



## **De la nécessité d'avoir un modèle numérique convergé pour l'obtention de bons résultats en 1/3 octave**

A. Tribaleau<sup>a</sup>, O. Dazel<sup>a</sup>, B. Brouard<sup>a</sup>, J.-M. Génevaux<sup>a</sup> et D. Blon<sup>b</sup>

<sup>a</sup>LAUM, UMR-CNRS 6613, Université du Maine, Av. Olivier Messiaen, 72085 Le Mans, France

<sup>b</sup>CrittBois, 27, rue Philippe Séguin, 88051 Epinal, France

antonin.tribaleau.etu@univ-lemans.fr

L'utilisation de la Méthode des Éléments-Finis est encore pour le moment anecdotique dans la communauté de l'acoustique du bâtiment. Une des raisons principales est le coût numérique indéniable inhérent à cette méthode. En acoustique du bâtiment, le filtrage en bande de fréquences 1/3 d'octave ou d'octave est imposé pour exprimer les résultats de mesures par les normes (NF EN ISO 10140 [1]) et il relève l'énergie contenue dans chaque bande. La convergence d'un modèle par éléments finis peut donc être étudiée selon deux types d'indicateurs : l'écart sur les résonances du système et celui sur l'énergie contenue dans les bandes de fréquences. Nous avons obtenu qu'un modèle non-convergé sur les fréquences propres est néanmoins suffisant lorsque l'on moyenne les réponses en 1/3 d'octave. Cette caractéristique est induite par le lissage des singularités par le filtrage impliquant finalement une convergence plus rapide par rapport à celle constatée sur les résonances du système. La conséquence directe de cela permet de réduire de façon significative le coût de calcul associé à la méthode des éléments-finis, mais aussi élargir sa plage d'utilisation fréquentielle.

## 1 Introduction

En acoustique du bâtiment, la résolution de problème vibro-acoustique par la méthode des éléments finis peut paraître initialement inadaptée, au regard des longueurs d'onde induites par la limite haute du spectre des fréquences (4kHz) et les dimensions du domaine. Cependant cette méthode de calcul est justifiée pour la construction bois car la problématique associée à l'isolation acoustique se situe dans le domaine des basses fréquences [2, 4]. Ce travail s'inscrit dans le projet *VIBRACOUBOIS* destiné à prédire le comportement vibro-acoustique des systèmes constructifs bois.

L'objectif est de justifier la non-nécessité de travailler sur un modèle numérique convergé lorsque les résultats sont filtrés en bande d'octave ou de tiers d'octave. La notion d'un modèle convergé n'a donc de sens que lorsque les spectres sont présentés en bandes fines.

Le document se décompose dans un premier temps dans l'étude de la convergence sur les fréquences propres de domaines simples découplés : cavités et plaques parallélépipédiques. Par la suite, nous prolongeons cette étude de convergence par l'indicateur énergétique afin de constater des différences entre ces deux indicateurs. Finalement, nous appliquons nos remarques sur la résolution d'un problème couplé fluide/structure par l'estimation de l'affaiblissement d'une plaque finie.

## 2 Modèle numérique du problème fluide/structure

La modélisation du problème est réalisée selon la méthode des éléments finis. Elle repose sur la discrétisation du problème couplé écrit sous la formulation faible [3]. On utilise pour cela le logiciel libre *FreeFem++* qui exploite directement l'écriture des formulations variationnelles du problème. Les hypothèses principales sont :

- Domaine fluide : modèle conservatif de l'équation d'onde, avec/sans impédance de surface,
- Domaine structure : modèle d'élasticité linéaire avec/sans amortissement structural.

## 3 Convergence sur les fréquences propres des sous-systèmes

Dans cette partie, nous déterminons les fréquences propres du système découplé fluide/structure, décrit sur la

fig. 1, pour étudier la convergence de ces fréquences pour chaque domaine.

