



## **Description statistique du comportement de la fonction de Green dans un milieu réverbérant: applications à la localisation de source**

H. Achdjian, E. Moulin, F. Benmeddour et J. Assaad  
IEMN UMR CNRS 8520, Université de Valenciennes et du Hainaut Combrésis, 59313 Valenciennes,  
France  
[hossep\\_achdjian@hotmail.com](mailto:hossep_achdjian@hotmail.com)

La réverbération acoustique dans une plaque solide est modélisée par un processus aléatoire non-stationnaire basé sur la méthode des sources images. L'intérêt d'un tel modèle statistique est de relier le comportement général des ondes dans la plaque à un ensemble limité de paramètres accessibles expérimentalement. Ainsi, il est montré que la moyenne des enveloppes et/ou l'intégral de Schroeder des signaux de réverbération contiennent des informations potentiellement utiles sur les propriétés structurelles du milieu et/ou des sources. Après une validation expérimentale du modèle proposé, une application potentielle à la localisation d'une source impulsionnelle sera présentée. L'originalité de ce travail réside dans le fait que trois capteurs sont suffisants, alors qu'un minimum de quatre est requis dans les techniques usuelles de localisation de source. La réverbération joue ici en quelque sorte le rôle de quatrième capteur. En outre, on notera que cette localisation ne nécessite aucune mesure de temps ni même de synchronisation entre les voies de réception.

## 1 Introduction

La propagation des ondes acoustiques est souvent utilisée pour la caractérisation du milieu, la localisation d'une source acoustique ou la détection d'un défaut. Depuis plusieurs années, un certain nombre d'études se sont concentrées sur l'exploitation des signaux acoustiques de longues durées causés par des conditions de propagation complexes (réverbération, diffusion multiple, ...). L'extraction d'informations utiles dans ces conditions fait actuellement l'objet de nombreuses techniques, telles que : le retournement temporel [1, 2], la corrélation du champ acoustique [3, 4, 5, 6, 7] et la diffusion par spectroscopie des ondes acoustiques [8, 9].

Des études menées récemment sur la moyenne des enveloppes de ces signaux [10] montrent que la propagation acoustique dans un milieu fini à forte réverbération (faible atténuation acoustique et réflexions multiples) contient des informations potentiellement utiles sur les propriétés structurelles du milieu et les positions des sources [11]. Nous proposons ici d'appliquer ces résultats à la localisation d'une source impulsionnelle sur une plaque.

Les méthodes classiques de localisation de source acoustique font appel à la différence de temps d'arrivée des paquets d'onde. Pour localiser la source, ces méthodes exigent un nombre minimal de cinq capteurs dans le cas tridimensionnel et quatre dans le cas bidimensionnel, ainsi qu'une synchronisation entre les récepteurs. En revanche, la méthode présentée ici pour des structures bidimensionnelles, ne nécessite que trois capteurs sans synchronisation entre eux.

Le modèle présenté ici et qui sert de base à la méthode de localisation permet de prédire les caractéristiques moyennes des signaux dispersifs reçus par quelques points localisés dans un milieu réverbérant. Ce modèle statistique est développé dans le domaine temporel, en se basant sur la méthode des sources images, qui à son tour est utilisée pour estimer les distributions des paquets d'ondes dans les signaux.

Tout d'abord, les relations théoriques utiles telles que l'espérance mathématique des enveloppes au carré et l'intégrale de Schroeder sont développées à partir du modèle statistique. Ensuite les paramètres structurels utiles du milieu sont estimés par la moyenne d'ensemble de signaux mesurés après propagation dans le milieu réverbérant. Enfin, quelques exemples expérimentaux de localisation sont présentés afin de valider le principe.

## 2 Développement théorique

Dans ce papier, on considère une plaque rectangulaire afin de simplifier les développements, mais la méthode reste valable pour n'importe quelle forme géométrique.

