



Fonction de transfert de petits éléments acoustiques réalisés par association de tubes convergents-divergents en fluide thermo-visqueux au repos

P. Honzík^{a,b}, F. Fohr^c et M. Bruneau^a

^aLaboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine UMR CNRS 6613, Avenue Olivier Messiaen, 72085 Le Mans, France

^bCzech Technical University in Prague, Faculty of Transportation, Konviktská 20, 110 00 Praha 1, République tchèque

^cCTTM, Département Acoustique, 20 rue Thalès de Milet, 72000 Le Mans, France
petr.honzik@gmail.com

Le système étudié comporte une succession de petits tubes "étroits" (ou fentes) convergents-divergents qui forme un guide acoustique axisymétrique de section dépendant du point de l'axe, à pente croissante ou décroissante (ou fente à épaisseur dépendant du point), dont les propriétés sont plus ou moins proches de celles d'un système composé de tubes à sections circulaires données (ou fentes à épaisseurs données) et de petites cavités placés en cascade. Les dimensions du système et le domaine de fréquences considéré sont tels que les effets des couches limites thermo-visqueuses peuvent prendre au moins autant d'importance que ceux d'inertie et de compressibilité. Ces configurations dépendent de paramètres supplémentaires, en regard de simples tubes (ou fentes) et cavités, qui peuvent permettre de contraindre la variation de la fonction de transfert en fonction de la fréquence à entrer dans un gabarit donné, alors même qu'un tel objectif peut être difficile à atteindre autrement.

1 Introduction

L'étude comporte trois volets. D'abord, les profils des petits éléments de guide recherchés sont créés analytiquement à partir d'une courbe génératrice unique dépendant de trois paramètres (diamètre d'entrée, longueur de l'élément, et paramètre de courbure à pente positive) ; le guide complet, à génératrice de pentes alternativement nulles, croissantes et décroissantes (pentes pouvant évoluer entre zéro et l'infini), est alors modélisé par simples changements de variables, puis par association en cascade de ces courts éléments, sans saut de pente du profil. Ensuite, une étude paramétrique simple effectuée à partir d'un modèle en ondes planes et d'une matrice de transfert pour chaque petit élément, montre comme attendu l'importance du paramètre de courbure dans le réglage des propriétés recherchées. Enfin, les résultats d'une étude expérimentale, sur une configuration "divergent-convergent", permettent de vérifier les possibilités que peuvent offrir ces systèmes.

2 Description analytique de la forme des éléments axisymétriques

Les structures considérées ci-dessous sont constituées de tubes 2D évasés axisymétriques. Le profil de base dans le plan (u, v) présenté sur la figure 1, à partir duquel les formes analytiques des tubes évasés considérés sont exprimées, est représenté par une courbe partant du point de coordonnées $(u=0, v=0)$ à pente croissante, la coordonnée curviligne normalisée à l'unité étant notée $w [w \in (0,1)]$. A l'extrémité ($w=1$) de la courbe, l'angle θ entre la tangente à la courbe et l'axe u est noté $\theta = \theta_0$, avec $0 < \theta_0 < \pi/2$, la valeur $\theta_0 = 0$ correspondant à un tube cylindrique et la valeur $\theta_0 = \pi/2$ à un tube évasé à pente infinie à son extrémité (ce qui est important dans le modèle mis en place ici).

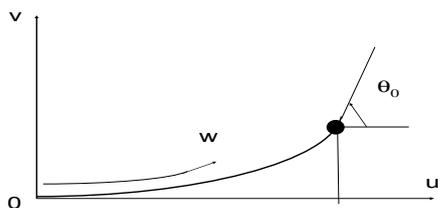


Figure 1 : Profil de base dans le plan (u, v) à partir duquel les formes analytiques des tubes évasés sont exprimées.

