



## **Analyse modale opérationnelle d'instrument à cordes: application à la harpe de concert**

J.-L. Le Carrou et B. Chomette

Institut d'Alembert, UMR CNRS 7190, UPMC Univ Paris 06, 4 place Jussieu, F-75005 Paris, France  
jean-loic.le\_carrou@upmc.fr

Pour connaître les modes propres de vibration d'un système vibrant (déformées modales, amortissements et fréquences propres), les méthodes d'analyse modale sont classiquement mises en place. Ces méthodes, couplées à un protocole expérimental dédié, utilisent la connaissance des réponses du système à une sollicitation connue. Lorsque celle-ci est inconnue, d'autres méthodes peuvent être utilisées comme celles d'analyse modale opérationnelle. Dans le cas d'une excitation induite par des cordes, la présence de composantes harmoniques dans le signal peut perturber l'algorithme et nécessiter le filtrage ou la prise en compte de ces composantes dans l'identification. L'étude proposée s'intéresse plus particulièrement à l'identification des caractéristiques modales d'une harpe en utilisant la méthode Least Square Complex Exponential modifiée permettant la prise en compte des harmoniques induites par les cordes, dans le cas où différentes cordes sont jouées. Les résultats sont comparés avec ceux issus d'une méthode d'identification modale classique.

## 1 Introduction

L'étude ou la comparaison d'instruments de musique à cordes tels que la harpe commence bien souvent par une analyse modale de sa table d'harmonie. La première étude acoustique publiée de cet instrument (sur petite harpe écossaise) [1] s'est donc attachée à identifier les *modes* de la table d'harmonie à différentes étapes de sa fabrication. La méthode employée est basée sur celle dite de Chladni [2] : on vient exciter la structure, préalablement parsemée de poudre, par un haut-parleur sur ses fréquences de résonances ce qui permet d'en visualiser les lignes nodales. Les fréquences et les déformées ainsi relevées permettent d'avoir une bonne idée du comportement vibratoire de la table d'harmonie. En toute rigueur, ces informations ne correspondent pas aux modes (comme mentionné dans l'article) mais aux déformées opérationnelles et aux fréquences de résonance. Cette méthode a aussi été employée sur une harpe de concert [3]. Une variante consiste à visualiser la déformation de la table d'harmonie par des franges d'interférence lorsque celle-ci est éclairée par une lumière cohérente. Cette méthode a été appliquée avec succès sur la guitare [4, 5] mais n'a pas été choisie pour étudier le comportement vibratoire de harpes historiques [6]. Pour ces dernières, les auteurs ont privilégié une méthode simple et facile à mettre en place où l'on vient frapper avec le doigt en différents points de la table d'harmonie tout en mesurant la réponse de l'instrument avec un accéléromètre fixe. Là aussi, les déformées opérationnelles ont été obtenues et discutées pour différentes factures de harpe [6]. Avec l'avènement de nouvelles méthodes de traitement du signal et de systèmes d'acquisition performant, l'identification modale à proprement parler devient envisageable. Avec une excitation générée par un pot vibrant connecté directement à la table d'harmonie et un vibromètre laser mesurant la vitesse de la structure en différents points, il devient maintenant possible d'obtenir un jeu de réponses en fréquences que les algorithmes peuvent traiter. Ainsi, l'algorithme ESPRIT (Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques) est employé pour identifier les modes d'une harpe celtique afin de synthétiser une réponse vibratoire le long de l'axe centrale de la harpe [7], l'algorithme IDRC ou IDRM (Identification De Résidus Complexes ou Identification de Résidus Multiples) est mis en œuvre afin de comparer les résultats à une modélisation par éléments finis d'une harpe classique [8] et l'algorithme LSCE (Least Square Complex Exponential) est employé sur une harpe de concert [9, 10] pour identifier ses modes vibro-acoustiques couplés (A0 et T1).

Ces méthodes d'identification modale sont maintenant assez bien maîtrisées et donnent des résultats convaincants.

