



## **Modélisation analytique et numérique d'un microphone MEMS circulaire ou rectangulaire à électrode arrière de taille réduite**

A. Podkovskiy<sup>a</sup>, P. Honzík<sup>a,b</sup>, S. Durand<sup>a</sup>, N. Joly<sup>a</sup> et M. Bruneau<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine UMR CNRS 6613, Avenue Olivier Messiaen, 72085  
Le Mans, France

<sup>b</sup>Czech Technical University in Prague, Faculty of Transportation, Konviktská 20, 110 00 Praha 1,  
République tchèque

alexey.podkovskiy.etu@univ-lemans.fr

Le transducteur électrostatique étudié est constitué d'une membrane circulaire ou rectangulaire, d'une électrode arrière centrée de même forme mais de dimensions plus petites qui délimitent une très fine couche de fluide, et d'une petite cavité située à la périphérie de l'électrode et de dimensions extérieures très proches de celles de la membrane. Outre que de telles configurations se prêtent très bien à une fabrication en technologie MEMS, elles présentent des avantages, en regard des conceptions classiques, en termes de sensibilité et de bande passante.

Un modèle analytique a été développé, basé sur les développements modaux du champ de déplacement d'une membrane circulaire et de la pression acoustique dans la fine couche de fluide et la cavité périphérique annulaire. Il permet la recherche préliminaire des dimensions optimales (approchées) d'un microphone MEMS à géométrie rectangulaire (dont la modélisation directe comporte des lacunes), soit en imposant les mêmes surfaces pour les deux membranes comme pour les deux électrodes, soit en faisant usage d'une méthode mieux adaptée à la recherche d'un optimum basée sur le comportement aux basses fréquences. L'optimisation finale de la géométrie du microphone est effectuée à l'aide d'un modèle numérique linéaire 3D qui n'admet plus les hypothèses simplificatrices du modèle analytique.

## 1 Introduction

Cet article a pour objectif de poursuivre la recherche sur la modélisation du microphone capacitif de géométrie originale (Figure 1) avec une électrode arrière de taille réduite [1, 2]. Cette architecture améliorée du transducteur a été pour beaucoup inspirée par les travaux précédents, menés dans le cadre d'une collaboration de plusieurs années entre le Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine et l'Université Technique de Prague [3, 4, 5, 6].

Le modèle analytique développé précédemment permet de décrire de manière précise l'effet de couplage fluide-structure entre la membrane de rayon  $R_M$  et l'air contenu dans l'espace inter-électrodes d'épaisseur  $h_g$  et dans la cavité périphérique d'épaisseur  $h_c$  autour de l'électrode centrale de rayon  $R_e$ . Ce modèle sert de base pour la construction du circuit équivalent acoustique, qui peut caractériser le comportement du système aux basses fréquences (en dessous de la fréquence propre du premier mode), tout en prenant en compte les phénomènes thermovisqueux.

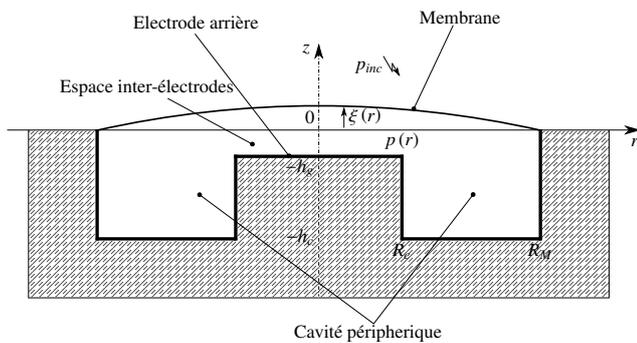


FIGURE 1 – Géométrie du transducteur.

Du point de vue de la microfabrication, la structure présente peut être réalisée avec les techniques classiques de gravure chimique humide anisotrope. Ce type de gravure sous-entend que la géométrie du transducteur usiné soit différente de celle modélisée par l'approche analytique. La modélisation numérique tridimensionnelle permet de résoudre cet inconvénient et d'affiner le dimensionnement du transducteur MEMS.

