2.2.

Considérons une masse m_0 placée au point $(0, y_m)$. Le mouvement de cette masse vérifie

$$m_0 \ddot{w}(0, y_m) = -V_x(0, y_m) \quad (18)$$

où $V_x(0, y_m)$ est l'effort tranchant appliqué par la poutre sur la masse. L'expression de l'effort sur tout le bord $y = 0$ est donc

$$V_x(0, y) = m_0 \delta(y - y_m) \omega^2 w(0, y), \quad (19)$$

où $\delta(y - y_m)$ est la distribution de Dirac localisée en y_m . En utilisant le développement (8), et en projetant $V_x(0, y)$ sur les modes transverses, il vient

$$V_m = \sum_{n=1}^N \frac{w_n}{b} \int_0^b m_0 \delta(y - y_m) \omega^2 \Psi_m(y) \Psi_n(y) dy, \quad (20)$$

$$= \sum_{n=1}^N \frac{m_0 \omega^2 w_n \Psi(y_m) \Psi(y_m)}{b}. \quad (21)$$

A partir de la définition de la matrice impédance (15), on peut exprimer la condition à la limite en $x = 0$ comme une condition d'impédance imposée :

$$\mathbf{Z}(0) = \frac{m_0 \omega}{j b} \begin{bmatrix} \textcircled{0} & \textcircled{0} \\ \Psi_m(y_m) \Psi_n(y_m) & \textcircled{0} \end{bmatrix} \quad (22)$$

3 Résolution numérique

3.1 Méthode de Magnus

On utilise une méthode de Magnus [6] pour résoudre l'équation de Riccati (16). Cette technique a déjà été utilisée par Pagneux [7] pour un problème de guide acoustique

présentant des similarités. L'obtention de la solution numérique consiste à discrétiser le guide selon x avec un pas spatial Δ . On peut alors exprimer l'état en $t + 1$ en fonction de l'état en t :

$$\mathbf{W}_{t+1} = e^{\Omega_t} \mathbf{W}_t \quad (23)$$

où Ω_t est la matrice de Magnus qui s'écrit à l'ordre 2,

$$\Omega_n = \Delta \mathbf{H} \left(\frac{x_t + x_{t+1}}{2} \right). \quad (24)$$

En utilisant la notation

$$e^{\Omega_t} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 & \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{E}_3 & \mathbf{E}_4 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

on peut manipuler l'équation (23) pour obtenir un schéma itératif pour la matrice impédance \mathbf{Z} , qui donne une solution approximée à l'équation de Riccati :

$$\mathbf{Z}(\tilde{x}_{n+1}) = \frac{1}{j\omega} [\mathbf{E}_3 + \mathbf{E}_4 j\omega \mathbf{Z}(\tilde{x}_n)] [\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 j\omega \mathbf{Z}(\tilde{x}_n)]^{-1}. \quad (26)$$

De la même manière, on peut retrouver la matrice réflexion \mathbf{R}^{-+} de l'extrémité via \mathbf{Z} ou bien calculer la matrice de diffusion \mathbf{S} (comprenant réflexion et transmission) d'un tronçon de guide.

3.2 Convergence de la solution

La convergence de la solution proposée pour résoudre le problème est vérifiée en observant le coefficient R_{11}^{pp} , premier terme de la matrice \mathbf{R}^{-+} de l'expression (17), qui est utilisé dans la suite et représente la réflexion de l'onde propagative du mode 1 sur l'onde propagative retour de ce même mode : c'est la situation que l'on retrouve dans le cas d'une poutre TN expérimentale puisque seul le comportement plan est propagatif dans la partie homogène de la poutre. La figure 3 montre l'erreur

$$\frac{|R_N^{11} - R_{N=60}^{11}|^2}{|R_{N=60}^{11}|^2} \quad (27)$$

en fonction du nombre de modes N par rapport à un calcul effectué avec un grand nombre de modes (60 modes), moyennée sur 400 – 2000 Hz pour le cas avec défaut utilisé dans la section 4. Bien que la convergence soit lente, ce résultat est satisfaisant et les calculs ultérieurs seront effectués avec $N = 30$ modes.

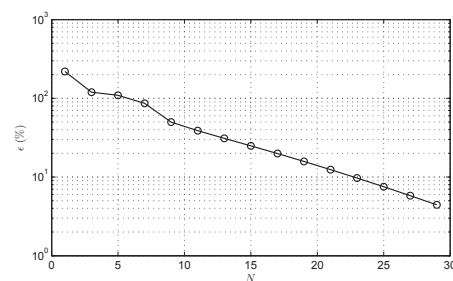


FIGURE 3 – Erreur sur le coefficient R_{11}^{pp} de la matrice \mathbf{R}^{-+} par rapport au calcul avec 60 modes.

4 Résultats du modèle

4.1 Caractéristiques du guide d'onde simulé

Le cas d'un guide TN en aluminium est modélisé ici. Les paramètres du modèle sont indiqués dans le tableau 1 ; les paramètres du film sont choisis de manière réaliste mais ne résultent pas de tests de caractérisation. On considère le cas où une seule masse est localisée au centre de l'extrémité $x = 0$. On peut en déduire que seul les modes d'indices impairs seront concernés par le couplage.