La formulation analytique retenue ici pour de telles courbes est donnée par les expressions qui suivent, dans lesquelles le paramètre α est ajustable :

$$\begin{cases} u = \int_0^w \cos(\theta_0 t^\alpha) dt, \\ v = \int_0^w \sin(\theta_0 t^\alpha) dt. \end{cases} \quad (1.a-b)$$

Ces définitions impliquent les propriétés recherchées suivantes :

$$\begin{cases} (du)^2 + (dv)^2 = (dw)^2, \\ \operatorname{tg}(\theta) = dv/du = \operatorname{tg}(\theta_0 w^\alpha) \Rightarrow \theta = w^\alpha \theta_0. \end{cases} \quad (2.a-b)$$

A noter que cette représentation est une généralisation de l'expression de la clotoïde ou spirale de Cornu qui correspond à $\alpha = 2$.

Pour les tubes 2D évasés axisymétriques considérés ci-dessous, la coordonnée axiale est notée x , la coordonnée radiale r et l'angle entre la tangente à la courbe et l'axe x est noté b . Aux extrémités de la courbe, respectivement en $(z/|z| = -1)$ et $(z = 0)$ (voir ci-dessous), la coordonnée x vaut respectivement $x = -L$ et $x = 0$, la coordonnée r est donnée respectivement par $R(-L)$ et $R(0)$ avec $|R(-L) - R(0)| = H$, et l'angle b est soit nul soit noté b_0 .

En partant de l'approche analytique présenté ci-dessus (1.a-b et 2.a-b), différentes formes de tubes évasés peuvent être modélisées dans le plan (R, x) , fonctions du changement de variables retenu. Les quatre cas utiles, présentés sur la figure 2, correspondent respectivement aux relations qui suivent, dans lesquelles les paramètres U , V et E sont définis par

$$U = \int_0^1 \cos(\theta_0 t^\alpha) dt, \quad V = \int_0^1 \sin(\theta_0 t^\alpha) dt, \quad E = \frac{U}{L} \frac{H}{V} : (3)$$

- i. tube divergent à pente horizontale à gauche en $x = -L$ (Figure 2.a)
 $x = (u-U)(L/U)$, $R(x) = R(-L) + v(H/V)$, (4)
- ii. tube convergent à pente horizontale à gauche en $x = -L$ (Figure 2.b)
 $x = (u-U)(L/U)$, $R(x) = R(-L) - v(H/V)$, (5)

iii. tube divergent à pente horizontale à droite en $x = 0$ (Figure 2.c)

$$x = -u(L/U), \quad R(x) = R(0) - v(H/V), \quad (6)$$

iv. tube convergent à pente horizontale à droite en $x = 0$ (Fig. 2.d)

$$x = -u(L/U), \quad R(x) = R(0) + v(H/V). \quad (7)$$

Notons que l'angle β peut être exprimé par

$$tg(\beta) = E tg(\theta_0 w^\alpha) \quad (8.a)$$

pour les configurations i) et iii) et par

$$tg(\beta) = -E tg(\theta_0 w^\alpha) \quad (8.b)$$

pour les configurations ii) et iv).

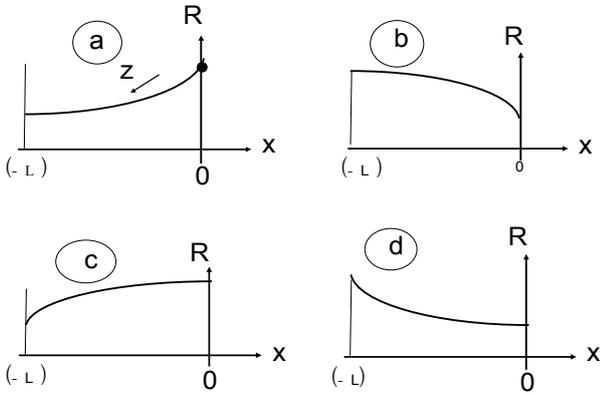


Figure 2 : Différentes formes de tubes évasés qui peuvent être modélisés dans le plan (R, x) .