## 2 Modèle analytique : l'impédance d'entrée du transducteur

Selon l'analogie électro-acoustique, les comportements acoustique et mécanique du transducteur étudié peuvent être présentés sous la forme d'une impédance d'entrée  $Z$ . Plus précisément, il s'agit de l'impédance de la membrane chargée par les champs de pression acoustique extérieure  $p_{inc}$  et de pression  $p(r)$  à l'intérieur du transducteur. Le déplacement  $\xi(r)$  de cette membrane, encadrée sur sa périphérie  $r = R_M$  (condition aux limites de Dirichlet), vérifie l'équation

$$T(\Delta_r + K^2)\xi(r) = p_{inc} - p(r) \quad , \quad (1)$$

où  $K^2 = \omega^2 m_s / T$  est le carré du nombre d'onde de flexion,  $T$  la tension de la membrane,  $m_s$  et  $\omega$  sont respectivement la masse surfacique de la membrane et la pulsation. La solution générale de l'équation (1) prend la forme suivante

$$\xi(r) = \sum_n \xi_n \Psi_n(r) \quad (2)$$

avec

$$\Psi_n(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi} R_M J_1(K_n R_M)} J_0(K_n r) \quad (3)$$

et

$$\xi_n = \frac{1}{T(K^2 - K_n^2)} \iint_{S_M} (p_{inc} - p(r)) \Psi_n dS_M \quad , \quad (4)$$

où  $\xi_n$  est la valeur propre associée au mode  $n$ ,  $\Psi_n(r)$  la fonction propre associée,  $J_\nu(x)$  est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre  $\nu$  et  $K_n$  est une solution de l'équation  $J_0(K_n R_M) = 0$ . La pression acoustique  $p(r)$  à l'intérieur du transducteur peut être considérée comme un ensemble de deux pressions indépendantes : la pression dans l'espace inter-électrodes  $p_g(r)$  et la pression dans la cavité périphérique  $p_c$

$$p(r) = \begin{cases} p_g(r) & r \in (0, R_e) \\ p_c = const & r \in (R_e, R_M) \end{cases} \quad . \quad (5)$$

La variation de pression  $p_g(r)$  dans la zone entre l'électrode arrière et la membrane est décrite par l'équation de Helmholtz obtenue par une combinaison de l'équation de Navier-Stokes et de celle de Fourier sous certaines hypothèses (voir [1, 3, 7] pour les détails)

$$(\Delta_r + \chi^2) p_g(r) = \zeta \xi(r) \quad , \quad (6)$$

où le nombre d'onde complexe  $\chi$  et le coefficient de terme source  $\zeta$  s'écrivent

$$\chi = k_0 \sqrt{\frac{\gamma - (\gamma - 1)F_h}{F_v}} \quad \text{et} \quad \zeta = -\frac{\rho_0 \omega^2}{h_g F_v}, \quad (7)$$

où

$$F_{h,v} = 1 - \frac{\tan(k_{h,v} \frac{h_g}{2})}{k_{h,v} \frac{h_g}{2}}, \quad (8)$$

$$k_v = \sqrt{-\frac{jk_0}{\ell'_v}}, \quad k_h = \sqrt{-\frac{jk_0}{\ell_h}}, \quad k_0 = \frac{\omega}{c_0}. \quad (9)$$

Les propriétés physiques du fluide sont exprimées par la densité  $\rho_0$ , la célérité adiabatique du son  $c_0$ , l'indice adiabatique  $\gamma$ , les longueurs caractéristiques visqueuse  $\ell'_v$  et thermique  $\ell_h$ . La pression dans la cavité périphérique du volume  $V_c = S_{eM} h_c$  est supposée être uniforme et définie comme

$$p_c = Z_c w_c, \quad (10)$$

où  $Z_c = \rho_0 c_0^2 / (j\omega V_c)$  est l'impédance acoustique de la cavité et  $w_c$  est le débit volumique acoustique à l'entrée de la cavité

$$w_c = -\frac{2\pi R_e h_g}{j\omega \rho_0} \partial_r p_g(R_e) F_v - j\omega \iint_{S_{eM}} \xi(r) dS_{eM}, \quad (11)$$

où  $S_{eM} = \pi(R_M^2 - R_e^2)$  représente la surface de la cavité périphérique.