Néanmoins, elles demandent la mise en place de protocoles expérimentaux parfois lourds et coûteux qui ne permettent pas de faire des analyses modales systématiques sur les instruments, comme par exemple, en fin de chaîne de production. Une part importante de ces difficultés se concentre sur l'excitation qui doit être connue : soit par marteau d'impact, nécessitant donc de frapper en un nombre important de points, soit par pot vibrant, obligeant bien souvent de coller une tête d'impédance sur l'instrument. Pourtant, la harpe possède en elle-même un système exciteur que sont les cordes pouvant générer des fréquences de 30,9 Hz à 2960 Hz (en ne considérant ici que les fréquences fondamentales). L'objectif de ce papier est donc de proposer une méthode d'identification modale utilisant cette potentialité en jouant simplement l'instrument.

On se base pour cela sur des méthodes récemment développées en analyse modale opérationnelle en présence de sources harmoniques [11, 12] brièvement détaillées dans la section 2. Par la suite, les résultats obtenus sur la harpe de concert sont obtenus lorsque deux cordes sont jouées (en section 3) avant de conclure (section 4).

## 2 Analyse modale opérationnelle par méthodes LSCE

Les différentes étapes d'estimation des paramètres modaux avec deux algorithmes d'analyse modale opérationnelle (l'algorithme Least Square Complex Exponential (LSCE) et l'algorithme Least Square Complex Exponential modifié (LSCEm) prenant en compte la présence d'excitation harmonique) sont détaillées dans cette section. Les travaux présentés s'inspirent de publications récentes sur l'application de méthodes d'analyse modale opérationnelle pour des structures excitées harmoniquement [11, 12].

### 2.1 Natural Excitation Technique (NExT)

En faisant l'hypothèse qu'un système est excité par un bruit blanc stationnaire, on peut montrer que la fonction de corrélation  $R_{ij}(t)$  entre la réponse des signaux en  $i$  et  $j$  à un instant  $t$  est assimilable à la réponse de la structure en  $i$  due à une impulsion en  $j$ . En considérant que l'amortissement est faible, la fonction de corrélation s'exprime comme suit [13] :

$$\begin{aligned} R_{ij}(t) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} q_i(\tau) q_j(\tau - t) dt \\ &= \sum_{r=1}^N \frac{\phi_{ri} A_{rj}}{m_r \omega_r^d} \sin(\omega_r^d t + \theta_r) e^{-\xi_r \omega_r^d t}, \quad (1) \end{aligned}$$

où  $\phi_{ri}$  est la  $i$ -ième composante du vecteur propre  $r$ ,  $A_{rj}$  est la constante associée au signal de la  $j$ -ième réponse pris comme référence,  $m_r$  est la  $r$ -ième masse modale,  $\xi_r$  et  $\omega_r^n$  sont respectivement l'amortissement modal et la pulsation propre de la  $r$ -ième composante,  $\omega_r^d$  est la pseudo pulsation,  $\theta_r$  est la phase associée à la  $r$ -ième réponse modale et  $N$  l'ordre du système associé à la structure. Ainsi, la corrélation entre les différents signaux captés sur la structure correspond simplement à la superposition des oscillations amorties ayant des amortissements et des fréquences égales aux amortissements et aux fréquences des modes de la structure.

## 2.2 Méthodes LSCE et LSCEm

La formulation des fonctions de corrélation des signaux captés sur la structure sous la forme (1) montre clairement que les techniques d'identification modale dans le domaine temporel peuvent s'appliquer. En particulier, la méthode de type LSCE semble particulièrement bien appropriée.

En effet, la fonction de corrélation (1) peut s'exprimer en fonction des modes complexes de la structure  $\Psi$  :

$$R_{ij}(k\Delta t) = \sum_{r=1}^N \Psi_{ri} C_{rj} e^{s_r k \Delta t} + \sum_{r=1}^N \Psi_{ri}^* C_{rj}^* e^{s_r^* k \Delta t}, \quad (2)$$

où  $s_r = \omega_r \xi_r + j \omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2}$  (appelé pôle du système) et où  $C_{rj}$  est une constante associée au  $r$ -ième mode pour le  $j$ -ième signal de réponse (appelée aussi facteur de participation modale), lequel est associé au signal de référence.  $\Delta t$  est le pas d'échantillonnage temporel et l'exposant \* indique le complexe conjugué. Cette expression peut s'écrire sous la forme suivante

$$R_{ij}(k\Delta t) = \sum_{r=1}^{2N} C'_{rji} e^{s_r k \Delta t}, \quad (3)$$

avec  $C'_{rji}$  les résidus. En utilisant cette équation, l'algorithme classique d'identification LSCE peut être appliqué pour estimer les pôles  $s_r$  du système.