### 2.1 Description statistique d'un milieu réverbérant

Considérons une source ponctuelle émettant un signal  $s_0(t)$  dans un milieu fini et avec une faible atténuation. Le signal reçu par l'un des récepteurs en écoute passive à la surface de la structure est constitué d'un signal de propagation directe  $h^D(t) = s(r_0, t)$  d'un point source  $S$  à un point d'enregistrement  $R$  et une partie réverbérante  $h^R(t)$  correspondant à une série infinie de réflexions sur les bords de la plaque :

$$h(t) = h^D(t) + h^R(t), \quad (1)$$

avec :

$$h^R(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \kappa_i s(r_i, t), \quad (2)$$

où  $s(r, t)$  est un signal reçu après une propagation dispersive sur une distance  $r$ . La transformée de Fourier du signal  $s(r, t)$  est donnée par :

$$\tilde{s}(r, \omega) = a(r) B(\omega) \tilde{s}_0(\omega) e^{-\gamma(\omega)r} e^{jk_d(\omega)r}, \quad (3)$$

où  $\tilde{s}_0(\omega)$  est la transformée de Fourier du signal émis  $s_0(t)$ ,  $B(\omega)$  est l'amplitude d'excitation qui dépend de la fréquence,  $k_d(\omega)$  est le nombre d'onde en fonction de la pulsation  $\omega$  et  $a(r)$  est un terme géométrique qui dépend de la distance de propagation ( $1/\sqrt{r}$  dans le cas d'une structure bidimensionnelle).  $r_0$  correspond au trajet direct entre la source et le récepteur et  $r_i$  est le chemin parcouru par le paquet d'onde d'un point source-image  $S_i$  au récepteur (figure 1).  $\kappa_i$  est le nombre des paquets d'ondes provenant des sources images situées à des distances entre  $r_i$  et  $r_i + \Delta r_i$  du récepteur. Ce nombre est considéré comme une variable aléatoire. L'intervalle  $\Delta r_i$  est choisi assez petit de telle sorte que  $\kappa_i = 1$  ou  $0$ . Les exposants 'D' et 'R' (Eq. 2) signifient direct et réverbérant, respectivement.

La valeur moyenne de  $\kappa_i$  est donnée par :

$$E[\kappa_i] = \lambda(r_i) \Delta r_i, \quad (4)$$

où  $\lambda(r)$  est la densité moyenne des paquets d'ondes propagés sur une distance  $r$  et qui dépend de la

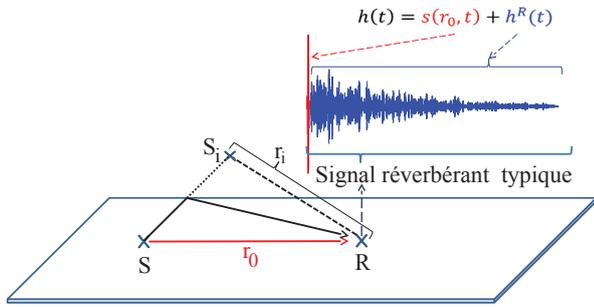


FIGURE 1 – Exemple d'un signal réverbérant typique reçu par un récepteur après des multiples réflexions sur les parois de la plaque.

géométrie du milieu et peut être facilement estimée en utilisant la méthode des sources-images [10, 13] :

$$\lambda(r) = \beta_d r, \quad (5)$$

avec  $\beta_d = 2\pi/S$ ,  $S$  est la surface de la plaque.

Ce modèle statistique constitue le cadre général pour prédire le comportement de la moyenne des signaux reçus par quelques points du milieu. Par la suite on utilise la méthode de moyennage pour estimer la position de la source.

## 2.2 Traitement des signaux reçus et localisation de la source

Dans cette section on propose une technique originale pour la localisation de source acoustique dans un milieu réverbérant.

Considérons un signal émis filtré à une bande étroite de fréquence centrale  $\omega_0$ . Après calcul, (pour plus de détails voir les travaux précédents [10, 14]), on obtient l'espérance mathématique  $E[\cdot]$  de l'enveloppe caractérisée par une fonction exponentielle décroissante de la forme suivante :

$$E[|H^R(t)|^2] \simeq A e^{-2t/\tau}, \quad (6)$$

où  $H^R(t)$  est la représentation analytique complexe du  $h^R(t)$ ,  $\tau = 1/\gamma_0 v_{g0}$  est une constante liée au temps de réverbération de la plaque, avec  $\gamma_0$  le coefficient d'atténuation et  $v_{g0}$  la vitesse de groupe à la pulsation  $\omega_0$ .  $A$  est une amplitude reliée à la fois aux caractéristiques structurelles du milieu et aux propriétés de la source acoustique :

$$A = v_{g0} \beta_d D_s, \quad (7)$$

avec  $D_s$  un terme d'énergie acoustique injectée par la source dans le milieu :

$$D_s = \int_0^{+\infty} |B(\omega)S_0(\omega)|^2 d\omega. \quad (8)$$

Un exemple de moyenne des enveloppes des signaux expérimentaux reçus par quelques points sur une plaque est illustré dans la figure 2 (courbe en bleu).