L'impédance d'entrée du transducteur  $Z$  peut être déterminée comme le rapport entre la pression incidente  $p_{inc}$  et le produit de la surface de la membrane  $S_M$  par la vitesse moyenne de la membrane  $i\omega \bar{\xi}_{S_M}$  sur sa surface

$$Z = -\frac{p_{inc}}{i\omega \bar{\xi}_{S_M} S_M}, \quad (12)$$

où  $\bar{\xi}_{S_M}$  est le déplacement moyen de la membrane sur sa surface

$$\bar{\xi}_{S_M} = \frac{1}{S_M} \iint_{S_M} \xi(r) dS_M = \frac{2}{R_M^2 \sqrt{\pi}} \sum_n \frac{\xi_n}{K_n}. \quad (13)$$

Dans le but de développer le circuit équivalent qui représente le comportement du transducteur aux basses fréquences nous avons été conduits à formuler certaines hypothèses simplificatrices. Premièrement, seul le mode fondamental  $n = 1$  est conservé. Cette approximation est raisonnable car les microphones fonctionnent au-dessous de leur première fréquence de résonance. La deuxième simplification consiste à remplacer les termes contenant les fonctions de Bessel et  $\tan(k_{h,v} h_g / 2)$  par leurs développements limités d'ordre deux, en utilisant les logiciels de calcul symbolique. Cette approche permet d'établir un premier circuit équivalent avec un nombre d'éléments élevé. Par la suite une analyse qualitative de la topologie couplée avec l'analyse quantitative de la valeur d'impédance de chaque élément mène vers un schéma équivalent présenté en figure 2. Ici les termes  $L_m$  et  $C_m$  correspondent à l'impédance structurelle de la membrane, dont le comportement est réactif. Les autres éléments représentent une impédance "purement" acoustique comportant des résistances qui traduisent les effets visqueux

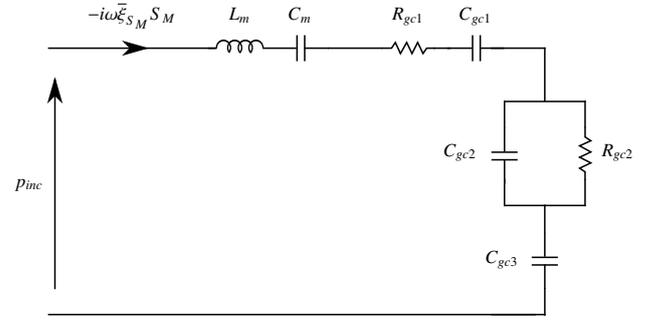


FIGURE 2 – Circuit électrique équivalent du transducteur.

dans l'espace inter-électrodes, ainsi que des capacités traduisant la compliance de l'air dans la cavité périphérique :

$$L_m = \frac{K_1^2}{4\pi} m_s, \quad C_m = \frac{4\pi}{K_1^4} \frac{1}{T}, \quad (14)$$

$$R_{gc1} = \frac{12\gamma\rho_0 c_0 \ell'_v (R_M^2 - R_e^2)}{\pi h_c h_g^2 K_1^4 R_M^4}, \quad C_{gc1} = \frac{\pi h_c R_M^2}{\rho_0 c_0^2}, \quad (15)$$

$$R_{gc2} = \frac{3\rho_0 c_0 \ell'_v R_e^2 (K_1^4 R_e^4 + 4K_1^2 R_e^2 + 16)}{4\pi h_g^3 K_1^2 R_M^4}, \quad (16)$$

$$C_{gc2} = \frac{16\pi\gamma h_g R_M^4}{\rho_0 c_0^2 R_e^2 (K_1^4 R_e^4 + 4K_1^2 R_e^2 + 16)}, \quad (17)$$

$$C_{gc3} = \frac{\pi h_c R_M^2 \left( \frac{h_c R_M^2}{(h_c - \gamma h_g) R_e^2} - 1 \right)}{\rho_0 c_0^2}. \quad (18)$$