Un exemple de tube à section variable qui peut être créé analytiquement à partir de ces configurations est présenté figure 3, pour des valeurs données des paramètres θ_0 et α , qui montre en particulier que les notations sur l'axe des x sont définies pour chaque élément.

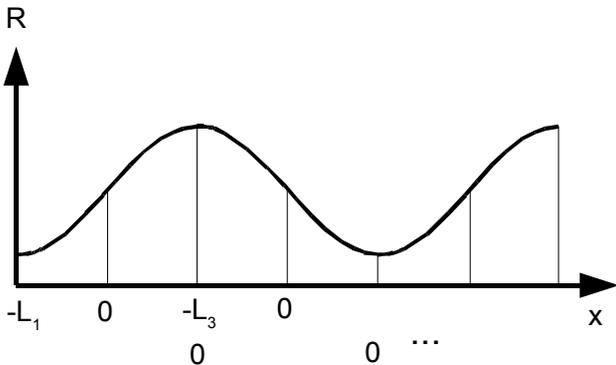


Figure 3 : Exemple de tube à section variable créé à partir de plusieurs configurations de tubes évasés.

3 Comportement des tubes étroits à section variable : résultats analytiques et numériques

3.1 Solution analytique

La méthode utilisée [1] pour résoudre l'équation de propagation dans chaque tube évasé

$$\left[\partial_{xx}^2 + \sigma(x) \partial_x + k_0^2 f(x) \right] p(x) = 0, \quad (9)$$

où $\sigma(x)$ et $f(x)$ représentent les effets des couches limites thermo-visqueuses, repose au départ sur le changement de variable suivant, qui permet de faire disparaître la dérivée spatiale d'ordre "un" :

$$x \rightarrow \xi(w) = \varepsilon \frac{L}{U} \int_0^w \frac{F_v(0) R^2(0)}{F_v(t) R^2(t)} \cos(\theta_0 t^\alpha) dt \quad (10)$$

où $e = +1$ pour les cas représentés par les équations (4 et 5) et où $e = -1$ pour ceux représentés par les équations (6 et 7), et où F_v représente les phénomènes dans les couches limites visqueuses. La forme de solution retenue repose sur l'équation intégrale de Volterra

$$\begin{cases} \partial_\xi p(\xi) = \partial_\xi p(0) - k_0^2 \int_0^\xi \phi(\zeta) p(\zeta) d\zeta, \\ p(\xi) = p(0) + \partial_\xi p(0) \xi - k_0^2 \int_0^\xi (\xi - \zeta) \phi(\zeta) p(\zeta) d\zeta, \end{cases} \quad (11)$$

où $\phi(x)$ traduit les effets thermo-visqueux. Finalement, pour les longueurs d'ondes très supérieures à la longueur (L) des composants, le dernier terme de l'équation (11) est très petit en regard de la solution à l'ordre "0" $p_0 = p(0) + \partial_\xi p(0) \xi$ et, par suite, l'approximation de Born peut être retenue, à savoir

$$\begin{aligned} p(\xi) &\cong p(0) + \partial_\xi p(0) \xi \\ &- k_0^2 \int_0^\xi (\xi - \zeta) \phi(\zeta) [p(0) + \partial_\xi p(0) \zeta] d\zeta, \\ \partial_\xi p(\xi) &\cong \partial_\xi p(0) - k_0^2 \int_0^\xi \phi(\zeta) [p(0) + \partial_\xi p(0) \zeta] d\zeta \end{aligned} \quad (12)$$

ce qui permet d'exprimer la matrice de transfert de chaque élément évasé.