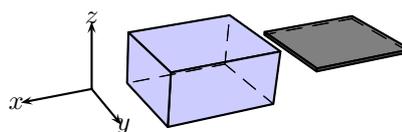


FIGURE 1 – Domaine découplé fluide et structure pour l'étude de la convergence aux fréquences propres de chaque sous-système.

La résolution numérique de chaque sous-système repose sur les conditions et propriétés suivantes :

- Fluide :
  - conditions aux limites de Neumann nulles imposées sur les parois,
  - $L_x = 5$  m,  $L_y = 4$  m,  $L_z = 3$  m,
  - $\rho_0 = 1.2$  kg.m<sup>-3</sup> et  $c_0 = 344$  m.s<sup>-1</sup>,
- Structure :
  - $E = 12$  GPa,  $\nu = 0.25$  et  $\rho = 500$  kg.m<sup>-3</sup>,
  - encastrée sur 2 bords adjacents et libre sur les 2 autres,
  - $L_x = 5$  m,  $L_y = 4$  m,  $h = 0.14$  m.

Le raffinement des maillages est effectué par un paramètre définissant le nombre d'éléments par unité de longueur pour les 3 directions principales de la géométrie. Cette condition permet de conserver des tétraèdres quasi-régulier sur l'ensemble des maillages. En raffinant le maillage, nous relevons l'évolution des fréquences propres des modes compris dans la plage basses fréquences : [0; 353] Hz qui correspond aux bandes de tiers-d'octave inférieures à 315 Hz. À partir du nombre de degrés de liberté par unité de longueur  $n_{d.d.l.}/m$  des différents maillages, nous nous ramenons ensuite au calcul du nombre de degrés de libertés par longueur d'onde  $n_{d.d.l.}/\lambda$  pour chaque sous-système. Ce calcul est mené par l'intermédiaire de la définition des vitesses des ondes de flexion (plaque, cf. éq. 1) et longitudinale (cavité), où :

$$c_b = \sqrt[4]{\frac{D\omega^2}{\rho_s}} \quad , \quad (1)$$

avec :

- $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ , le module de rigidité de la plaque,

- $\rho_s$ , la masse surfacique.

On trace ainsi, sur les fig. 2 (structure) et 3 (fluide), l'évolution des écarts observés sur les fréquences propres en fonction du nombre de degrés de liberté par longueur d'onde pour chaque mode considéré. Les valeurs de référence pour le calcul d'écart correspondent aux fréquences propres obtenues par les modèles les plus raffinés. Différentes fonctions d'interpolations entre les éléments finis sont également testées dans cette étude : linéaire (P1) et quadratique (P2).

### 3.1 Résultats

Dans un premier temps, les fig. 2 et 3 indiquent initialement un résultat attendu : une convergence plus rapide pour les fonctions d'interpolations quadratiques. En comparant ces deux figures, on remarque une dispersion des courbes d'écarts sur les fréquences propres pour chaque mode plus importantes pour le sous-système plaque par rapport à celle constatée pour le sous-système cavité. Ceci peut être justifié par l'effet du cisaillement pour les modes de flexion.

Finalement, s'il l'on choisi un écart toléré de l'ordre de 1 % sur les fréquences propres, les courbes obtenues nous indiquent qu'il est nécessaire de mailler les sous-systèmes selon les conditions décrites dans le tab. 1.

Type	Fonctions d'interp.	
	P1	P2
Unité : $n_{d.d.l.}/\lambda$		
Fluide	14	6
Structure	350	33

TABLEAU 1 – Nombre minimum de degrés de liberté par unité de longueur d'onde pour obtenir un écart inférieur à 1% sur les fréquences propres.