Dans le cas où des fréquences additionnelles seraient présentes dans le signal d'excitation, telles que les fréquences harmoniques de la corde jouée, on vient adapter la méthode LSCE classique en y adjoignant des pôles additionnels  $s_r^h$ . En pratique, pour améliorer grandement l'identification [11], on vient modifier l'algorithme LSCE en introduisant explicitement dans le processus d'identification les fréquences harmoniques de la corde à priori connues sous la forme de pôles d'amortissement nul. Cette méthode est appelée, dans le papier, LSCEm.

## 2.3 Diagramme de stabilisation

Puisque l'ordre  $N$  nécessaire pour représenter correctement la dynamique du système (voir Eq.(1)) n'est à priori pas connu, l'identification des pôles est obtenue pour différents ordres et un diagramme de stabilisation indiquant leur convergence est utilisé pour identifier les pôles numériques des pôles à priori physiques. Par la suite, nous utiliserons un critère de convergence pour faire cette identification. Ainsi, les pôles vérifiant à la fois une variation entre 2 itérations de moins de 1% en fréquence et de moins de 10% en amortissement seront considérés comme stables et donc retenus.

# 3 Résultats

## 3.1 Protocole Expérimental

Le protocole expérimental mis en œuvre pour tester la méthode est extrêmement simple (voir figure 1). On joue une corde d'une harpe de concert (Camac Harps, Modèle Prestige) tandis que les autres cordes sont étouffées avec du papier. Dans le même temps, 11 accéléromètres captent la vibration de la table d'harmonie. Ces 11 accéléromètres sont répartis de la manière suivante : 6 sont régulièrement espacés sur l'axe central de l'instrument (où les cordes sont attachées), 4 sont collés sur la partie la plus large de la table d'harmonie (2 de part et d'autre de l'axe central) et 1 est positionné au pied de la corde jouée. Ce dernier sera choisi comme accéléromètre de référence (la réponse  $j$  dans l'Eq. (1)). Nous avons choisi de pincer les cordes 26 (Lab2) et 29 (Mib2) ayant respectivement comme fréquence fondamentale 208,2 Hz et 153 Hz.

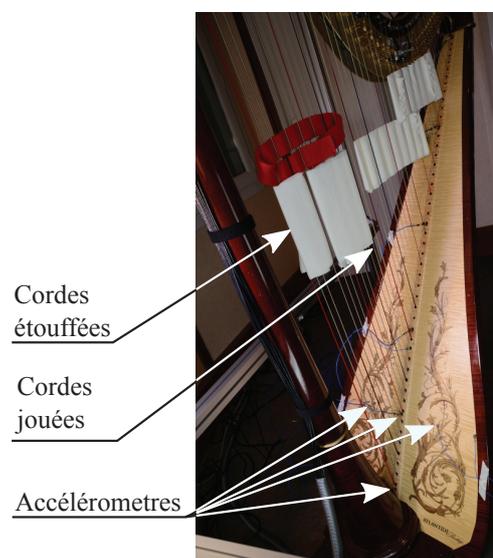


FIGURE 1 – La harpe de concert munie de ses 11 accéléromètres. Seule la corde jouée n'est pas étouffée.

Pour confronter les résultats issus de l'analyse modale opérationnelle, nous avons mené une analyse modale classique. Pour cela, la réponse impulsionnelle en chacun des points de mesure a été mesurée avec l'aide d'un marteau d'impact excitant la harpe proche d'un accéléromètre fixé sur la ligne centrale. L'identification modale a été faite en utilisant l'algorithme Least Square Complex Frequency (LSCF) implémenté dans le logiciel Modan [14] développé au laboratoire Femto-St de Besançon. Les fréquences propres ainsi obtenues sont données dans le tableau 1.