Au final, le comportement acoustique du tube à section variable complet est décrit par une matrice de transfert globale, produit des matrices de transfert de chacune des parties (deux parties successives étant séparées par le changement de courbure, au point d'inflexion), qui permet d'exprimer notamment la fonction de transfert globale et l'impédance d'entrée. A noter que les discontinuités géométriques entre les tubes étroits et les cavités, quand elles apparaissent, sont modélisées à partir du formalisme en usage (masse additionnelle) [2, 3].

3.2 Simulation numérique

La simulation numérique mise en œuvre ici, qui permet de contrôler les résultats analytiques approchés, repose sur une simulation 2-D qui fait usage d'un maillage adaptatif et qui tient compte des effets de couches limites thermo-visqueuses [4]. La formulation linéaire utilisée repose sur un couple d'équations satisfaites par les variables vitesse particulaire v et écart instantané de température t (la pression acoustique p étant exprimée en fonction de ces deux variables) [5]. Ces deux variables satisfont des conditions de Dirichlet sur les parois rigides et isothermes ($v = 0, t = 0$). Une source harmonique virtuelle adiabatique ($\partial_n \tau = 0$) décrite par sa vitesse est placée à l'entrée $x = L$ du guide. Cette vitesse est distribuée de façon non-uniforme sur la section d'entrée du guide : elle possède le même profil que la vitesse particulaire analytique du fluide, qui tient compte des couches limites thermo-visqueuses [1]. En particulier cette vitesse de source s'annule en paroi du tube pour éviter toute discontinuité (condition de non-glissement) [6].

3.3 Résultats théoriques

La figure (4) montre le profil du tube divergent-convergent considéré ici dans trois configurations, deux d'entre elles correspondant à $a = 0.5$ et $a = 10$, et la troisième correspondant à la forme rectangulaire. Les valeurs minimale et maximale du rayon sont respectivement égales à 0.5 mm and 3 mm, et les longueurs des deux parties du tube sont respectivement égales à 3 mm et 6 mm. La charge à la sortie du tube est une cavité cylindrique de rayon égal à 4 mm et de longueur égale à 4 mm (également).

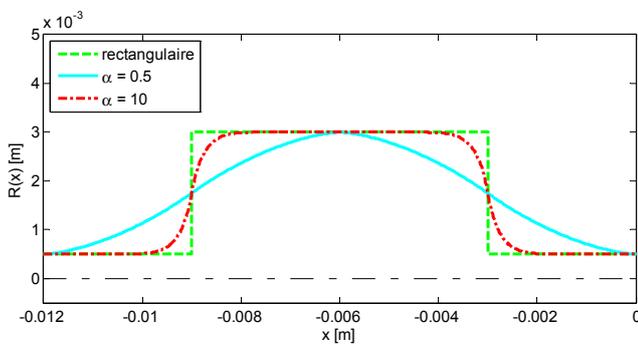


Figure 4 : Tube divergent-convergent de différents profils.

La figure (5) montre la fonction de transfert en pression, amplitudes (dB) et phases (rad) en fonction de la fréquence (échelle logarithmique). Les paramètres du fluide utilisés pour les calculs analytiques et numériques sont donnés dans le Tableau 1. Sur chaque figure la courbe verte en tirets, la courbe bleue en trait plein et la courbe rouge en tirets-points représentent les résultats analytiques respectivement pour le tube "rectangulaire", pour $a = 10$, et pour $a = 0.5$, et les points (.), les croix (+) et les (x) représentent les résultats des simulations numériques pour les mêmes formes respectivement. Ces résultats montrent que la valeur du paramètre a peut avoir une nette influence : sans modification significative du facteur de qualité et de l'amplitude des résonances, les fréquences de résonance peuvent être translatées de façon relativement importante.

Tableau 1: Paramètres du fluide.