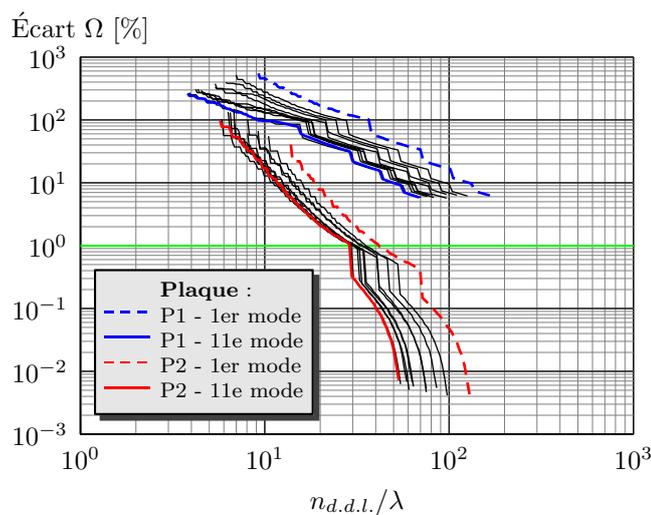


FIGURE 2 – Évolution des écarts sur les fréquences propres des modes de flexion en fonction du rang modal et du degrés des fonctions d'interpolation - modèle de plaque.

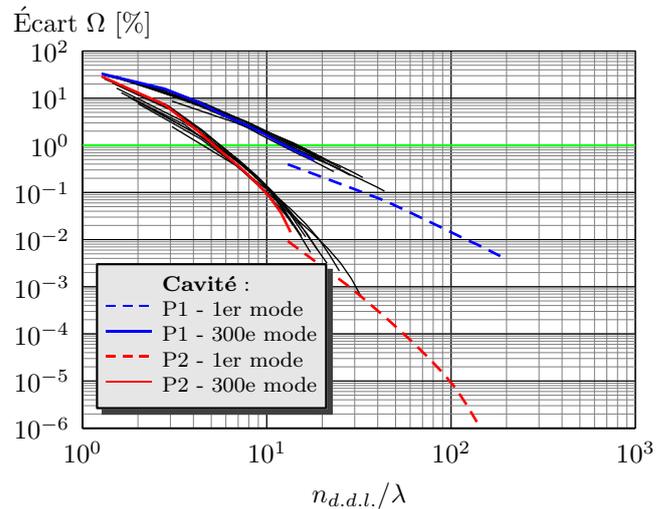


FIGURE 3 – Évolution des écarts sur les fréquences propres des modes de cavité en fonction du rang modal et du degrés des fonctions d'interpolation - modèle de cavité.

## 4 Convergence sur l'énergie des réponses spectrales

Dans la section précédente, nous avons pu observé l'évolution de l'écart commis sur les fréquences propres de chaque sous-système en fonction du nombre de degrés de liberté du maillage. Toutefois, la condition d'un modèle convergé sur les fréquences propres est-elle nécessaire pour un calcul de type ingénierie où les spectres sont parfois filtrés en bandes d'octave ou de tiers-d'octave ?

### 4.1 Filtrage en bande de fréquence

Le filtrage en bande de fréquence consiste à estimer l'énergie d'un spectre en bandes fines filtrée par un fenêtrage fréquentiel de type passe-bande. Dans le cas d'un filtrage de type  $1/n$  octave, les fréquences de coupure basse  $f_{c,1}$  et haute  $f_{c,2}$  sont définies par l'éq. 2, où  $f_0$  représente la fréquence centrale de la bande.

$$f_{c,1} = f_0/2^{1/2n} \quad \text{et} \quad f_{c,2} = f_0 \cdot 2^{1/2n} \quad (2)$$

On retrouve généralement la notion de pente d'atténuation dans les filtre, exprimée en dB/octave. Dans notre cas d'étude, nous choisissons de filtrer les spectres par des fenêtres rectangulaires, c'est à dire avec des pentes infiniment raides (cf. fig. 4).

Afin de comparer les écarts sur l'énergie dans les bandes fréquences avec ceux obtenus sur les fréquences propres, nous réalisons un calcul numérique de la réponse de chaque sous-système avec différents niveaux de raffinement de maillage.