## 3.2 Modes identifiés

Pour chacune des cordes jouées, les algorithmes d'identification LSCE et LSCEm ont été appliqués aux signaux de corrélation mesurés par les 11 accéléromètres. Les diagrammes de stabilité pour les deux méthodes sont représentés dans la figure 2 pour chacune des cordes jouées. Seules les dix dernières itérations ont été affichées, représentant un ordre entre 215 et 225 des pôles considérés comme stables (vérifiant le critère de stabilité défini dans la sous-section 2.3) dans la plage de fréquence 30 à 300 Hz.

TABLEAU 1 – Fréquences propres et amortissements modaux identifiés par analyse modale expérimentale classique (LSCF) et par analyses modales opérationnelles (LSCE et LSCEm) lorsque la corde 29 (C29) ou la corde 26 (C26) est jouée.

Méthode \ Mode	1	2	3	4	5	6	7
LSCF	53,3 Hz 3,5%	56,4 Hz 3,2%	106,1 Hz 1,6%	147,2 Hz 1,1%	185,1 Hz 4,5%	190,6 Hz 1,6%	213,6 Hz 3,1%
LSCE (C29)	52,1 Hz 5,6%	- -	106,6 Hz 1,5%	- -	- -	187,4 Hz 4,1%	- -
LSCEm (C29)	52,2 Hz 5,5%	- -	106,6 Hz 1,5%	147,6 Hz 2%	- -	187,4 Hz 4%	- -
LSCE (C26)	- -	- -	106,8 Hz 1,5%	147,5 Hz 1,9%	- -	188,5 Hz 2%	215,9 Hz 2,6%
LSCEm (C26)	- -	- -	106,8 Hz 1,5%	- -	- -	188,5 Hz 1,9%	214,8 Hz 2,4%

Pour chaque itération, les pôles ( $s_r$ ) sont indiqués à l'aide d'un rond positionné en abscisse selon la fréquence ( $f_r$ ) et en ordonnée selon l'ordre d'itération ( $N$ ). La couleur est, quant à elle, proportionnelle à l'amortissement ( $\xi_r$ ). Le spectre du capteur de référence est aussi affiché sur la figure 2, montrant ainsi la réponse vibratoire de la table d'harmonie sollicitée par la corde. Sur ces figures, la fréquence fondamentale de chacune des cordes est clairement identifiable. On remarque aussi quelques pics noyés dans le bruit. Ces pics représentent la réponse de la table selon ses modes propres dans le régime transitoire de vibration.

### 3.3 Discussion

L'ensemble des fréquences propres identifiées par la méthode d'analyse modale classique (LSCF) et les deux méthodes d'analyse modale opérationnelle (LSCE et LSCEm) lorsque les cordes 29 et 26 ont été jouées est regroupé dans le tableau 1.

La comparaison entre la méthode d'analyse modale classique et opérationnelle montre que 5 modes sur 7 ont été parfaitement identifiés en fréquence (< 2% d'écart) malgré le fait que le rapport signal à bruit soit très défavorable (voir figure 2). On remarque que plus la fréquence d'excitation est proche d'un mode de structure, meilleure est son identification. Le mode 7 à 213,6 Hz en est un parfait exemple : il est uniquement identifié lorsque la corde 26 (de fréquence fondamentale à 208,2 Hz) est jouée. Ce qui peut s'expliquer par l'amélioration du rapport signal à bruit autour de la fréquence d'excitation. De manière analogue, l'identification de l'amortissement semble plus fiable. En effet, pour le mode 6 à 190,6 Hz, l'amortissement identifié lorsque la corde 29 (de fréquence fondamentale à 153 Hz) est jouée a un écart avec celui identifié avec l'analyse modale classique de l'ordre de 61% et qui se réduit à 25% lorsque c'est la corde 26 qui est jouée. D'une manière générale, l'amortissement est identifié avec un écart par rapport à l'analyse modale classique de l'ordre de 45%.

Entre les deux méthodes d'analyse modale opérationnelle, il semble que lorsque la fréquence d'excitation est proche d'un mode de structure, le résultat semble plus fiable avec l'algorithme LSCEm. Pour le mode 4 par exemple, l'identification avec l'algorithme LSCEm lorsque la corde 29 est jouée est possible alors qu'il ne l'est pas avec LSCE. De même, la fréquence trouvée du mode 7 avec LSCEm est plus

proche de celle issue de l'analyse modale classique qu'avec l'algorithme LSCE. L'ajout de termes explicites contenant les fréquences d'excitation des cordes dans le processus d'identification permet donc d'améliorer l'identification.