Paramètre	Valeur	Unité
Pression statique P_0	101325	Pa
Température statique T_0	296,15	K
Masse volumique statique ρ_0	1,18	kg/m ³
Célérité du son c_0	349,5	m/s
Coefficient de viscosité de cisaillement μ	$1,83 \cdot 10^{-5}$	Pa s
Coefficient de viscosité de volume η	$1,098 \cdot 10^{-5}$	Pa s
Coefficient de conduction thermique λ	$24,4 \cdot 10^{-3}$	W/m/K
Rapport des chaleurs massiques γ	1,4	-
Chaleur massique par unité de masse à pression constante C_p	1010	J/kg/K

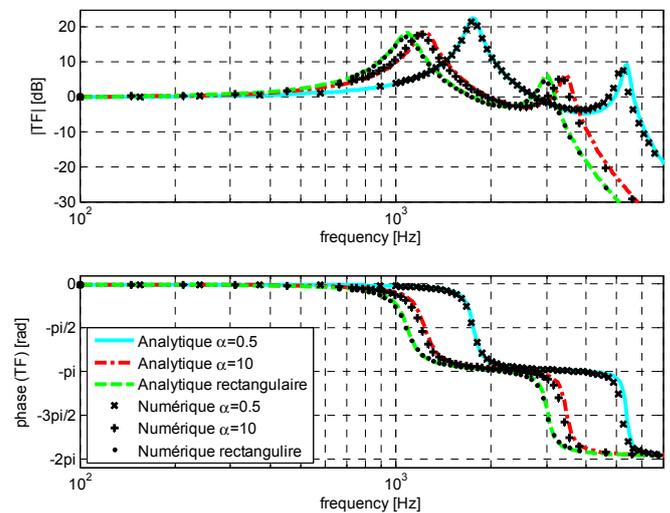


Figure 5 : (a) Amplitude (dB) et (b) phase (rad) de la fonction de transfert en pression du tube divergent-convergent, en fonction de la fréquence (échelle logarithmique).

Le système présenté sur la figure 6 est similaire à celui décrit ci-dessus à ceci près que le tube de sortie est remplacé par une paroi rigide isotherme. Les dimensions des éléments constitutifs sont les mêmes que dans le cas précédent : les valeurs minimale et maximale du rayon sont respectivement égales à 0.5 mm and 3 mm, et les longueurs des deux parties du tube sont respectivement égales à 3 mm et 6 mm. Ce système se comporte comme un résonateur de

Helmholtz dont la fréquence de résonance varie de façon relativement importante avec le paramètre a .

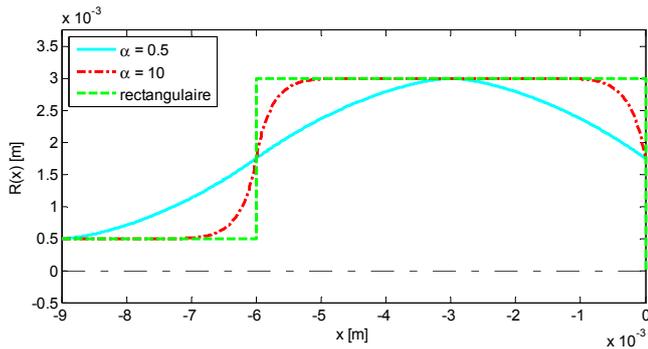


Figure 6 : Tube divergent-cavité fermée de différents profils.

Cette effet "résonateur" est représenté sur la figure 7 par l'impédance d'entrée (module et phase) de ce système en fonction de la fréquence (échelle logarithmique) pour $a = 0.5$ (courbe bleue en trait plein pour les résultats analytiques et croix en "x" pour les résultats numériques), pour $a = 10$ (courbe rouge en tirets-points pour les résultats analytiques et croix en "+" pour les résultats numériques), et pour la géométrie "rectangulaire" (courbe verte en tirets pour les résultats analytiques et points pour les résultats numériques).