### 4.2 Réponse fréquentielle de chaque sous-système

Pour étudier la convergence d'une réponse fréquentielle d'un sous-système où le maillage est évolutif, il est nécessaire que le second membre de la formulation variationnelle soit invariant sur l'ensemble des maillages utilisés. Nous choisissons donc de travailler avec des efforts

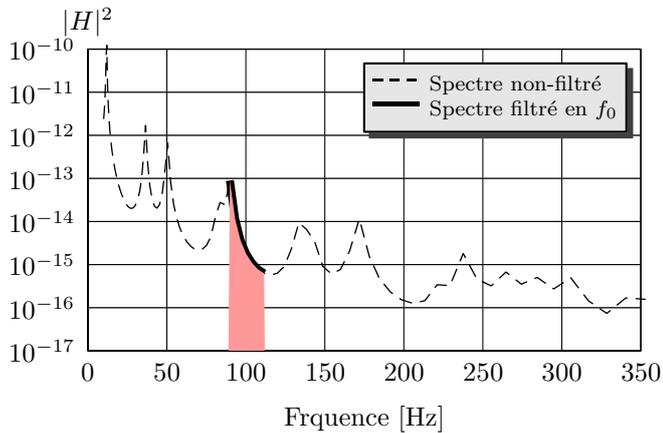


FIGURE 4 – Exemple d'un spectre  $|H|^2$  filtré par un passe-bande en tiers d'octave, centrée à  $f_0 = 100$  Hz avec  $f_{c,1} = 89$  et  $f_{c,2} = 112$  Hz

nodaux pour exciter les deux sous-systèmes. La position du nœud d'excitation est légitimement un point invariant de la géométrie du modèle : un angle décrit sur la fig 5 pour chaque sous-système.

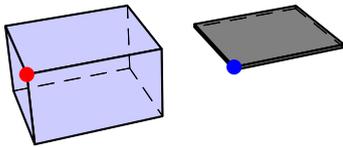


FIGURE 5 – Modèles géométriques pour le calcul des réponses fréquentielles de chaque sous-système (cavité et plaque) - source nodale de pression (point rouge) et de force normale (point bleu).

La résolution fréquentielle des spectres des sous-systèmes est basée avec un vecteur fréquence de 1000 points répartis logarithmiquement et compris entre [10; 353] Hz ; soit environ 70 points dans chaque bande. Il est important de signaler l'importance de la résolution. En effet, l'énergie calculée dans une bande de fréquence est sensible à l'amplitude du spectre, d'autant plus aux résonances du système. Il faut donc privilégier un nombre important de points pour englober correctement ces résonances, là où l'amplitude du spectre est la plus grande. La dissipation permet ainsi de limiter l'amplitude des raies associées aux résonances et qui vaut pour chaque sous-systèmes :

- fluide : impédance de surface pour atteindre un coefficient de réflexion  $\mathbb{R} = 0.96$ ,
- structure : amortissement structural  $\eta = 3 \%$ .

Nous choisissons comme modèle de référence les maillages dont les écarts observés sur les fréquences propres sont de l'ordre de 1%. À partir de la limite haute de la bande spectrale d'étude, nous en déduisons le nombre d'élément par unité de longueur pour chaque sous-domaine et selon des fonctions d'interpolation quadratique. Ces données sont présentées dans le tab. 2.

Type	$n_{d.d.l.}/\lambda$	$\lambda_{f_{max}}$	$n_{d.d.l.}/m$
Fluide	(P2) 6	0.97 m	6.2
Structure	(P2) 33	1.91 m	17.2

TABLEAU 2 – Nombre de degrés de liberté nécessaires pour obtenir un écart maximal sur les fréquences propres de 1%.