TABLEAU 1 – Paramètres du guide TN utilisés dans le modèle.

E_p	69.8 GPa
ρ	2700 kg/m ³
η	0.002
ν	0.3
E_l	7 GPa
η_l	0.2
h_0	1.5×10^{-3} m
h_l	10^{-4} m
x_0	0.0053 m
m	2
x_{ABH}	0.06 m
b	0.1 m
m_0	1.5×10^{-3} kg

4.2 Simulation du coefficient de réflexion du TN

La figure 4 représente les variations avec la fréquence du coefficient de réflexion R_{11} du mode 1 incident sur le mode 1 réfléchi pour différents cas. On constate sur cette figure que la réflexion sur une extrémité TN sans défaut et sans film visco-élastique est proche de 1. Ce n'est pas surprenant, et on sait que le TN non filmé n'est pas efficace. Le TN sans défaut recouvert d'un film donne un résultat intéressant puisque le coefficient de réflexion peut baisser jusqu'à atteindre 0.5 avec des oscillations ; ce résultat est comparable aux résultats obtenus par Georgiev [2].

Le cas de la terminaison TN sans film visco-élastique mais avec un défaut (masse localisée au centre) présente des minima très localisés en fréquence. En dehors de ces points, il prend les valeurs du cas sans défaut non filmé. En ajoutant un film à la terminaison TN avec défaut, on constate une baisse supplémentaire de $|R_{11}|$ par rapport au cas sans défaut ; cette baisse est de l'ordre de 0.1 à partir de 500 Hz. On note qu'on peut encore déceler la présence de minima locaux de la configuration sans film cependant ils sont moins localisés en fréquence.

4.3 Interprétation

L'observation du champ de déplacement dans la poutre TN aux fréquences des minima sur la figure 4 permet une meilleure compréhension. La figure 5 montre les champs de déplacement aux fréquences 702 et 855 Hz (second et troisième minima) quand seule la première composante transverse est excitée par la source, pour la configuration non filmée avec défaut. Les deux champs sont dominés respectivement par les composantes 5 et 7, présentes dans

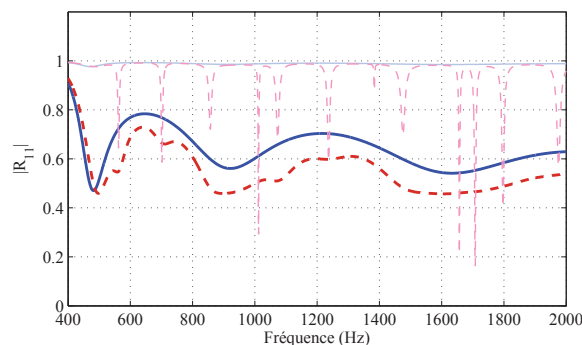


FIGURE 4 – Module du coefficient de réflexion $|R_{11}|$ pour les configurations suivantes : (1) sans défaut ni film visco-élastique (—), (2) sans défaut avec film (—), (3) avec défaut sans film (---) et (4) avec défaut et film (---)

l'extrémité TN. L'analyse de la matrice S de la terminaison TN permet par ailleurs la détermination des fréquences propres associées aux modes piégés (déjà décrits dans [4]). Ces fréquences propres sont voisines des fréquences des minima de la figure 4 et les modes propres associés sont dus aux composantes dominantes dans le champ de déplacement. On peut en déduire que les minima du coefficient de réflexion sont liées à des phénomènes de résonances locales, dans lesquels le défaut permet l'excitation d'un mode propre local de la structure.

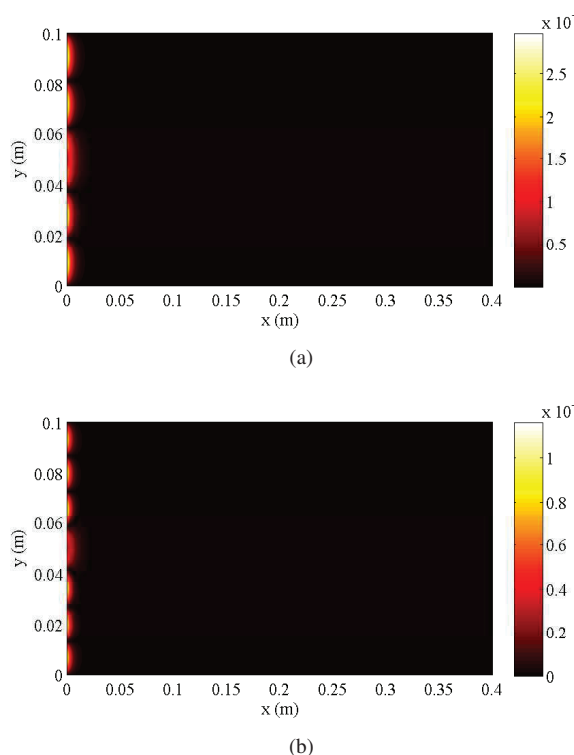


FIGURE 5 – Champ de déplacement dans la poutre TN sans film avec défaut à (a) 702 Hz et à (b) 855 Hz quand la première composante transverse est excitée par la source (guide de longueur $L = 0.4$ m).