Un bon accord est observé entre la courbe théorique (courbe en pointillée rouge) et celle mesurée (voir figure 2). Ainsi la comparaison de l'expression théorique

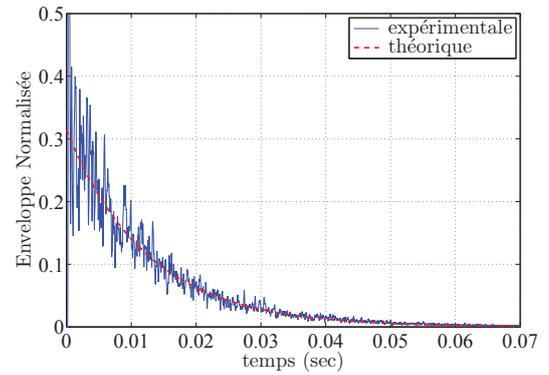


FIGURE 2 – Moyenne des enveloppes.

donnée dans l'équation (6) à la somme des enveloppes mesurées nous permettrait d'identifier les paramètres physique de la plaque et d'estimer la position de la source [10, 12].

Cependant, nous montrons ici une méthode plus efficace en termes de convergence vers la fonction théorique. Le principe consiste à appliquer une technique basée sur l'intégration, similaire à la méthode dite de Schroeder [16, 17], qui est souvent utilisée en acoustique des salles [18].

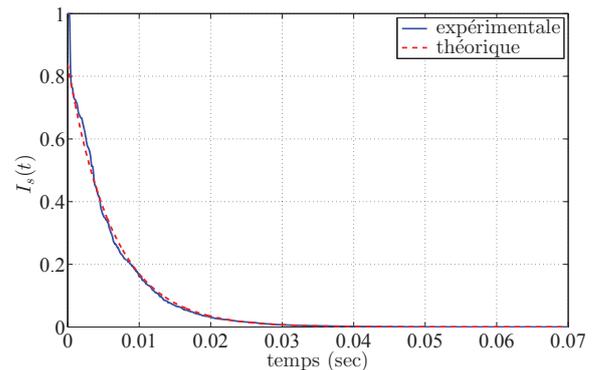


FIGURE 3 – Moyenne des intégrales de Schroeder des signaux reçus par des récepteurs.

La formule pratique pour appliquer la méthode de Schroeder est la suivante :

$$i_s(t) = \int_t^{+\infty} f^2(u) du, \quad (9)$$

Dans le cadre de notre étude, la fonction  $f(u)$  est le signal réverbérant  $h^R(t)$  reçu par l'un des récepteurs. L'espérance mathématique de l'intégrale de Schroeder  $I_s(t)$  peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} I_s(t) &= E[i_s(t)] \\ &= E\left[\int_t^{+\infty} [h^R(u)]^2 du\right]. \end{aligned} \quad (10)$$

En introduisant l'équation (2) dans l'équation précédente et en négligeant les termes croisés de celui-ci [15], on obtient :

$$I_s(t) \simeq \sum_{i=1}^{+\infty} E[\kappa_i] \int_t^{+\infty} s^2(r_i, u) du, \quad (11)$$

$E[\kappa_i]$  est remplacée par sa valeur. En utilisant l'égalité de Parseval et en introduisant l'équation (3) dans (11), on obtient :

$$I_s(t) \simeq \frac{1}{2} D_s \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda(r_i) a^2(r_i) e^{-2\gamma_0 r_i} \Delta r_i. \quad (12)$$

Lorsque  $\Delta r_i$  tend vers zero ( $\Delta r_i \rightarrow 0$ ) la somme devient une intégrale ( $\sum_{i=1}^{+\infty} \Delta r_i \rightarrow \int_{i=0}^{+\infty} dr$ ) et l'équation (12) se simplifie en une fonction exponentielle décroissante de la forme suivante :

$$I_s(t) \simeq \frac{A\tau}{4} e^{-2t/\tau}, \quad (13)$$

Un exemple de moyenne des intégrales des signaux reçus sur trois réalisations est montré dans la figure 3. On remarque que la courbe théorique (en rouge pointillé) est en très bon accord avec la courbe expérimentale (en bleu).