### 4.3 Résultats

Les fig. 6 et 7 présente les spectres des vitesses et pressions quadratiques moyennes pour différents niveaux de raffinement de maillage. Pour un maillage grossier, soit des éléments de dimension 10 fois plus grande que celle déterminée pour un écart d'1% sur les fréquences (cf. tab. 2), la réponse en fréquence de ces modèles (courbes en bleu) est très différente de celle des modèles convergés en fréquence (courbe en noir). Ceci étant, on constate peu de différences entre le modèle convergé en fréquence avec un modèle dont le maillage est légèrement plus grossier (éléments 1.1 fois plus grand).

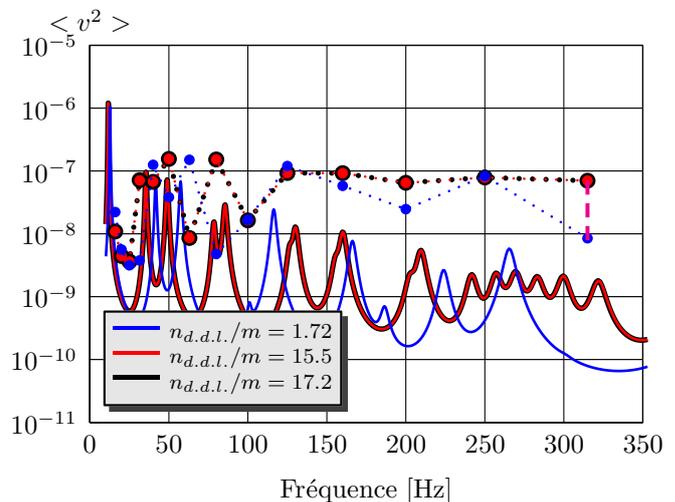


FIGURE 6 – Évolution des spectres de la vitesse quadratique moyenne en bandes fines, et filtré en bande de tiers d'octave selon différents niveaux de finesse de maillage - modèle de plaque.

Ainsi, pour chaque niveau de raffinement de maillage, on relève les écarts sur les niveaux d'énergie des spectres filtrés dans chaque bande. On présente, sur les fig. 8 et 9, la corrélation des écarts relevés sur l'énergie avec ceux constatés sur les fréquences propres.

Pour construire ces courbes, on relève pour chaque niveau de raffinement de maillage  $n_{d.d.l.}/m$  :

- en abscisse : l'écart relatif sur l'énergie dans une bande de fréquence (exprimé en dB),
- en ordonnée : la moyenne des écarts sur les fréquences propres, dont leurs valeurs sont comprises dans la bande de fréquences considérée (exprimée en %).

En imposant un seuil arbitraire de 1 dB sur l'énergie, qui reste acceptable dans le domaine de l'ingénierie, il est donc possible de déterminer l'écart moyen induit sur les fréquences propres de chaque sous-système (cf. tab. 3). On relève ainsi les dimensions des mailles les plus grossières

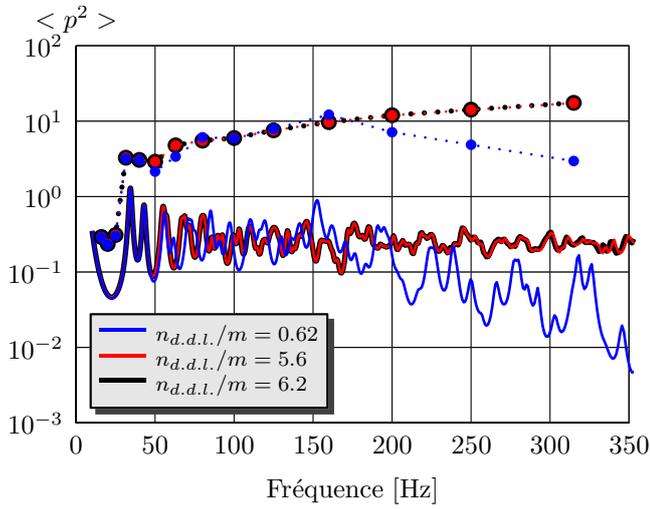


FIGURE 7 – Évolution des spectres de la pression quadratique moyenne en bandes fines, et filtré en bande de tiers d’octave selon différents niveaux de finesse de maillage - modèle de cavité.

