



Développements récents, dans les théories macroscopiques linéaires locales et non-locales de la propagation du son dans les matériaux poreux à structure rigide saturés par un fluide viscothermique

D. Lafarge^a et N. Nematì^b

^aLAUM UMR6613, Université du Maine, Avenue Olivier Messiaen, 72 085 Le Mans Cedex 9, France

^bDepartment of Mechanical Engineering, MIT, Building 3-435B 77 Massachusetts Ave, Cambridge, MA 02139, USA

denis.lafarge@univ-lemans.fr

Nous présentons ici, deux développements récents des théories macroscopiques linéaires de la propagation du son dans les matériaux poreux à structure rigide saturés par un fluide viscothermique. Le premier, tiré d'une analogie électromagnétique et de considérations thermodynamiques générales, introduit une approche nonlocale nouvelle de l'homogénéisation, capable de décrire les « métamatériaux ». Le second, tiré de la solution d'ordre zéro prévue par une méthode d'homogénéisation double échelle, est un modèle simple où la nonlocalité spatiale n'apparaît pas. L'approche nonlocale nouvelle s'applique indépendamment des microgéométries et des fréquences, au contraire de l'homogénéisation traditionnelle qui suppose de « grandes » longueurs d'ondes. Le modèle local présenté, traduit cette homogénéisation traditionnelle; il reste quasi-exact dans une large gamme de fréquences, lorsque les microgéométries restent assez simples.

1 Introduction

Comment décrire en général et au niveau macroscopique, la propagation linéaire du son dans un matériau poreux homogène saturé par un fluide viscothermique tel que l'air? L'élucidation de cette question d'« homogénéisation », ou de « thermodynamique irréversible » comme nous préférons la voir, revêt un grand intérêt pour la définition et conception de (méta)matériaux acoustiques.

Pour tenter d'apporter solution à cette question ou à d'autres reliées, il a été fait appel dans la littérature à différentes approches d'homogénéisation: CPA (coherent potential field approximation), homogénéisation asymptotique double échelle, etc. Aucune de ces approches, cependant, n'amène de réponse assez générale et satisfaisante au problème posé, même en se limitant comme nous le faisons ici au cas le plus simple où le matériau poreux est considéré à structure rigide. De fait, ce n'est que récemment que la question a été, à notre sens, convenablement mise en perspective, amenant à une solution définie dans le cas où la structure solide du matériau est inerte tant mécaniquement que thermiquement. En reprenant une terminologie appropriée issue de l'électromagnétisme macroscopique [1], [2], nous nous trouvons ici devant deux types de réponses possibles: une réponse définie, qui fait justice de l'ensemble des phénomènes de dispersion temporelle et spatiale; une réponse schématique, qui fait abstraction des phénomènes de dispersion spatiale. La première réponse est celle de la théorie nonlocale nouvelle et exacte que nous présentons, qui permet de prévoir au sens d'une moyenne d'ensemble les propriétés de propagation macroscopiques, et ce, quelles que soient les microgéométries et les fréquences [3]. Cette théorie est inspirée directement de l'analogie électromagnétique et de considérations thermodynamiques générales. Formulée au départ pour un matériau macroscopiquement homogène avec isotropie ou propagation selon un axe, nous l'étendons au cas homogène anisotrope¹. Nous la vérifions dans différentes microgéométries simples. La deuxième réponse, quant à elle, est celle de la théorie locale approchée qui dérive de l'homogénéisation asymptotique double échelle mentionnée au dessus (prise à l'ordre zéro). Dans les microgéométries ne présentant pas une grande dispersion de la taille des pores, nous montrons que cette approche conduit à un modèle simple qui pourra, tout aussi bien, être quasi-exact aux grandes longueurs d'ondes dans de nombreuses microgéométries, que en erreur aux courtes longueurs d'ondes dans les microgéométries de type classique, ou

même, en erreur aux grandes longueurs d'ondes dans les microgéométries de type de « métamatériau » (entendre ici celles dans lesquelles des cavités de type résonateurs de Helmholtz sont présentes).