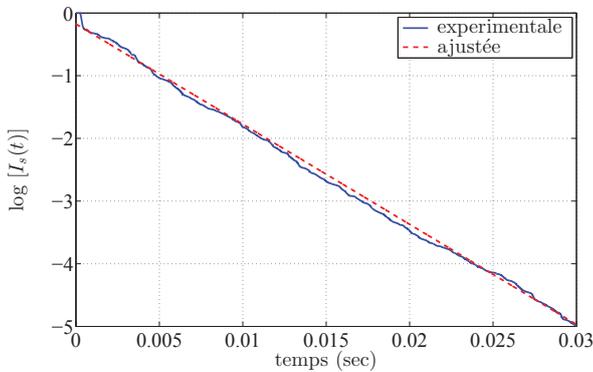


FIGURE 4 – Le logarithme de la moyennes des intégrales de Schroeder des signaux reçus par les récepteurs.

L'expression théorique de l'équation (13) étant en exponentielle, on peut réaliser un simple ajustement de courbe linéaire sur son logarithme (voir la figure 4) afin d'en déduire les valeurs expérimentale de  $A$  et  $\tau$ , que nous appelons dans la suite  $A_{fit}$  et  $\tau_{fit}$ .

Dans une situation expérimentale,  $D_s$  est généralement inconnue. Dans ce cas, on peut se servir des relations supplémentaires obtenues à partir des premières caractéristiques (traitées d'une manière déterministe) des signaux de réverbération :

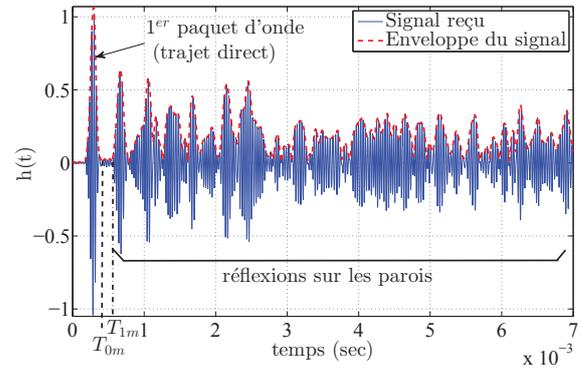
$$D_s \simeq 2 r_m I_m^D, \quad (14)$$

avec

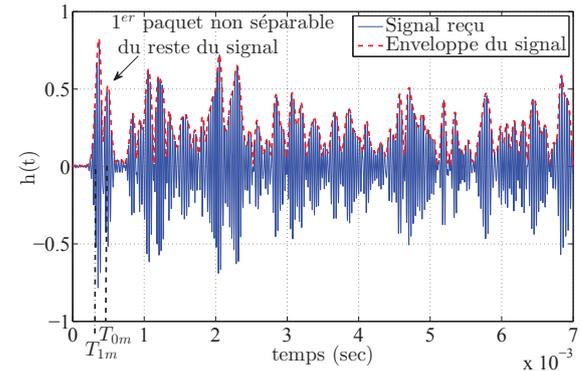
$$I_m^D = \int_0^{T_{0m}} [h_m^D(t)]^2 dt, \quad (15)$$

où  $I_m^D$  est l'énergie du premier paquet d'onde reçu par le  $m^{\text{ème}}$  récepteur, qui est à une distance  $r_m$  de la source.  $h_m^D(t) = s(r_m, t)$  est la propagation directe du signal reçu de la source vers le récepteur.  $T_{0m}$  est le temps, où le premier paquet d'onde est enregistré par le  $m^{\text{ème}}$  récepteur (voir figure 5-a).

La figure (5-a) montre un exemple de signal de réverbération, où le premier paquet d'onde est



(a)



(b)

FIGURE 5 – Exemples de signaux de réverbération. (a) Le 1<sup>er</sup> paquet d'onde est séparé du signal réverbérant. (b) Le 1<sup>er</sup> paquet d'onde chevauche la partie réverbérante.

totalemment séparé des multiples réflexions. Dans ce cas l'estimation des paramètres du milieu est possible. Dans le cas contraire où les premières réflexions chevauchent le paquet d'onde du trajet direct (figure 5-b), une erreur s'ajoutera sur l'équation (15).  $T_{1m}$  sur cette figure est le temps d'arrivé du signal après une première réflexion.