## 4 Conclusion

Dans ce papier, nous nous sommes intéressés à mettre en place une nouvelle méthode d'identification modale appliquée à la harpe de concert. Cette méthode utilise la vibration des cordes de l'instrument comme générateur. En effet, à partir de mesures de corrélations entre plusieurs capteurs positionnés sur l'instrument et un capteur de référence au pied de la corde jouée, les paramètres modaux (fréquences et amortissements) de la table d'harmonie ont pu être identifiés. Comparés aux résultats issus d'une analyse modale classique, il s'avère que plus la réponse du mode est présent dans la réponse, meilleure sera l'identification. En d'autres termes, plus la fréquence d'excitation sera proche d'un mode propre de la structure, meilleure sera le résultat, notamment pour l'algorithme LSCEm. On peut maintenant imaginer faire une analyse modale complète en jouant toutes les cordes de la harpe.

L'analyse modale opérationnelle est donc une méthode qui peut être employée sur des instruments à cordes en oscillations libres. Les prochains travaux vont s'intéresser à identifier les vecteurs propres, et donc les déformées modales et à utiliser cette méthode pour comparer un instrument suivant plusieurs états de sollicitation.

## Remerciements

Les auteurs souhaitent remercier Yves Pene et Dimitri Sourzac pour les études préliminaires et les premiers algorithmes qu'ils ont programmés. Jean-Marc Fontaine est chaleureusement remercié pour la photo du protocole expérimental.

## Références

- [1] I.M. Firth, On the acoustics of the harp, *Acustica* **37**, 148-154 (1977).
- [2] E. Chladni, *Die Akustik*, Leipzig Breitkopf & Härtel, 1802