2 Structure des équations nonlocales macroscopiques

2.1 Niveau macroscopique

Comme en mécanique statistique, une formulation théorique précise de la théorie requiert l'emploi d'une conception « de Gibbs » de l'opération de moyenne définissant le niveau macroscopique. L'emploi, en d'autres termes, d'une *moyenne d'ensemble*, et non, comme considéré par Lorentz dans sa théorie des électrons [4], d'une moyenne de volume effectuée dans un volume élémentaire représentatif. Le niveau macroscopique ne se réfère alors pas à une réalisation ou un échantillon unique du milieu, mais à un ensemble de réalisations; les ondes « macroscopiques » sont du type des ondes dites « cohérentes » dans les théories de diffusion multiple [5]. Concrètement, nous imaginons que nous est donné un nombre indéfini de réalisations ω de notre milieu aléatoire stationnaire, prises dans un espace de probabilité Ω , dont l'ensemble définit le niveau macroscopique, homogène et anisotrope. Dans chaque réalisation ω le milieu est composé de deux régions aléatoires stationnaires: une région connectée définissant l'espace poreux saturé par le fluide $\mathcal{V}_f(\omega)$, et la région complémentaire $\mathcal{V}_s(\omega)$ considérée comme occupée par le solide. L'interface ou surface des pores est notée $\partial\mathcal{V}(\omega)$. La moyenne d'ensemble effectuée à une position \mathbf{x} est notée $\langle \cdot \rangle(\mathbf{x})$. Elle donne l'espérance mathématique des champs, systématiquement étendus à zéro dans la phase solide inerte $\mathcal{V}_s(\omega)$ ². Un cas spécial important est celui d'un milieu périodique, i.e. d'un milieu dont les différentes réalisations ω sont obtenues par translation arbitraire d'une réalisation périodique de référence. Dans ce cas spécial, il se surajoute une indétermination dans la définition du niveau macroscopique, en ce que, du fait d'un choix multiple possible des périodes spatiales, une multiplicité correspondante de solutions apparaît. Pour l'énoncé simple des principes généraux de la théorie, il est préférable de laisser provisoirement ce cas de côté.

¹Le traitement analogue d'un milieu limité, et par là nécessairement inhomogène dans le cadre d'une théorie nonlocale, demandera de plus amples développements.

²De cette manière, la moyenne $\langle \cdot \rangle(\mathbf{x})$ est une grandeur représentative d'une moyenne de volume des champs dans le fluide rapportée au volume total, soit une moyenne de phase fluide multipliée par un facteur de porosité ϕ .

2.2 Equations au niveau des pores

Au niveau des pores, nous supposons que le mouvement du fluide est décrit par les équations linéarisées de Navier-Stokes-Fourier [3] Eqs. (57)³. Notre problème est d'arriver aux équations « macroscopiques », qui gouvernent la propagation des grandeurs moyennes $\mathbf{V} \equiv \langle \mathbf{v} \rangle$ et $B \equiv \langle b \rangle$ (\mathbf{v} et b , vitesse et condensation).

2.3 Equations macroscopiques

Reprenons pour ce faire, le traitement [3] dans le cas anisotrope général. Le champ « densité de Maxwell » H devient un tenseur des contraintes symétrique H_{ij} (Cf. ci-dessous l'Eq. (3)), en sorte que les Eqs. (60) (61a,b) deviennent:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad \frac{\partial D_i}{\partial t} = -\nabla_j H_{ij} \quad (1a,b)$$

$$D_i(t, \mathbf{x}) = \int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{x}' \rho_{ij}(t-t', \mathbf{x}-\mathbf{x}') V_j(t', \mathbf{x}') \quad (2a)$$

$$H_{ij}(t, \mathbf{x}) = \int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{x}' \chi_{ij}^{-1}(t-t', \mathbf{x}-\mathbf{x}') B(t', \mathbf{x}') \quad (2b)$$

Il reste à déterminer les noyaux nonlocaux symétriques ρ_{ij} et χ_{ij} qui jouent le rôle des permittivités électriques et magnétiques. Les intégrations temporelles et spatiales dans les relations constitutives (2) définissent les phénomènes de dispersion temporelle et spatiale.