On comprend mieux ce phénomène d'excitation des modes propres piégés en observant la matrice réflexion de la condition limite imparfaite sur la figure 6(a). Ses composantes sont les coefficients de couplages des modes et

dans le cas présenté la plupart de ces coefficients ne sont pas nuls, ce qui signifie qu'une composante transverse incidente est partiellement réfléchi sur une composante transverse d'indice différent. Par ailleurs, on constate sur cette figure que la masse placée au centre ne couple que les modes d'indice impair.

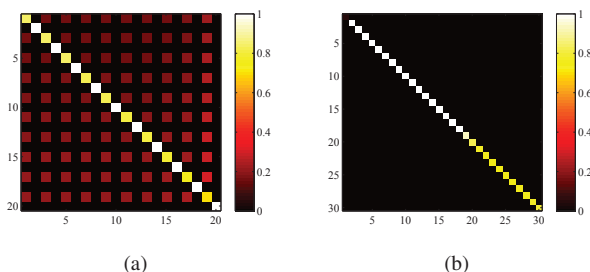


FIGURE 6 – (a) $|R^{-+}|$ (ondes propagatives) de l'extrémité $x = 0$ à 1012 Hz limitée aux 20 modes transverses propagatifs à l'extrémité (b) $|R^{+-}|$ (ondes propagatives) du tronçon TN à 1012 Hz

La matrice de réflexion R^{+-} du tronçon TN (voir figure 6(b)) permet de se rendre compte que la plupart des composantes propagatives voyageant dans le sens des x positifs sont complètement réfléchies le long du tronçon, dans le sens des x négatifs. Elles ne sont en effet plus propagatives au delà d'une certaine épaisseur. Les modes transverses d'ordre élevés sont ainsi confinés dans l'extrémité TN.

Le défaut permet donc la diffusion d'une onde incidente sur des composantes transverses d'ordre supérieur qui sont confinées dans la terminaison TN. Il existe des modes piégés dans l'extrémité qui sont liés à ces composantes transverses. Un mode piégé excité conduit à une brusque baisse du coefficient de réflexion puisque l'énergie incidente est dissipée en excitant le mode piégé. Ce comportement est exacerbé si la dissipation est élevée dans la zone TN, lorsqu'un film visco-élastique est ajouté. On interprète ainsi la baisse supplémentaire de 0.1 du coefficient de réflexion quand il y a un défaut sur la figure 4.

5 Conclusion

Cette étude présente un modèle multimodal de guide d'onde inhomogène muni d'une extrémité Trou Noir présentant un défaut simple. L'objectif est ici d'analyser le comportement d'une terminaison Trou Noir de façon à terme, à tier le meilleur parti pour limiter le caractère résonant de la structure sur laquelle cette terminaison TN est réalisée. A l'aide d'une résolution numérique, on observe qu'un défaut à l'extrémité libre du TN affecte le coefficient de réflexion de manière importante. La présence du défaut permet en effet l'excitation de modes locaux par couplage à l'extrémité. Tandis que l'effet est très localisé en fréquence quand l'amortissement est faible, son effet est bien moins localisé en fréquence quand l'amortissement est augmenté au moyen du film visco-élastique placé à l'extrémité. Au vu de ces résultats, il est probable que les imperfections à l'extrémité d'une structure TN réelle participent de façon

importante à l'efficacité du dispositif.

Références

- [1] V. V. Krylov, F. J. B. S. Tilman, Acoustic 'black holes' for flexural waves as effective vibration dampers, *Journal of Sound and Vibration* **274**, 605-619 (2004).
- [2] V. B. Georgiev, J. Cuenca, F. Gautier, L. Simon, V. V. Krylov, Damping of structural vibrations in beams and elliptical plates using the acoustic black hole effect, *Journal of Sound and Vibration* **330**, 2497-2508 (2011).
- [3] M. A. Mironov, Propagation of a flexural wave in a plate whose thickness decreases smoothly to zero in a finite interval, *Soviet Physics : Acoustics* **34**, 318-319 (1988).
- [4] V. Denis, A. Pelat, F. Gautier, B. Elie, Modal Overlap Factor of a beam with an acoustic black hole termination, *Journal of Sound and Vibration* **333**, 2475-2488 (2014).
- [5] D. Ross, E. L. Ungar, E. M. Kerwin, Damping of plate flexural vibrations by means of viscoelastic laminae, *J. E. Ruzicka : Structural Damping*, 49-57 (1960).
- [6] A. Iserles, A. Martinsen, S. P. Norset, On the implementation of the method of magnus series for linear differential equations, *BIT Numerical Mathematics* **39**, 281-304 (1999).
- [7] V. Pagneux, Multimodal admittance method in waveguides and singularity behavior at high frequencies, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **234**, 1834-1841 (2010).