

## **Efficacité Acoustique d'une Excitation de Type Aérodynamique**

R. Serré<sup>a</sup> et F. Margnat<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Arts et Métiers ParisTech, 151 Boulevard de l'hôpital, 75013 Paris, France

<sup>b</sup>CNRS Université de Poitiers ENSMA, 11 Boulevard Marie et Pierre Curie, 86036 Poitiers, France  
ronan.serre@ensam.eu

La présente étude cherche à évaluer l'énergie acoustique transférée vers le champ lointain lorsque le milieu propagatif est soumis à une excitation de type aérodynamique. Cette quantification sera essentiellement menée sur un critère d'efficacité acoustique, c'est-à-dire le taux d'énergie libérée en champ lointain par rapport à celle fournie par l'excitation. L'approche détaillée ici considère des excitations par une surface déformable en mouvement avec un formalisme d'intégrale de RAYLEIGH. La principale quantité décrivant ce type d'excitation est la vitesse normale de vibration. L'effet de la dynamique de l'excitation est étudiée. Les conditions de rayonnement sont les plus efficaces lorsque l'excitation est d'une longueur proportionnelle au double de l'inverse du nombre d'onde hydrodynamique. Par ailleurs, dans le formalisme développé ici, la directivité est peu affectée par l'ensemble des paramètres étudiés.

## 1 Introduction

Le bruit d'origine aérodynamique est fortement lié à la présence de structures spatiales cohérentes. L'expérience de Laufer & Yen [1] a identifié une telle structure sous la forme d'une onde de pression modulée en amplitude. Quelques années plus tard, Crighton & Huerre en proposeront une explication mathématique [2]. Ce type de structures contient peu d'énergie hydrodynamique. Pourtant, elles en transfèrent une grande partie en rayonnement et dominent donc le paysage acoustique par rapport aux structures tourbillonnaires environnantes. Comment ces structures cohérentes pilotent-elles la part d'énergie qui rayonnera en acoustique ? De nombreuses études ont contribué à une meilleure compréhension du phénomène en envisageant la résolution de l'équation d'onde de différentes manières. Une première catégorie a considéré la résolution de l'équation d'onde avec termes sources par l'approche analogique. On citera les travaux d'Obrist sur la forme [3] et la convection [4] d'un paquet d'onde modélisé par la première composante du tenseur de Lighthill. On citera également les travaux de Cavaleri *et al.* [5] pour la dynamique temporelle. La seconde catégorie est à l'initiative des travaux d'Avital & Sandham [6], où l'opérateur de propagation est excité par une condition limite. Cette seconde technique peut à son tour être divisée en deux approches selon le type de condition limite. Une condition limite de pression a fait l'objet d'une étude antérieure de la part des auteurs [7]. La présente étude apporte sa contribution au second type de condition limite, par la prescription d'une vitesse normale de vibration. En reprenant la forme utilisée pour l'étude de l'excitation en pression, la vitesse normale de vibration est prescrite *via* la topologie de la surface, modulée par une enveloppe de type gaussienne, symétrique et centrée. La vitesse normale de vibration étant la seule quantité dynamique connue sur la source, une surface rigide et parfaitement réfléchissante est considérée afin d'appliquer la méthode des images et ainsi de se ramener, dans le formalisme de Kirchhoff, à une intégrale connue sous le nom d'intégrale de RAYLEIGH [8]. La mise en place numérique de la résolution de l'intégrale de RAYLEIGH est validée par comparaison avec un développement analytique en champ lointain, et permet ensuite l'investigation d'une gamme de formes et de mouvements. Sont ainsi testées, la longueur de l'enveloppe modulant l'amplitude de vibration de la surface et la vitesse de phase de l'onde convectée que cette enveloppe module. L'analyse de la réponse acoustique est ensuite abordée selon un critère d'efficacité acoustique.

## 2 Modélisation de l'excitation

On considère une surface bidimensionnelle d'équation  $h = S(y_1)$  produisant un rayonnement par vibration. Cette vibration est caractérisée par la donnée de  $h$  :

$$h(y_1, t) = h_0 e^{-\left(\frac{y_1}{\sigma}\right)^2} e^{i\frac{\omega}{U_c} y_1} e^{-i\omega t} \quad (1)$$

où  $h_0$  est l'amplitude maximale, fixée petite devant l'unité,  $\omega$  est la pulsation de la vibration,  $U_c$  la vitesse de convection de l'onde modulée et  $\sigma$  est la demi-longueur de l'enveloppe. Le nombre d'onde hydrodynamique  $k_h = \omega/U_c$  est sélectionné comme longueur de référence. La vitesse normale de vibration est la dérivée temporelle de la hauteur de la surface  $S_0$ . Dès lors, cette vitesse s'écrit formellement :

$$u(y_1) = \omega h_0 e^{-\left(\frac{y_1}{\sigma}\right)^2} \sin(k_h y_1) \quad (2)$$

Le rayonnement est ensuite observé au point observateur de coordonnées  $R$  et  $\theta$  tels que représentés sur la figure 1.