Ainsi les équations (14) et (7) constituent la base du principe de localisation de la source. Si  $v_{g0}$  et  $\beta_d$  sont connues, alors la distance entre la source et le  $m^{\text{ème}}$  récepteur peut être estimée par la relation suivante :

$$r_{m_{est}} \simeq \frac{A_{fit}}{\beta_d v_{g0} I_m^D}. \quad (16)$$

Une fois la distance entre la source et le récepteur estimée, on calcule l'erreur entre la valeur estimée  $r_{m_{est}}$  et la distance entre le récepteur et une position  $(x, y)$  de la surface de la plaque :

$$\epsilon_m(x, y) = r_{m_{est}} - d_m(x, y), \quad (17)$$

Avec  $d_m(x, y) = \sqrt{(x_m - x)^2 + (y_m - y)^2}$ , où  $(x_m, y_m)$  sont les coordonnées du  $m^{\text{ème}}$  récepteur.

Par la suite, la méthode des moindres carrés est utilisée pour estimer la position de la source acoustique  $(x_s, y_s)$ . On s'intéresse ici à la minimisation de l'erreur quadratique définie comme :

$$F(x, y) = \sum_{m=1}^M [r_{m_{est}} - d_m(x, y)]^2, \quad (18)$$

où  $M$  est le nombre de capteurs sur la surface de la plaque.

### 3 Conditions d'application de la méthode

Comme indiqué dans le paragraphe précédent, la méthode de localisation est limitée par le fait que le premier paquet d'ondes du signal reçu au niveau de chaque capteur soit séparé du reste du signal (figure 5-a). La condition d'application de la méthode peut être présentée par l'inégalité suivante :

$$\Delta T_m(x, y) = T_{1m}(x, y) - T_{0m}(x, y) \geq 0, \quad (19)$$

où  $T_{0m}$  est le temps d'enregistrement du premier paquet d'onde, qui correspond au trajet direct d'une position  $(x, y)$  de source vers le  $m^{\text{ème}}$  récepteur.  $T_{1m}$  est le temps d'arrivé du paquet d'onde après une première réflexion sur le bord le plus proche du récepteur (voir figure 5).

Connaissant les positions des capteurs placées à la surface de la plaque, l'inégalité de l'équation (19) nous permet d'étudier la zone des positions des sources acceptables, où la localisation est possible.

Deux exemples de zone de localisation sont présentés dans la figure 6. Ceux-la pour une plaque d'aluminium rectangulaire de dimension  $2\text{m} \times 1\text{m}$ , d'épaisseur 6 mm et pour une fréquence central d'excitation de 30 kHz, qui correspond à une vitesse de groupe  $v_{g0}$  de 2130 m/sec pour le mode de propagation  $A_0$ .

Les lignes noires de la figure 6 correspondent à  $\Delta T_m(x, y) = 0$ , qui est la zone limite où la probabilité d'erreur de la localisation est au maximum. Au delà de cette ligne, la localisation est erronée,  $\Delta T_m(x, y) < 0$  (zone blanche de la plaque figure 6(a et b)). Le cas  $\Delta T_m(x, y) > 0$  correspond à la zone interne du contour noir où la localisation est possible mais la probabilité d'erreur augmente en approchant de la limite.

### 4 Application expérimentale

Dans ce paragraphe, des tests expérimentaux d'application de la méthode de localisation sont démontrés. Le dispositif expérimental utilisé (figure 7) est composé d'une plaque d'aluminium de dimension  $2\text{m} \times 1\text{m}$  et d'épaisseur 6 mm et trois récepteurs piézoélectriques. Les signaux reçus par les trois récepteurs sont amplifiés et numérisés avant d'être envoyés vers l'ordinateur pour le traitement. Les positions des capteurs choisies sont les mêmes que dans les exemples présentés dans le paragraphe précédent, section 3 (voir figure 6).

Deux types d'excitation sont étudiées :

1. un cycle de sinusoïde (source connu).
2. une cassure de mine, également connu sous le nom "Hsu-Nielsen" (source inconnu).