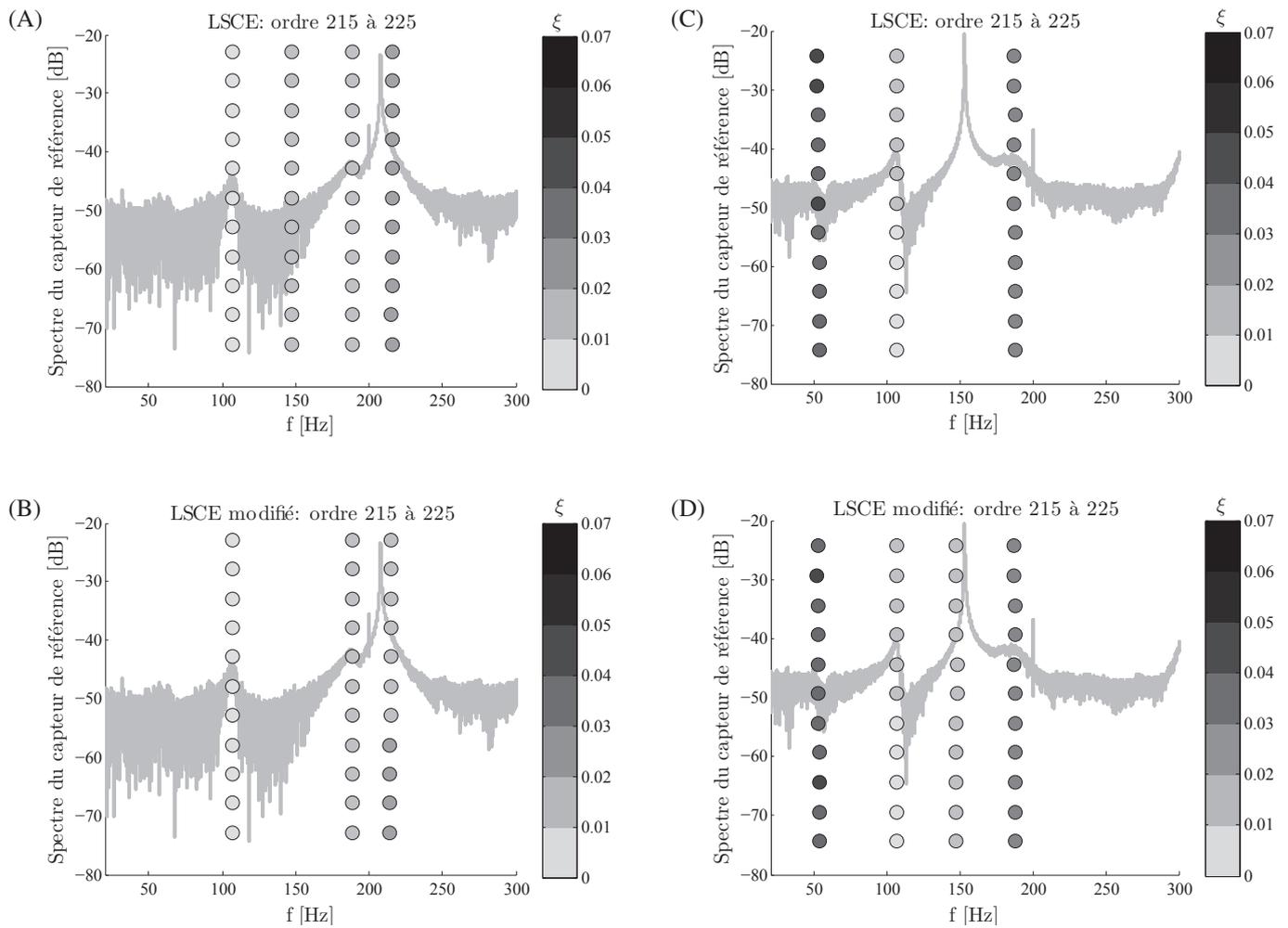


FIGURE 2 – Diagrammes de stabilité obtenus avec l’algorithme LSCE (A et C) et LSCEm (B et D) pour un ordre allant de 215 à 225. Le calcul a été fait sur les 11 signaux de corrélation lorsque la corde 26 (A et B) ou la corde 29 (C et D) est jouée. Chaque pôle est représenté par un rond dont la couleur est proportionnelle à son amortissement.

- [3] I.M. Firth et A.J. Bell, On the acoustics of the concert harp’s soundboard and soundbox, *Actes de congrès Stockholm Musical Acoustics Conference*, 163-183, 1983
- [4] E.V. Jansson, A study of acoustical and hologram interferometric measurements on the top plate vibrations of a guitar, *Acustica* **25**, 95-100, 1971
- [5] B.E. Richardson et G.W. Roberts, The adjustment of mode frequencies in guitars : a study by means of holographic interferometry and finite element analysis, *Actes de congrès Stockholm Musical Acoustics Conference*, 285-302, 1983
- [6] I.M. firth, Harps of the baroque period, *Journal of the Catgut Acoustical Society* **1**(3), 52-61, 1986
- [7] S. Berge, A. Le Pichon et A. Chaigne, Modal analysis of a celtic harp, *Actes du 4<sup>ème</sup> Congrès Français d’Acoustique*, Marseille, France, 589-592, 1997
- [8] G. Kergourlay et E. Balmès, Dynamic behaviour of a harp soundboard and soundbox, *Actes de congrès de the international conference on information systems, analysis and synthesis, SCI/ISAS*, Orlando, USA 2001.
- [9] J-L. Le Carrou, F. Gautier et N. Dauchez, Acoustic radiation of the concert harp in the low frequency range, *Actes du congrès International Congress on Sound and Vibration*, Lisbonne, Portugal, 2005
- [10] J-L. Le Carrou, F. Gautier et E. Foltête, Experimental study of A0 and T1 modes of the concert harp, *Journal of the Acoustical Society of America*, **121**(1), 559-567, 2007
- [11] P. Mohanty et D. Rixen, Operational modal analysis in the presence of harmonic excitation, *Journal of Sound and Vibration* **270**(1-2), 93-109 (2004).
- [12] P. Mohanty et D. Rixen, Identifying mode shapes and modal frequencies by operational modal analysis in the presence of harmonic excitation, *Experimental Mechanics* **45**(3), 213-220 (2005).
- [13] G.H. James, T.G. Carne, J.P. Lauffer, The natural excitation technique (NExT) for modal parameter extraction from operating structures, *Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis* **10**(4), 260-277 (1995)
- [14] <http://modan.dma-softs.com/>