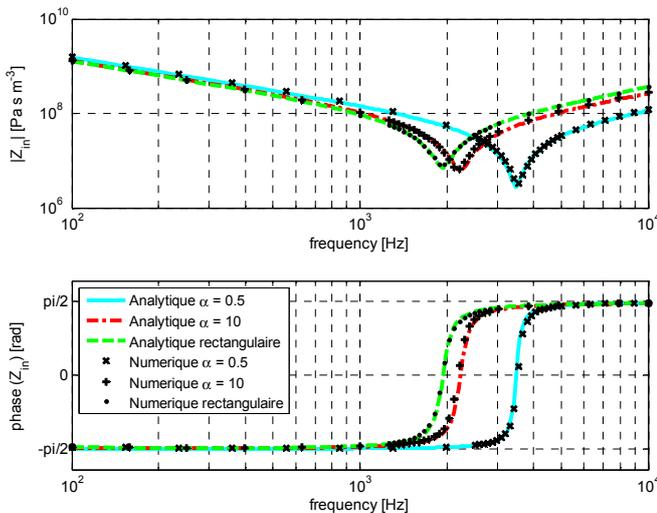


Figure 7 : (a) Amplitude (Pa s m^{-3}) et (b) phase (rad) de l'impédance d'entrée tube convergent-cavité fermée, en fonction de la fréquence (échelle logarithmique).

Dans les deux cas les résultats de l'approche analytique sont en très bon accord avec les résultats calculés numériquement (sans approximations). Ceci montre que les approximations retenues dans les calculs analytiques (notamment l'approximation de Born, éq. 12) restent valables, même pour ce type de géométrie.

4 Résultats expérimentaux, discussion

A fins de vérifications des résultats théoriques, une étude expérimentale a été menée sur deux guides, l'un

réalisé avec $a = 0.5$ et l'autre "rectangulaire" (Fig. 8). Pour ces dispositifs, les valeurs minimale et maximale du rayon sont respectivement égales à 1 mm and 10 mm, et les longueurs des deux parties du tube sont respectivement égales à 5 mm et 10 mm. La charge à la sortie du système est une cavité cylindrique de rayon égal à 6,65 mm et de longueur égale à 9 mm.

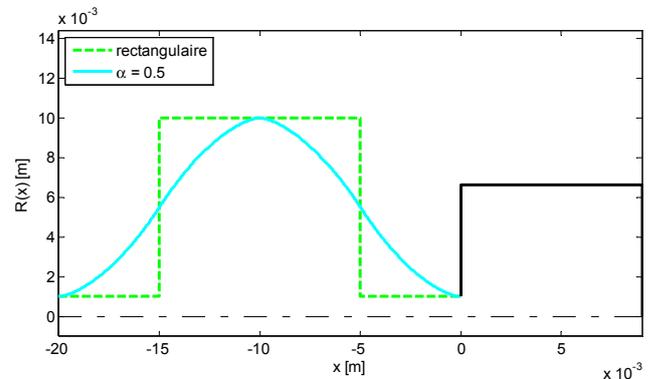


Figure 8 : Guide divergent-convergent expérimental avec $a = 0.5$ et "rectangulaire" chargé par une cavité cylindrique.

La fonction de transfert a été mesurée à l'aide de deux microphones : un "probe" microphone à l'entrée du système et un microphone demi-pouce au fond de la cavité cylindrique (voir Fig. 9). A noter qu'ici les deux discontinuités géométriques, à l'entrée et à la sortie du système, doivent être prises en compte dans le modèle analytique (masse additionnelle [2, 3]).

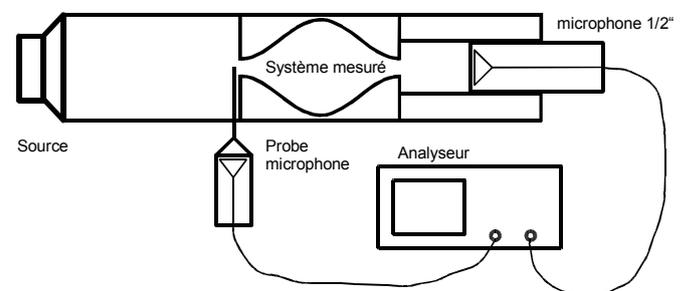


Figure 9 : Dispositif expérimental.