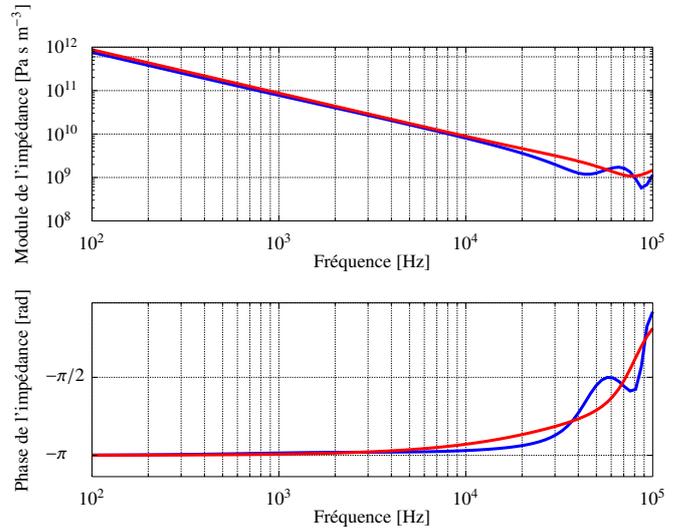


FIGURE 3 – Impédance d'entrée du transducteur selon l'approche analytique globale (en bleu) [2] et selon le circuit équivalent (en rouge).

L'allure des courbes d'impédance sur la figure 3 met en évidence une convergence entre les deux approches aux basses fréquences. Ce fait confirme que le présent circuit équivalent décrit correctement le comportement du système étudié en dessous de son premier mode de résonance. Le décalage de la résonance vers les hautes fréquences pour cette approche simplifiée conduit à une surestimation de la raideur globale du transducteur.

### 3 Adaptation de la géométrie circulaire à la géométrie carrée

Un modèle approché du transducteur à membrane carrée et électrode arrière carrée de petite taille peut être recherché sur la base du modèle du transducteur circulaire avec des paramètres équivalents. La relation entre les tensions des membranes carrée et circulaire est donnée par l'égalité des fréquences du premier mode dans le vide, soit

$$\frac{1}{a_M} \sqrt{\frac{T_\square}{m_s}} = \frac{j_0}{2\pi R_M^2} \sqrt{\frac{T_\circ}{m_s}} \quad , \quad (19)$$

où  $a_M$  est l'arête de la membrane carrée,  $T_\square$  et  $T_\circ$  sont respectivement les tensions des membranes carrée et circulaire et  $j_0$  est la première racine de la fonction de Bessel de première espèce d'ordre zéro  $J_0(x)$ .

La recherche des dimensions équivalentes est basée sur le comportement du transducteur aux basses fréquences. Le déplacement de la membrane carrée [7, 8] est simplifié compte tenu de ce que le premier mode de vibration  $\xi_1$  [6] est intégré sur la surface de l'électrode afin d'obtenir le déplacement moyen sur cette surface  $S_{e\Box}$

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_{e\Box} &= \frac{1}{S_{e\Box}} \iint_{S_{e\Box}} \xi_1(x, y) dS_e \\ &= \frac{p_{inc}}{T_\square} \frac{16 a_M^2}{\pi^4 a_e^2} \frac{2}{\frac{2\pi^2}{a_M^2} - \frac{\omega^2 m_s}{T_\square}} \left(1 - \cos \pi \frac{a_e}{a_M}\right) \quad , \quad (20) \end{aligned}$$

où  $a_e$  est l'arête de l'électrode. Le déplacement moyen de la membrane circulaire est exprimé comme

$$\bar{\xi}_{e\circ} = \frac{p_{inc}}{K_1 T_\circ} \left( \frac{2}{K_1 R_e} \frac{J_1(K_1 R_e)}{J_0(K_1 R_M)} - 1 \right) \quad . \quad (21)$$

En utilisant un développement limité pour les fonctions de Bessel et en prenant en compte le comportement aux très basses fréquences ( $\omega \rightarrow 0$ ), l'égalité de ces deux déplacements moyens donne l'expression du rayon de l'électrode circulaire équivalente

$$R_{e\Box}^2 = 2R_{e\Box}^2 - \frac{T_\circ}{T_\square} \frac{128 a_M^4}{\pi^6 a_e^2} \left(1 - \cos \pi \frac{a_e}{a_M}\right) \quad , \quad (22)$$

où  $R_{e\Box}^2 = a_M^2/\pi$  est le rayon de la membrane circulaire de surface équivalente à celle de la membrane carrée.