dont le seuil sur l’énergie de 1 dB n’est pas dépassé. Un rapport de 2 à 3 est constaté entre la contrainte associée à la convergence en fréquence (1 %), et celle associée à la convergence en énergie (1 dB). Cette observation conduit à un allègement de la finesse du maillage, et donc du coût de calcul, lorsque le critère de convergence est associé à l’énergie du spectre filtré.

$n_{d.d.l.}/\lambda$	Écart $\Omega = 1\%$	Écart $E = 1$ dB
Fluide	6	2
Structure	33	17

TABLEAU 3 – Comparaison du nombre de degrés de liberté nécessaires par longueur d’onde selon le critère des fréquences propres et de l’énergie.

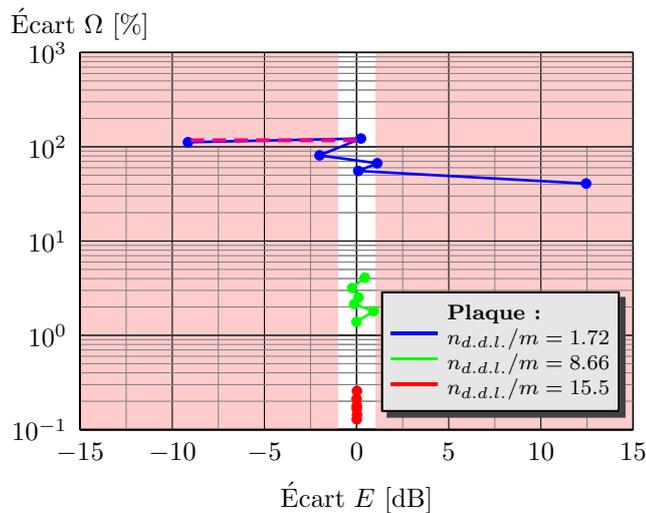


FIGURE 8 – Ratio des erreurs constatées sur les fréquences propres  $\Omega$  sur celles constatées sur l’énergie  $E$  pour différents niveaux de finesse de maillage - modèle de plaque.

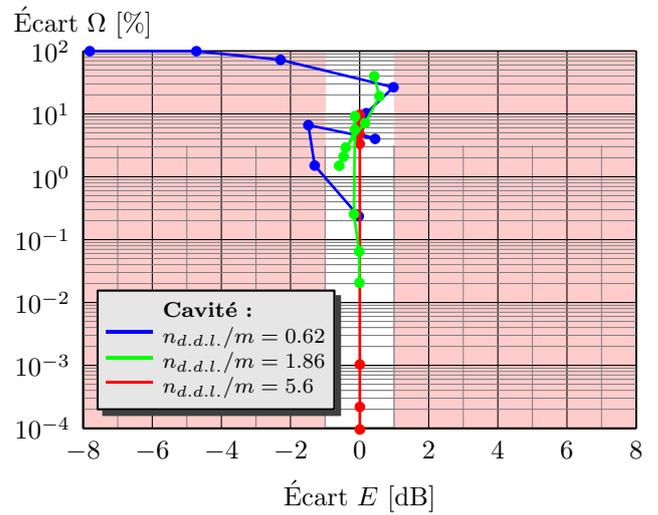


FIGURE 9 – Ratio des erreurs constatées sur les fréquences propres  $\Omega$  sur celles constatées sur l’énergie  $E$  pour différents niveaux de finesse de maillage - modèle de cavité.