2.4 « Part acoustique du flux d'énergie » : condition sur le champ H_{ij}

Suivant Schoch [6], attribuons au produit $p\mathbf{v}$ la signification thermodynamique d'une « part acoustique du flux d'énergie » au niveau des pores. Posons alors, que le champ H_{ij} symétrique au dessus, est précisément tel que:

$$H_{ij} \langle v_j \rangle \equiv \langle p v_i \rangle \quad (3)$$

Cette équation (3) de « Umov » ou « Heaviside-Poynting », va fixer de manière univoque le champ H_{ij} , et par suite, les permittivités acoustiques ρ_{ij} et χ_{ij} . Ce qui est important, elle les fait appartenir à la classe de fonctions thermodynamiques « susceptibilités généralisées » [7,3]. On peut alors espérer les déterminer par la solution de problèmes action-réponse assez simples. De fait, on va constater que les identifications inspirées de la forme (3) (les équations (5), $a=1,2$) jouent un rôle central dans l'exploitation ci-dessous de problèmes action-réponse, permettant la définition de principe des permittivités ou susceptibilités généralisées, depuis la microstructure.

3 Procédure d'homogénéisation thermodynamique nonlocale générale

La détermination des noyaux $\rho_{ij}(t, \mathbf{x})$ et $\chi_{ij}^{-1}(t, \mathbf{x})$ du milieu macroscopique homogène, va se faire via celle des

³ Ici et dans ce qui suit, les Eqs citées sont systématiquement celles de [3]. Nous renvoyons également à cette référence pour toutes les notations.

coefficients complexes de Fourier $\rho_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ et $\chi_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k})$.

Pour déterminer ces derniers nous commençons par solutionner deux problèmes d'action-réponse indépendants, ceux définis par les Eqs. (57) en présence d'un terme source de pression $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 e^{-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$ (\mathcal{P}_0 une constante de forçage) ajouté à la vraie grandeur de pression, soit dans l'équation de Navier-Stokes, soit dans l'équation de Fourier. Le premier problème définit la réponse du fluide à une force harmonique extérieure de volume $\mathbf{f} = -\nabla \mathcal{P}$; le deuxième définit la réponse du fluide à un apport harmonique extérieur de chaleur par unité de temps et de volume $\dot{Q} = T_0 \beta_0 \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t}$. En distinguant par le label $a=1,2$ les

champs de réponse dans ce premier et second problème:

$$\mathbf{v}^{(a)}(t, \mathbf{x}; \omega) = \mathbf{v}_0^{(a)}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{x}; \omega) e^{-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \text{ etc.} \quad (4)$$

on va pouvoir déterminer par la solution des problèmes microscopiques correspondants, les amplitudes $\mathbf{v}_0^{(a)}$, etc., fonctions bornées de \mathbf{x} . Ces amplitudes sont uniquement déterminées par la microgéométrie (la réalisation ω) et les fréquences temporelles et spatiales ω et \mathbf{k} . Comme suggéré par (3), aux amplitudes microscopiques de pression $p_0^{(a)}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{x}; \omega)$ peuvent être associées les parts macroscopiques symétriques $\mathcal{P}_{oij}^{(a)}(\omega, \mathbf{k})$, telles que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{oij}^{(a)}(\omega, \mathbf{k}) \langle v_0^{(a)}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{x}; \omega) \rangle \\ = \langle p_0^{(a)}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{x}; \omega) v_{0i}^{(a)}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{x}; \omega) \rangle \end{aligned} \quad (5)$$

Dans le premier et second problème, nous posons que les relations macroscopiques suivantes doivent être satisfaites:

$$-i\omega \rho_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \langle v_0^{(1)} \rangle_j = -ik_j \left(\mathcal{P}_{oij}^{(1)}(\omega, \mathbf{k}) + \mathcal{P}_o^{(1)} \delta_{ij} \right) \quad (6)$$

$$\mathcal{P}_{oij}^{(2)}(\omega, \mathbf{k}) + \mathcal{P}_o^{(2)} \delta_{ij} = \chi_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) \left(\langle b_0^{(2)}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{x}) \rangle + \phi \chi_0 \mathcal{P}_o^{(2)} \right) \quad (7)$$