Or l'application du principe de localisation présenté dans les sections précédentes nécessite un signal à bande étroite, centré autour d'une fréquence  $f_0$ , et de durée limitée. Dans les deux cas d'excitations, les signaux

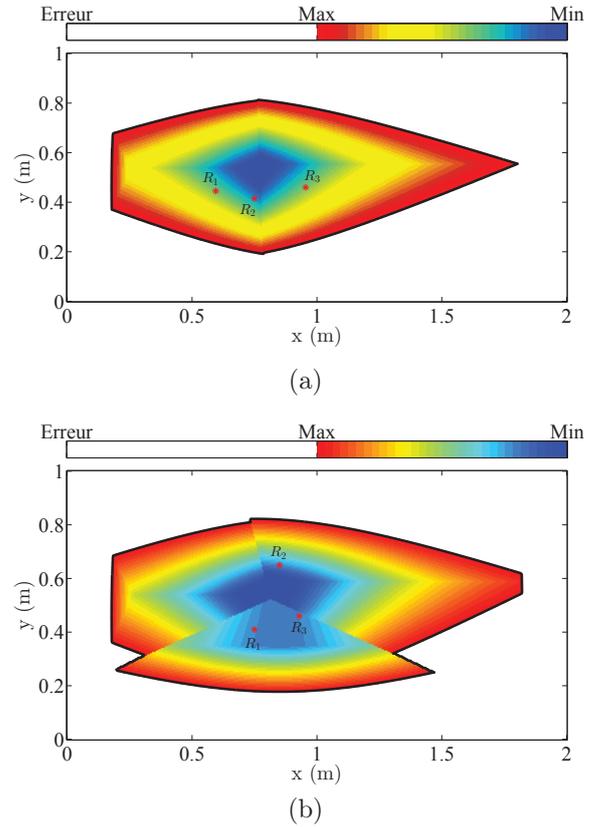


FIGURE 6 – La zone de localisation de la source. Trois récepteurs à des positions : (a)  $R_1(0.595, 0.445)$ ,  $R_2(0.75, 0.415)$ ,  $R_3(0.955, 0.46)$ , (b)  $R_1(0.752, 0.415)$ ,  $R_2(0.854, 0.65)$ ,  $R_3(0.927, 0.46)$ .

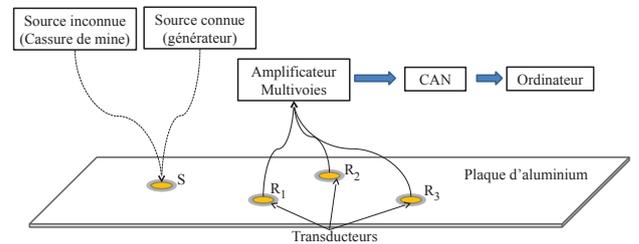


FIGURE 7 – Dispositif expérimental

recupérés par les récepteurs sont donc tout d'abord convolués par cinq cycles de sinusoïdes fenêtrées par une fenêtre de Hanning, où la fréquence centrale  $f_0$  est choisie de façon à privilégier l'excitation du mode  $A_0$  ( $f_0 = 30$  kHz). On est alors ramené au type de signal requis.

Comme expliqué dans la section 2.2, premièrement,  $A_{fit}$  est estimé au moyen d'un ajustement de la courbe appliqué sur la moyenne des intégrales de Schroeder. Puis, les valeurs de  $I_m^D$  sont calculées à partir des premiers paquet d'onde reçus par chacun des récepteurs. Finalement, le problème inverse de l'équation (18) est représentée sous la forme :

$$P(x, y) = \frac{1}{F(x, y)}. \quad (20)$$

La valeur maximum de  $P(x, y)$  correspondra à la position de la source. Pour deux positions différentes des récepteurs, les résultats d'estimation de la source sont