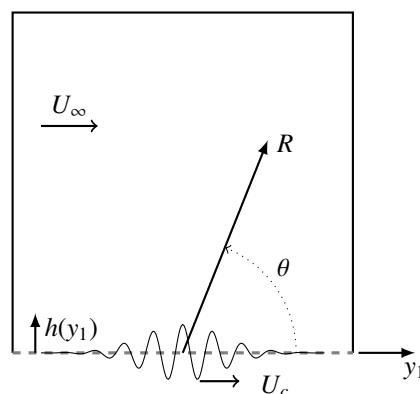


FIGURE 1 – Représentation schématique de la distribution de l'amplitude de vibration et du domaine de modélisation.

### 2.1 Rayonnement par intégrale de RAYLEIGH

L'application du théorème de Kirchhoff à une surface bidimensionnelle, rigide et parfaitement réfléchissante sans terme source est connue sous le nom d'intégrale de RAYLEIGH. Celle-ci permet d'exprimer la pression acoustique perçue par un observateur et générée par le mouvement oscillatoire d'une surface dont on ne connaît que la vitesse normale de vibration.

$$p(R, \theta) = -2i\omega\rho_0 \int_{S_0} u(y_1) \hat{G}(\mathbf{x}, \omega|\mathbf{y}) dS_0 \quad (3)$$

avec  $\rho_0$  la densité du milieu propagatif et  $\hat{G}(\mathbf{x}, \omega|\mathbf{y})$  la fonction de Green. En  $2D$  :

$$\hat{G}(\mathbf{x}, \omega|\mathbf{y}) = \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(k_a r) \quad (4)$$

avec  $H_0^{(1)}$  la fonction de Hankel de première espèce d'ordre 0,  $k_a = \omega/c_\infty$  le nombre d'onde acoustique et  $r$  la distance telle que  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ . Avec les notations précédentes, on a :

$$p(R, \theta) = -\frac{\omega\rho_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u(y_1) H_0^{(1)}(k_a r) dy_1 \quad (5)$$

avec

$$r = \sqrt{(R \cos \theta - y_1)^2 + (R \sin \theta - h(y_1))^2}$$

## 2.2 Solution analytique en champ lointain

Dans le cas où les dimensions de l'observateur sont grandes devant celles de la source ( $|\mathbf{x}| \gg |\mathbf{y}|$ ), le rayon peut s'approcher par :

$$r \underset{|\mathbf{x}| \gg |\mathbf{y}|}{\sim} |\mathbf{x}| - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{|\mathbf{x}|} \quad (6)$$

et la fonction de Hankel développée aux grands arguments :

$$H_\nu^{(1)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i\left(z - \nu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \quad (7)$$

La pression acoustique perçue par un observateur lointain peut alors s'approcher par l'expression :

$$p(R, \theta) \sim -\frac{\omega\rho_0}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi k_a R}} e^{i\left(k_a R - \frac{\pi}{4}\right)} \times \int_{-\infty}^{+\infty} u(y_1) e^{-i(k_a \cos \theta y_1 + k_a \sin \theta h(y_1))} dy_1 \quad (8)$$

En considérant de faibles amplitude de vibration, c'est-à-dire  $h_0 \ll 1$ , il vient :

$$p(R, \theta) \sim -\frac{\omega\rho_0}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi k_a R}} e^{i\left(k_a R - \frac{\pi}{4}\right)} \times \int_{-\infty}^{+\infty} u(y_1) e^{-i(k_a \cos \theta y_1)} dy_1 \quad (9)$$

L'intégrale s'identifie à la transformation de FOURIER spatiale pour le mode  $K = k_a \cos \theta$ , soit :

$$\hat{u}(K) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u(y_1) e^{-iKy_1} dy_1 \quad (10)$$

d'où

$$p(R, \theta) \sim -\omega\rho_0 \sqrt{\frac{2\pi}{k_a R}} e^{i\left(k_a R - \frac{\pi}{4}\right)} \hat{u}(K) \quad (11)$$

Lorsque la répartition des vitesses de vibration est modulée par une gaussienne (équation (2)), on peut approcher sa transformée de FOURIER par :

$$\hat{u}(K) = -\frac{i\sigma\omega h_0}{4\sqrt{\pi}} \left\{ \left[ -1 + \cosh(K k_h \sigma^2) + \sinh(K k_h \sigma^2) \right] \times \left[ \cosh\left(\frac{(K + k_h)^2 \sigma^2}{4}\right) - \sinh\left(\frac{(K + k_h)^2 \sigma^2}{4}\right) \right] \right\} \quad (12)$$

Par rapport à une excitation en pression [7], l'expression analytique (11) de la pression acoustique n'est pas pondérée par la fonction *sinus*, induisant une directivité moins marquée.