Comme la surface de l'électrode équivalente avec le rayon  $R_{e\Box}$  est plus petite que la surface de l'électrode carrée  $S_{e\Box}$ , le transducteur circulaire équivalent ne présente pas le même amortissement pour le premier mode que le transducteur carré si l'épaisseur de l'espace inter-électrodes du transducteur carrée  $h_{g\Box}$  reste la même que pour le transducteur circulaire. Pour garder le même amortissement, l'épaisseur de l'espace inter-électrodes équivalent  $h_{g\Box}$  est adaptée pour atteindre sa résistance spécifique [9]

$$r_{sp} = \frac{3\mu S_{e\Box}}{2\pi h_{g\Box}^3} \quad , \quad (23)$$

où  $\mu$  représente la viscosité de cisaillement. L'épaisseur de l'espace inter-électrodes équivalent peut alors être exprimée comme suit

$$h_{g\Box} = \left( \frac{3}{2} \mu \frac{R_{e\Box}^2}{r_{sp}} \right)^{\frac{1}{3}} \quad . \quad (24)$$

Si l'épaisseur de la cavité du transducteur carré  $h_{c\Box}$  reste identique à celle du transducteur circulaire équivalent, le volume de la cavité autour de l'électrode change dans le rapport des surfaces d'électrodes carrée et circulaire. Pour garder le même volume pour la cavité périphérique, on calcule l'épaisseur équivalente de la manière suivante

$$h_{c\Box} = \frac{V_{c\Box}}{\pi(R_M^2 - R_{e\Box}^2)} \quad , \quad (25)$$

où  $V_{c\Box} = (a_M^2 - a_e^2)h_{c\Box}$  est le volume de la cavité du transducteur carré.

### 4 Modèle numérique

Le microphone MEMS de géométrie carrée est aussi modélisé par une méthode numérique originale [10], basée sur la combinaison des équations classiques de l'acoustique (équation de Navier-Stokes, équation de conservation de la masse, équation de Fourier et loi de comportement du fluide) sous la forme d'un système de deux équations couplées ayant la vitesse particulière  $\mathbf{v}$  et la variation de la température  $\tau$  comme inconnues (avec la convention temporelle  $e^{j\omega t}$ )

$$\begin{aligned} -\omega^2 \mathbf{v} - \left( \frac{c_0^2}{\gamma} + j\omega c_0 \ell_v \right) \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} \\ + j\omega c_0 \ell'_v \operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathbf{v} + j\omega \frac{\hat{\beta}}{\rho_0} \mathbf{grad} \tau = \mathbf{0} \quad , \quad (26) \end{aligned}$$

$$j\omega \tau - \gamma \ell_h c_0 \operatorname{div} \mathbf{grad} \tau + \frac{\gamma - 1}{\gamma \hat{\beta}} \rho_0 c_0^2 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad , \quad (27)$$

avec les longueurs caractéristiques visqueuses et thermique du fluide

$$\ell_v = \frac{1}{\rho_0 c_0} \left( \frac{4}{3} \mu + \eta \right) \quad , \quad \ell'_v = \frac{\mu}{\rho_0 c_0} \quad , \quad (28)$$

$$\ell_h = \frac{\lambda_h}{\rho_0 c_0 C_P} \quad , \quad (29)$$

où  $\eta$  est la viscosité volumique,  $\lambda_h$ ,  $C_P$  et  $\hat{\beta}$  sont respectivement la conductivité thermique, la capacité thermique massique à pression constante et l'accroissement de pression par l'accroissement de température à densité constante  $\hat{\beta} = \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_{\rho_0}$ . Ce système d'équations est complété par les conditions aux limites suivantes pour les composants de la vitesse particulière sur la membrane selon l'axe  $z$  et dans le plan  $(x, y)$  normal à cet axe :  $v_z = j\omega \xi$  et  $v_{x,y} = 0$ . Ainsi, on suppose que la membrane du transducteur modélisé est un paroi isotherme ( $\tau = 0$ ) [11]. La présente formulation linéaire est ensuite discrétisée par la méthode des éléments finis en association avec une procédure de maillage adaptatif [12]. Le champ de pression acoustique est alors reconstruit comme

$$p = \hat{\beta} \tau - \frac{\rho_0 c_0^2}{j\omega \gamma} \operatorname{div} \mathbf{v} \quad . \quad (30)$$

### 5 Résultats

La comparaison entre les résultats numériques et analytiques est présentée sur la figure 4. Deux courbes de sensibilité en pression calculées analytiquement, l'une pour

TABLEAU 1 – Paramètres du fluide thermovisqueux.