## 5 Résolution du modèle couplé convergé en énergie : gain en temps de calcul

Pour constater le ratio écart / coût numérique qu’offre le critère de convergence en énergie, on modélise le problème vibro-acoustique du calcul de l’affaiblissement d’une plaque. Celui-ci peut être modélisé par la résolution du système couplé fluide/structure {cavité - plaque - cavité} décrit sur la fig. 10, où l’affaiblissement acoustique est défini comme le rapport logarithmique de la puissance acoustique incidente  $W_i$  sur celle transmise  $W_t$  (cf. éq. 3).

$$R = 10 \log \left( \frac{W_i}{W_t} \right) \quad \text{avec} \quad W_k = \frac{1}{8\rho_0 c_0} \int_{\Omega_{Fn}} |\tilde{p}_k|^2 d\Omega_{Fn}, \quad (3)$$

avec  $\tilde{p}_n$  : le champ de pression acoustique dans la cavité  $n$ .

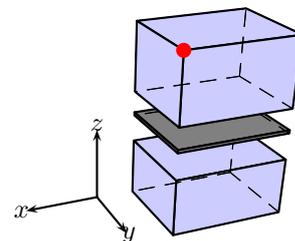


FIGURE 10 – Vue éclatée du modèle numérique {cavité - plaque - cavité} pour le calcul de l’affaiblissement acoustique d’une plaque.

Pour cette modélisation, les dimensions et les conditions aux limites sont les suivantes :

- Cavités :  $L_x = 5$  m,  $L_y = 4$  m,  $L_{z,i} = 3$  m et  $L_{z,t} = 2.5$  m,
- Plaque : encastrée sur ses bords.

Deux calculs de l'affaiblissement sont menés dans cette partie. L'un appliqué au modèle permettant d'atteindre une convergence de 1% sur les fréquences propres (noté Mod. conv. Fréq.) et l'autre appliqué au modèle permettant d'atteindre une convergence sur l'énergie de 1 dB pour chaque sous système (noté Mod. conv. Énerg.).

## 5.1 Résultats

Les fig. 11 et 12 présentent les spectres des affaiblissements acoustiques, respectivement en bandes fines et filtrés en bande de tiers d'octave de la géométrie décrite sur la fig. 10.

Même si l'on constate de fortes différences dans le spectre représenté en bandes fines entre les deux modèles numériques à partir de 120 Hz, on note que le filtrage en bande de fréquence lisse ces variations. Ces variations de comportement en bandes fines, de l'ordre de 12 dB au maximum, sont ainsi estompées et atteignent 2.5 dB au maximum, qui correspond à l'écart constaté dans la bande 315 Hz.

Finalement, en couplant des sous-systèmes dont la finesse des maillages induisent un écart maximal de 1% sur l'énergie, on constate que l'écart du système couplé est un cumul des écart de chaque sous-système indépendant.

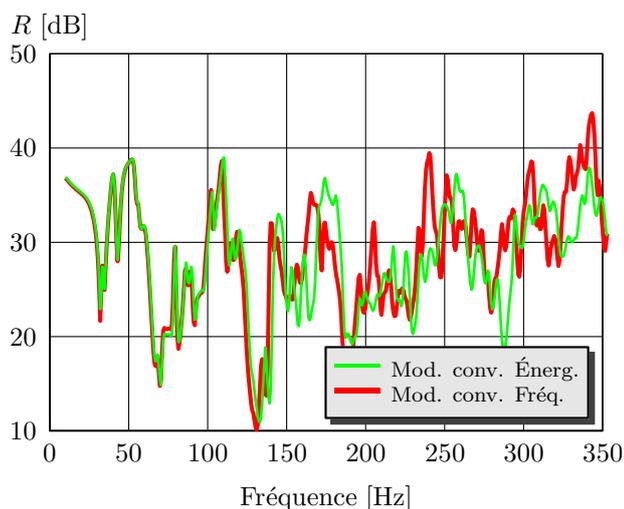


FIGURE 11 – Spectre de l'affaiblissement acoustique en bandes fines du modèle convergé en fréquence et en énergie.