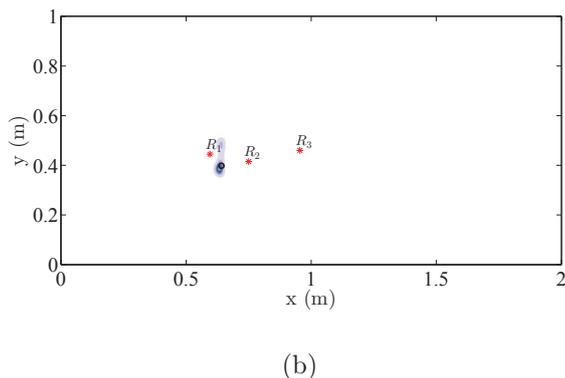
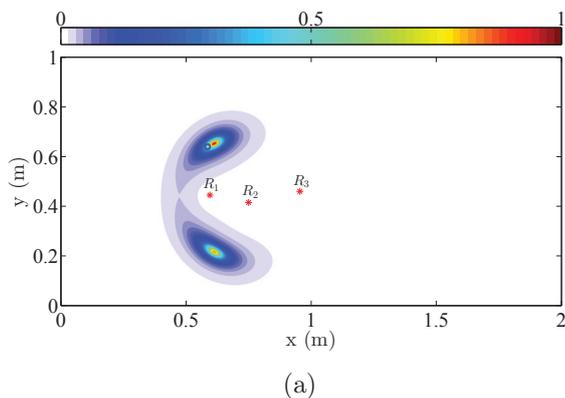


FIGURE 8 – Exemples d’estimation de la position de source pour des positions de récepteur données  $R_1$  (0.595, 0.445),  $R_2$  (0.75, 0.415),  $R_3$  (0.955, 0.46). (a) signal d’excitation connu. (b) signal d’excitation inconnu. Le cercle noir présente la position réelle de la source.

présentés dans les figures (8) et (9). les vraies positions des source sont indiquées par des petits ronds noirs et les récepteurs par des étoiles rouge ( $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$ ). On observe un bon accord entre les sources exactes et celles estimées.

La précision de la localisation peut être améliorée en utilisant des récepteurs supplémentaires. Mais ce qui est remarquable et intéressant ici, c’est que trois capteurs seulement sont suffisants, contrairement aux autres méthodes connues dans la littérature, qui utilisent au moins quatre capteurs.

## 5 Conclusion

les études menées dans ce papier illustrent la possibilité d’extraire des informations quantitatives à partir d’un nombre minimal de capteurs (ici trois capteurs) en exploitant les propriétés statistiques d’un milieu réverbérant. Des expressions théoriques sont développées pour calculer l’espérance mathématique de l’enveloppe et l’intégrale de Schroeder des signaux reçus dans un milieu réverbérant dispersif. Puis des résultats expérimentaux intéressants de la localisation de source sont présentés. Ces objectifs sont atteints sans aucune mesure de temps, ni de synchronisation entre les récepteurs et sans la connaissance du signal acoustique émis par la source.

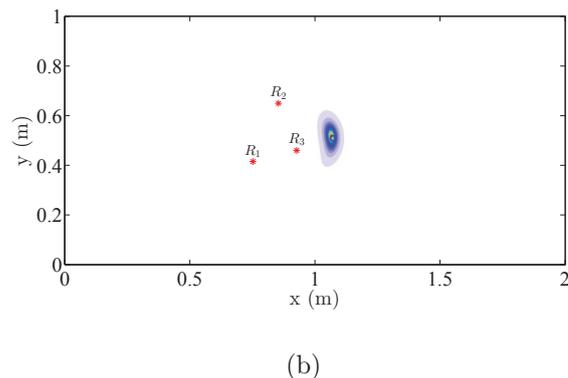
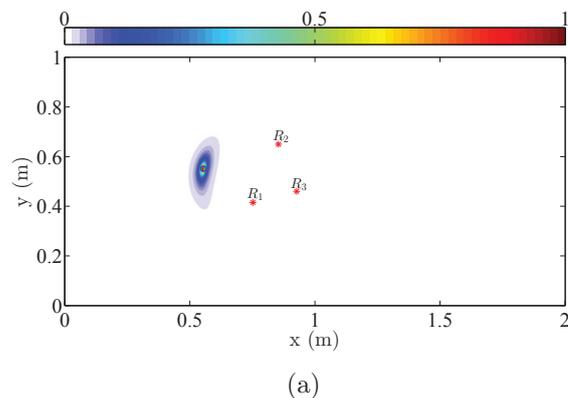


FIGURE 9 – Exemples d’estimation de la position de source pour des positions de récepteur données  $R_1$  (0.752, 0.415),  $R_2$  (0.854, 0.65),  $R_3$  (0.927, 0.46). (a) signal d’excitation connu. (b) signal d’excitation inconnu. Le cercle noir présente la position réelle de la source.