La comparaison entre les résultats théoriques et expérimentaux, présentée sur la Fig. 10, montre un bon accord entre ces résultats. Les positions des résonances sont très bien prévues par le modèle analytique. Les différences entre les amplitudes des résonances peuvent être expliquées par les incertitudes sur les dimensions et profils des pièces fabriquées et probablement par la sous-estimation de l'amortissement causé par les discontinuités géométriques à l'entrée et à la sortie du système dans le modèle analytique.

5 Conclusion

Les résultats obtenus montrent l'adéquation du modèle analytique approché à la description de ces petits guides dont le diamètre dépend de la coordonnée axiale, la forme de chaque élément ne dépendant que de trois paramètres. Ils montrent également la nette influence des valeurs de ces

paramètres sur le comportement de ces petits composants, ce qui présente un intérêt dans les situations où un "gabarit" est imposé pour le comportement en fonction de la fréquence.

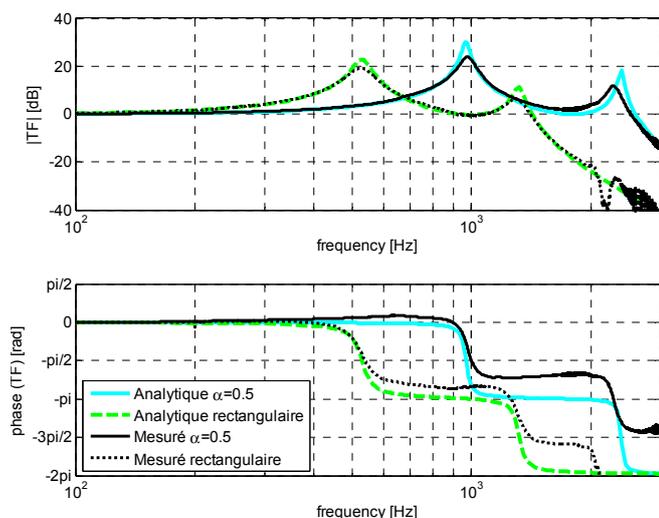


Figure 10 : (a) Amplitude (dB) et (b) phase (rad) de la fonction de transfert en pression, en fonction de la fréquence (échelle logarithmique) : comparaison entre résultats théoriques et expérimentaux.

Références

- [1] P. Honzík, S. Durand, N. Joly, M. Bruneau, On the Acoustic Transfer Function of Slowly Tapered Small Horns Filled With Thermo-Viscous Fluid, *Acta Acustica united with Acustica* **99**, 694-702 (2013)
- [2] A. Chaine, J. Kergomard, *Acoustique des instruments de musique*, Belin, Paris (2008)
- [3] R. Caussé, J. Kergomard, X. Lurton, Input impedance of brass musical instrument – Comparison between experiment and numerical models, *J. Acoust. Soc. Am* **75**, 241 – 254 (1984)
- [4] N. Joly, Finite element modeling of thermoviscous acoustics on adapted anisotropic meshes: Implementation of the particle velocity and temperature variation, *Acta Acustica united with Acustica* **96**, 102-114 (2010)
- [5] N. Joly, M. Bruneau, R. Bossart, Coupled equations for particle velocity and temperature variation as the fundamental formulation of linear acoustics in thermo-viscous fluid at rest, *Acta Acustica united with Acustica* **92**, 202-209 (2006)
- [6] P. Honzík, N. Joly, S. Durand, D. Rodrigues, J.-N. Durocher, M. Bruneau, Finite element modelling of acoustic field inside small components: Application to an annular slit terminated by an aperture in an infinite screen. *Metrologia* **49**, 32–40 (2012)