Paramètre	Valeur
Pression statique $P_0$	101325 Pa
Température ambiante $T_0$	296.15 K
Densité $\rho_0$	1.180 kg m <sup>-3</sup>
Célérité adiabatique $c_0$	345.9 m s <sup>-1</sup>
Viscosité de cisaillement $\mu$	1.830 × 10 <sup>-5</sup> Pa s
Viscosité de cisaillement $\eta$	1.098 × 10 <sup>-5</sup> Pa s
Conductivité thermique $\lambda_h$	24.40 × 10 <sup>-3</sup> W m <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>
Indice adiabatique $\gamma$	1.400
Capacité thermique massique à pression constante $C_p$	1.010 × 10 <sup>3</sup> J kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>

TABLEAU 2 – Paramètres des transducteurs carré et circulaire équivalent.

Paramètre	Valeur
Épaisseur de l'espace inter-électrodes $h_{g\Box} \parallel h_{g\text{eq}}$	14 $\parallel$ 13.837 × 10 <sup>-6</sup> m
Épaisseur de la cavité $h_{c\Box} \parallel h_{c\text{eq}}$	150 $\parallel$ 147.15 × 10 <sup>-6</sup> m
Arrête $\parallel$ Rayon de la membrane $a_M \parallel R_{M\text{eq}}$	2.659 $\parallel$ 1.5 × 10 <sup>-3</sup> m
Arrête $\parallel$ Rayon de l'électrode $a_e \parallel R_{e\text{eq}}$	1.595 $\parallel$ 0.9 × 10 <sup>-3</sup> m
Masse surfacique de la membrane en silicium $m_S$	23.3 × 10 <sup>-3</sup> kg m <sup>-2</sup>
Tension de la membrane $T_\Box \parallel T_0$	552.24 $\parallel$ 600 N m <sup>-1</sup>
Tension de polarisation $U_0$	30 V

la membrane et électrode circulaires de mêmes surfaces que dans le cas du transducteur carré (courbe continue bleue) et l'autre calculée par la méthode des déplacements équivalents présentée dans la section 3 (courbe discontinue rouge), sont comparées à la courbe de sensibilité du transducteur carré calculée numériquement (symboles '+'). Comme les trois courbes étant très proches, un détail de la bande passante pour le module de la sensibilité est montré sur la figure 5. Les paramètres physiques du fluide utilisé pour la modélisation et les dimensions géométriques des transducteurs carré et circulaire équivalent sont représentés dans les tableaux 1 et 2 respectivement.

Aux très basses fréquences, c'est l'approche par les mêmes surfaces qui fonctionne mieux, entre 2 kHz environ et la première fréquence de résonance, le transducteur circulaire avec les paramètres équivalents donnés dans la section 3 modélise mieux le comportement du transducteur carré. Au-delà de la fréquence du premier mode, les équations (20) et (23) ne sont plus valables.

## 6 Conclusion

Une étude générale sur le comportement aux basses fréquences du microphone à l'électrode arrière de taille réduite a été réalisée. L'approche par la méthode du circuit équivalent, outil classique de l'électroacoustique, permet de démontrer d'une manière évidente l'influence des différents paramètres géométriques du transducteur sur son impédance d'entrée. Dans le but d'adapter le modèle analytique existant à la géométrie rectangulaire, une méthode originale de calcul des dimensions équivalentes a été élaborée. Cette méthode a

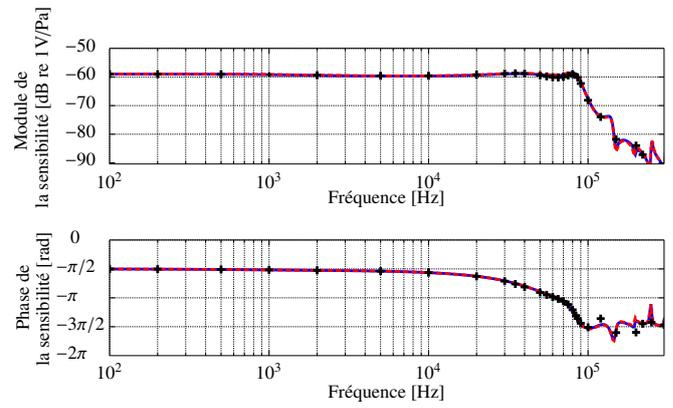


FIGURE 4 – Sensibilité en pression pour un transducteur carré, obtenue par la méthode des surfaces (courbe bleu continue), par la méthode des déplacements équivalents (courbe rouge discontinue) et par le modèle numérique (+).