## Remerciements

Ce travail est partiellement financé par l’Agence Nationale de la Recherche (ANR) : ANR2011 BS0903901, PASNI projet.

## Références

- [1] A. Derode, A. Tourin, and M. Fink. Ultrasonic pulse compression with one-bit time reversal through multiple scattering. *J. Appl. Phys.*, 85 :6343-6352, 1999.
- [2] A. Aubry and A. Derode. Detection and imaging in a random medium : A matrix method to overcome multiple scattering and aberration. *J. Appl. Phys.*, 106 :044903, 2009.
- [3] E. Larose, L. Margerin, A. Derode, B. van Tiggelen, M. Campillo, N. Shapiro, A. Paul, M. Stehly, and M. Tanter. Correlation of random wavefields : An interdisciplinary review. *Geophysics*, 71 :S/11-S/21, 2006.
- [4] E. Larose, A. Derode, M. Campillo, and M. Fink. Imaging from one-bit correlations of wideband diffuse wave fields. *J. Appl. Phys.*, 95 :83 93, 2004.

- [5] E. Larose, T. Planes, V. Rossetto, and L. Margerin. Locating a small change in a multiple scattering environment. *Appl. Phys. Lett.*, 96 :204 101, 2010.
- [6] E. Moulin, N. Abou Leyla, J. Assaad, and S. Grondel. Applicability of acoustic noise correlation to Structural Health Monitoring in non-diffuse field conditions. *Appl. Phys. Lett.*, 95 :094104, 2009.
- [7] A. Duroux, K. G. Sabra, J. Ayers, and M. Ruzzene. Using cross-correlations of elastic diffuse fields for attenuation tomography of structural damage. *J. Acoust. Soc. Am.*, 127 :3311-3314, 2010.
- [8] J. de Rosny, P. Roux, M. Fink, and J. H. Page. Field fluctuation spectroscopy in a reverberant cavity with moving scatterers. *Phys. Rev. Lett.*, 90 :094302, 2003.
- [9] J. E. Michaels, Y. Lu, and T. E. Michaels. Methodologies for quantifying changes in diffuse ultrasonic signals with applications to structural health monitoring. In *Proc. SPIE, volume 5768, pages 97-105. T. Kundu, 2005.*
- [10] E. Moulin, H. Achdjian, J. Assaad, F. Benmedour, K. Hourany and Y. Zaatari. Statistical model of the impulse response of a reverberant plate : application to parameter estimation and correlation analysis. *Acoustics 2012, 24 Avril 2012, France.*
- [11] H. Achdjian, E. Moulin, F. Benmedour, J. Assaad and L. Chehami. Source localisation in a reverberant plate from average coda properties and early signal strength. *Acta Acustica United With Acustica.* (soumis)
- [12] E. Moulin, H. Achdjian, J. Assaad, N. Abou Leyla, K. Hourany, and Y. Zaatari. Extraction of statistical properties of the point source response of a reverberant plate and application to parameter estimation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 132 : 2165-2168, 2012.
- [13] J. Cuenca, F. Gautier, and L. Simon. The image source method for calculating the vibrations of simply supported convex polygonal plates. *J. Sound Vib.*, 322 :1048-1069, 2009.
- [14] N. Abou Leyla, E. Moulin, and J. Assaad. Influence of a localized defect on acoustic field correlation in a reverberant medium. *J. Appl. Phys.*, 110 :084906, 2011.
- [15] N. Abou Leyla, E. Moulin, J. Assaad, S. Grondel, and P. Poussot. Structural Health Monitoring using cross-correlation of an ambient noise field. In *Program abstracts Acoustics'08, J. Acoust. Soc. Am., volume 123, page 3698, Paris, France, 2008.*
- [16] M. R. Schroeder. *New Method of Measuring Reverberation Time.* *J. Acoust. Soc. Am.*, 37 :409-412, 1965.
- [17] R. Ratnam, D. L. Jones, B. C. Wheeler, W. D. O'Brien, C. R. Lansing, and A. S. Feng. *Blind estimation of reverberation time.* *J. Acoust. Soc. Am.*, 114 :2877-2892, 2003.
- [18] Y. Fujiso, A. Van Hirtum. *Évaluation des performances d'une chambre d'isolation acoustique destinée à la validation expérimentale de production de parole.* GIPSA-Lab, UMR 5216 CNRS, INPG.