Les relations (6) et (7) sont intuitées, resp., pour leur second ou premier membre, de (1b) ou (2b) (dans le domaine de Fourier) en posant que le champ total H_{ij} est la somme du terme de forçage $\mathcal{P}_o^{(a)} \delta_{ij}$ et de la part macroscopique $\mathcal{P}_{oij}^{(a)}(\omega, \mathbf{k})$ de la pression; et resp., pour leur premier ou second membre, de (2a) ou d'une observation thermodynamique générale, selon laquelle la réponse de condensation $\langle b_0^{(2)}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{x}) \rangle$ (purement nonisotherme par construction) est à compléter par le terme isotherme $\phi \chi_0 \mathcal{P}_o^{(2)}$ pour représenter la totalité du champ B de (2b). Ajoutant à cela les deux relations découlant de l'interprétation macroscopique des $\mathcal{P}_{oij}^{(a)}(\omega, \mathbf{k})$, à savoir

$$\mathcal{P}_{oij}^{(1)}(\omega, \mathbf{k}) = \chi_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) \langle b_0^{(1)}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{x}) \rangle \quad (8)$$

$$-i\omega \rho_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \langle v_0^{(2)} \rangle_j = -ik_j \mathcal{P}_{oij}^{(2)}(\omega, \mathbf{k}) \quad (9)$$

la comparaison des relations (7) et (8) montre que, si l'on

prend $\mathcal{P}_o^{(2)} = \lambda \mathcal{P}_o^{(1)}$ avec $\lambda = \frac{\langle b_0^{(1)}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{x}) \rangle}{\mathcal{P}_o^{(1)}} \left\{ \frac{\langle b_0^{(2)}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{x}) \rangle}{\mathcal{P}_o^{(2)}} + \phi \chi_0 \right\}^{-1}$, il

se fera que $\mathcal{P}_{oij}^{(1)}(\omega, \mathbf{k}) = \mathcal{P}_{oij}^{(2)}(\omega, \mathbf{k}) + \mathcal{P}_o^{(2)} \delta_{ij}$. Par (5) avec

$a=1,2$, on dispose de 6 équations pour tirer les 6 composantes indépendantes des tenseurs symétriques $\mathbb{T}_{oij}^{(a)}(\omega, \mathbf{k})$. Par (7) ou par (8) on tire les composantes du tenseur $\chi_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k})$; par (6) et (9) on a enfin 6 équations pour les 6 composantes indépendantes du tenseur symétrique $\rho_{ij}(\omega, \mathbf{k})$. Ceci complète dans le cas général anisotrope la détermination des susceptibilités depuis la microstructure.

4 Validation

La théorie nonlocale au dessus se vérifie facilement dans les cas simples suivants. Premièrement, en l'absence de matériau, la procédure conduit aux fonctions scalaires $\rho(\omega, \mathbf{k}) = \rho(\omega, k)$ et $\chi^{-1}(\omega, \mathbf{k}) = \chi^{-1}(\omega, k)$ données par les Eqs. (44-45). A travers l'équation de dispersion

$$\chi^{-1}(\omega, k)k^2 = \rho(\omega, k)\omega^2 \quad (10)$$

on retrouve les nombres d'ondes acoustiques et entropiques de la théorie de Kirchhoff-Langevin, traduction exacte des équations de Navier-Stokes-Fourier pour les ondes longitudinales. Deuxièmement, dans le cas simple d'un matériau fait de pores circulaires parallèles identiques, la procédure au dessus donne à nouveau, après moyenne d'ensemble sur les milieux aléatoirement translétés⁴ deux fonctions scalaires $\rho(\omega, k)$ et $\chi^{-1}(\omega, k)$ (il n'y a qu'une direction de propagation). La solution de (10) conduit à un jeu infini discret de nombres d'ondes possibles $k = q_l(\omega)$, ($l=1,2,\dots$, arrangés dans l'ordre croissant des atténuations). Les impédances caractéristiques

$H/V = Z_l(\omega) = \sqrt{\rho(\omega, q_l) / [\omega^2 \chi^{-1}(\omega, q_l)]}$ sont aussi définies. Ces nombres d'ondes et impédances sont, pour tous les modes et indépendamment des fréquences et du rayon des pores [8], trouvés égaux à ceux des modes axisymétriques de la théorie de Kirchhoff -- une coïncidence qui signe la validité de la procédure d'homogénéisation thermodynamique nonlocale.