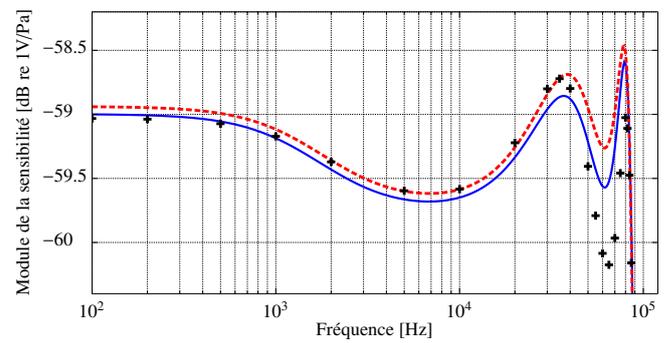


FIGURE 5 – Module de la sensibilité en pression pour un transducteur carré, obtenue par la méthode des surfaces (courbe bleu continue), par la méthode de déplacement équivalents (courbe rouge discontinue) et par le modèle numérique (+).

montré une bonne convergence dans la bande fréquentielle de fonctionnement du microphone avec le modèle numérique du capteur carré. Ainsi ce modèle analytique optimisé peut servir pour le dimensionnement correct des microphones sur puce silicium, usinés par gravure chimique humide anisotrope.

## 7 Références

- [1] P. Honzík, A. Podkovskiy, S. Durand, N. Joly, and M. Bruneau, "Analytical and numerical modeling of an axisymmetrical electrostatic transducer with interior geometrical discontinuity," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 134, no. 5, pp. 3573–3579, 2013.
- [2] A. Podkovskiy, P. Honzík, S. Durand, N. Joly, and M. Bruneau, "Miniaturized electrostatic receiver with small-sized backing electrode," in *Proceedings of Meetings on Acoustics*, vol. 19, pp. 030047–, Acoustical Society of America, 2013.
- [3] M. Bruneau, A.-M. Bruneau, Z. Škvor, and P. Lotton, "An equivalent network modelling the strong coupling between a vibrating membrane and a fluid film," *Acta Acustica*, vol. 2, no. 1994, pp. 223–232, 1994.

- [4] J. Škvor and Z. Škvor, “Electrostatic transducer with non-planar back plate,” in *Euroensors XVI, The 16th European Conf. on Solid-State Transducers, Prague*, pp. 634–637, 2002.
- [5] T. Le Van Suu, S. Durand, and M. Bruneau, “Fluid layer trapped between a plane, circular membrane and an axisymmetrically curved, smooth backing wall : analytical model of the dynamic behaviour,” *Acta Acustica united with Acustica*, vol. 94, no. 3, pp. 474–482, 2008.
- [6] P. Honzík, Z. Škvor, S. Durand, and M. Bruneau, “Electrostatic transducer with square membrane and non-planar back plate : Simplified model,” *Acta Acustica united with Acustica*, vol. 95, no. 5, pp. 866–873, 2009.
- [7] M. Bruneau and T. Scelo, *Fundamentals of Acoustics*. Wiley, 2010.
- [8] M. Bruneau, A. Bruneau, and P. Dupire, “A model for rectangular miniaturized microphones,” *Acta acustica*, vol. 3, no. 3, pp. 275–282, 1995.
- [9] Z. Škvor, *Vibrating systems and their equivalent circuits*. Elsevier, 1991.
- [10] N. Joly, M. Bruneau, and R. Bossart, “Coupled equations for particle velocity and temperature variation as the fundamental formulation of linear acoustics in thermo-viscous fluids at rest,” *Acta Acustica united with Acustica*, vol. 92, no. 2, pp. 202–209, 2006.
- [11] T. Lavergne, N. Joly, and S. Durand, “Acoustic thermal boundary condition on thin bodies : Application to membranes and fibres,” *Acta Acustica united with Acustica*, vol. 99, no. 4, pp. 524–536, 2013.
- [12] N. Joly, “Finite element modeling of thermoviscous acoustics on adapted anisotropic meshes : Implementation of the particle velocity and temperature variation formulation,” *Acta Acustica united with Acustica*, vol. 96, no. 1, pp. 102–114, 2010.