En terme de coût numérique, le tab. 4 présente un rapport de temps de calcul de l'ordre de 20 entre les deux modèles. En terme de ressources, les modèle numérique convergé en énergie ( $n_{d.d.l} = 10\,287$ ) est plus léger à stocker par rapport à son homologue convergé en fréquence ( $n_{d.d.l} = 126\,513$ ).

Modèle	Écart $\Omega$ (F - S)	Écart max (R)	Tps calcul
Conv. $\Omega$	1 - 1 %	-	réf : 100
Conv. $E$	13 - 2 %	2.5 dB	5.2

TABLEAU 4 – Comparaison des écarts maximums relevés sur le spectre d'affaiblissement filtré et les temps de calcul selon les deux modèles numériques convergés selon le critère de la fréquence ( $\Omega$ ) et de l'énergie ( $E$ ).

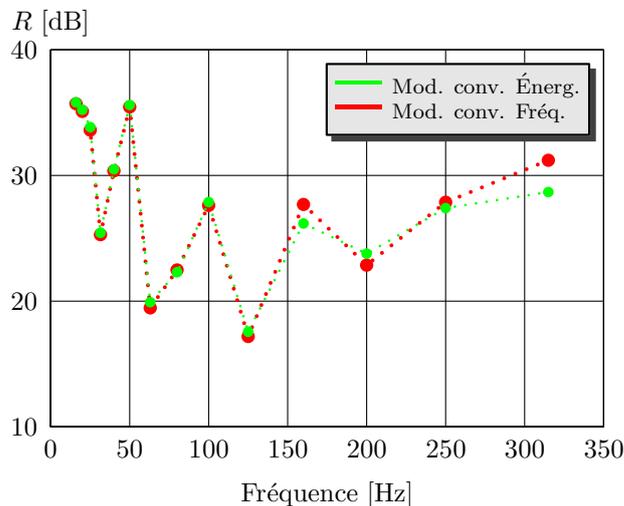


FIGURE 12 – Spectre de l'affaiblissement acoustique en bandes de tiers d'octave du modèle convergé en fréquence et en énergie.

## 6 Conclusion et perspectives

Dans ce travail, nous avons introduit la notion de convergence en énergie d'un modèle numérique. Ce type de convergence se confronte à celui se concentrant sur les fréquences propres d'un système et que l'on retrouve communément dans l'utilisation de la méthode des éléments finis. Nous avons ainsi pu constater une différence notable sur le nombre minimum de degrés de liberté par unité de longueur d'onde entre ces deux modèles : modèle numérique convergé en fréquence et le modèle convergé en énergie. Ce dernier permet ainsi d'alléger le coût numérique de façon non négligeable sans toutefois noter d'écart trop important avec le modèle de référence, convergé en fréquence.

Un maillage adaptatif en fonction de la fréquence est envisageable en tant que perspective. Ceci étant, les calculs présentés dans ce papier ont été parallélisés (solver MUMPS), il est important de signaler que la construction des maillages et la décomposition de domaines nécessitent actuellement un temps supplémentaire au temps de calcul.

## Références

- [1] Normes NF EN ISO 10140. *Acoustique - Mesurage en laboratoire de l'isolation acoustique des éléments de construction*, AFNOR.
- [2] Å. Bolmsvik, *Structural-acoustic vibrations in wooden assemblies : Experimental modal analysis and finite element modelling*, Doctoral Thesis, Växjö, Sweden, Linnaeus University Press, (2013).
- [3] H. J. P. Morand and R. Ohayon, *Interactions fluides-structures*, Masson (1992).
- [4] A. Tribaleau, *Isolement acoustique de parois aux basses fréquences : programmation d'outils prédictifs et confrontations expérimentales dans le cas de planchers solivés en bois*, Thèse de doctorat, Université du Maine, Le Mans (2013).