## 2.3 Considérations énergétiques et notion d'efficacité

L'efficacité acoustique est définie par le rapport entre la puissance  $W_a$  rayonnée par l'acoustique en champ lointain et la puissance  $W_m$  apportée au système hydrodynamique

$$\eta = W_a/W_m \quad (13)$$

La puissance nécessaire à la vibration de la surface est un travail mécanique, issu de la contribution d'une énergie potentielle et d'une énergie cinétique [8]. En notant  $W_m$  la puissance mécanique de la surface, on peut écrire :

$$W_m = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \left( \frac{1}{2} \omega^2 h(y_1)^2 + \frac{1}{2} u(y_1)^2 \right) \rho_0 u(y_1) \right] dy_1 \quad (14)$$

et la puissance acoustique peut être définie par une intégration de la pression acoustique sur un demi-cercle à  $R$  fixé :

$$W_a = R \int_0^\pi \frac{|p(R, \theta)|^2}{\rho_0 c_\infty} d\theta \quad (15)$$

où le symbole  $|\cdot|$  indique le module.

## 3 Validation et résultats

L'approche numérique de l'intégrale de RAYLEIGH (5) est comparée avec l'approximation en champ lointain (11) à  $R = \lambda_a$  et  $R = 10\lambda_a$  où  $\lambda_a = 2\pi/k_a$  est la longueur d'onde acoustique. La répartition de l'amplitude des vibrations  $h(y_1)$  est définie pour une demi-longueur de  $\sigma k_h = 2\pi$ . L'onde intérieure est convectée à la vitesse de phase  $U_c$  telle que le nombre Mach de phase  $M_c = U_c/c_\infty$  vaut 0,01 pour une amplitude maximale  $h_0 k_h = 0,05$ . Cette valeur de  $M_c$  conduit à une fréquence de vibration  $f = \omega/2\pi = k_h U_c/2\pi$  proche de l'unité. La surface continue  $S_0$  est définie sur un support  $L_{y_1}$  de 40 longueurs d'onde hydrodynamique en  $y_2 = 0$ .

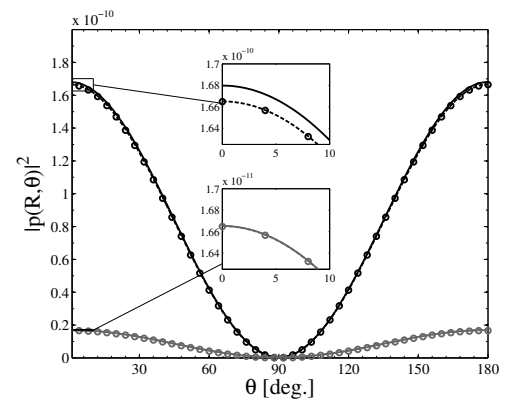


FIGURE 2 – Validation de l'implantation numérique (5) (courbes pleines) par comparaison avec la formulation analytique en champ lointain (11) (courbes pointillées avec symboles). Observations du module de la pression au carré, à  $R = \lambda_a$  (courbes noires) et  $R = 10\lambda_a$  (courbes grises).

Afin d'étudier l'impact de la forme de la sollicitation, on représente (figure 3) une cartographie de l'efficacité acoustique selon l'évolution de la longueur du paquet d'ondes *via* le paramètre  $\sigma k_h$  et de sa vitesse de phase *via* le

nombre de Mach de phase  $M_c$ . Les longueurs  $\sigma k_h$  étudiées vont de 0 à 20. Les nombres de Mach de phase étudiés vont de 0 à 0,4.

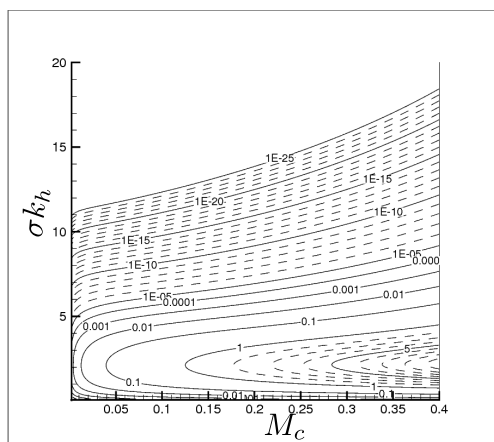


FIGURE 3 – Influence de la longueur du paquet d'ondes et de sa vitesse de phase. Isocontours de l'efficacité acoustique. Observations à  $R = 10\lambda_a$ .

Sur la figure 3, l'efficacité acoustique  $\eta$  augmente toujours avec l'augmentation du nombre de Mach de phase  $M_c$ , pour toutes longueurs  $\sigma k_h$ . Il apparaît ensuite un maximum de l'efficacité acoustique lorsque  $\sigma k_h \approx 2$  et ce, quelque soit le nombre de Mach de phase,  $M_c$ . Ce résultat rappelle ce qui est obtenu lors de la sollicitation en pression pour laquelle la valeur de  $\sigma k_h \approx 1$  apporte l'efficacité maximale [7]. Tant que  $\sigma k_h$  est en dessous de cette valeur critique, l'efficacité augmente avec l'augmentation de la longueur  $\sigma k_h$ , atteint son maximum en  $\sigma k_h \approx 2$  puis diminue jusqu'à un bruit résiduel. L'amplitude des ordres de grandeurs traversée par l'efficacité acoustique est notable. Au plus fort, un niveau d'efficacité est atteint autour de  $\eta \approx 10$  pour  $\sigma k_h \approx 2$  et  $M_c \approx 0.4$ . En deçà de  $10^{-25}$ , les isocontours ne sont pas représentés. On retrouve là encore une autre constante par rapport à l'étude sur l'excitation en pression : la valeur de  $\sigma k_h \approx 10$ , indiquant le début de la zone de bruit résiduel pour  $\eta < 10^{-25}$ .

## 4 Conclusion

La réponse acoustique du milieu aérodynamique a été étudiée pour une sollicitation de vitesse. Cette sollicitation a été imposée par une surface dont l'amplitude de vibration est modulée par une enveloppe gaussienne symétrique centrée. La mise en œuvre numérique de l'intégrale de RAYLEIGH (équation (5)) a permis de cartographier la réponse acoustique et d'étudier l'influence de la longueur de la modulation ainsi que de la vitesse de phase de celle-ci. Pour une répartition de la sollicitation marquée par une modulation en gaussienne symétrique centrée, imposer la vitesse comme condition limite pour le rayonnement acoustique rend la directivité indépendante de la dynamique de la surface excitante, avec un angle constant de  $90^\circ$ , et induit des ordres de grandeurs d'efficacité acoustique sinon importants, du moins remarquables, avec un maximum lorsque  $\sigma k_h \approx 2$ . Un fait notable est la topologie de l'efficacité acoustique qui présente une certaine similitude avec ce qui est observé pour l'excitation en pression [7]. La

validation de l'outil numérique permet d'envisager d'étendre l'analyse à des formes d'enveloppes plus élaborées.

## Références

- [1] J. Laufer, T. Yen, Noise generation by a low mach number jet, *Journal of Fluid Mechanics* **134**, 1–32 (1983).
- [2] D. Crighton, P. Huerre, Shear-layer pressure fluctuations and superdirective acoustic sources, *Journal of Fluid Mechanics* **220**, 355–368 (1990).
- [3] D. Obrist, Directivity of acoustic emissions from wave packets to the far field, *Journal of Fluid Mechanics* **640**, 165–186 (2009).
- [4] D. Obrist, Acoustic emissions from convected wave packets, *Physics of fluids* **23**, 1–14 (2011).
- [5] A. V. G. Cavalieri, P. Jordan, A. Agarwal, Y. Gervais, Jittering wave packet models for subsonic jet noise, *Journal of Sound and Vibration* **330**, 4474–4492 (2011).
- [6] E. Avital, N. Sandham, A note on the structure of the acoustic field emitted by a wave packet, *Journal of Sound and Vibration* **204**, 533–539 (1997).
- [7] R. Serré, F. Margnat, Modeling aeroacoustic excitations by subsonic wave packets in the kirchhoff formalism, in : *21<sup>e</sup> Congrès Français de Mécanique*, Bordeaux, France (2013).
- [8] L. E. Kinsler, A. R. Frey, A. B. Coppens, J. V. Sanders, *Fundamentals of Acoustics*, 4<sup>th</sup> Edition, John Wiley & Sons, New York.