Nous présentons ici des validations supplémentaires pour deux cas de géométries périodiques nontriviales en 2D. Le premier cas sera celui d'une géométrie de type « métamatériau » où la propagation s'effectue en conduit avec résonateurs de Helmholtz branchés (Cf. Figure 1).

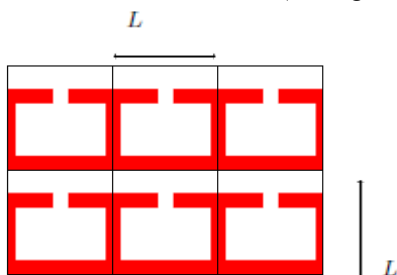


Figure 1. Résonateurs de Helmholtz 2D branchés, saturés par un fluide viscothermique.

Tandis que pour le cas précédent des pores circulaires, il est facile d'obtenir exactement les nombres d'ondes $k = q_l(\omega)$ et facteurs d'impédance $H/V = Z_l(\omega)$

⁴ Cette moyenne est ici équivalente à une moyenne de section, effectuée dans une réalisation.

($l=1,2,\dots$) (des modes axisymétriques) au travers des méthodes de la théorie nonlocale d'une part, et de la résolution directe de Kirchhoff d'autre part, ici, les calculs exacts deviennent malcommodes. En lieu et place, nous procédons à une résolution approchée, tant des problèmes d'action-réponse nonlocaux, que de Bloch, en introduisant dans les différentes portions – conduit, col, cavité – des champs aller-retour en ondes planes, connectés via l'égalisation de débits et pressions. Du fait que les approximations d'ondes planes et conditions d'égalisation employées sont les mêmes, nous nous attendons à ce que les deux calculs donnent les mêmes nombres d'ondes et impédances $k = q_1(\omega)$ et $H/V = Z_1(\omega)$ ⁵. Les calculs détaillés sont donnés dans [9] chapitre 4. Nous illustrons ci-dessous (Cf. Figure 2) les résultats obtenus pour $k = q_1(\omega)$ (fluide = air ambiant à 20°, $L=1\text{cm}$, voir [9] pour les autres dimensions). Un accord précis entre les valeurs déduites de l'homogénéisation nonlocale et celle de la résolution directe en ondes de Bloch, est observé. Un accord similaire (non montré) est également observé sur l'impédance.

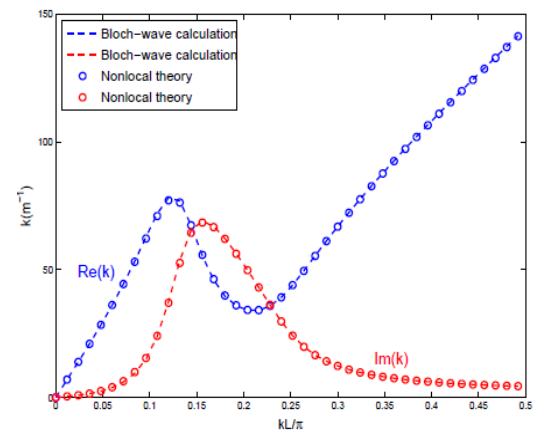


Figure 2. Nombre d'onde du mode fondamental.

Une résonance de Helmholtz intervient autour de l'abscisse $\frac{\omega L}{c\pi} = 0.17$; le pic sur $\text{Im}(k) = \text{Im}\{q_1(\omega)\}$ provient de la dissipation visqueuse dans le col. Dans cet exemple nous voyons concrètement comment les vitesses de phases négatives, ou encore les parties réelles négatives du module de compressibilité $\chi^{-1}(\omega, q_1(\omega))$, observées dans [10] dans un domaine de fréquences, sont rendus possibles, via le comportement nonlocal du matériau. En résumé cet exemple met en évidence le fait que la théorie nonlocale grâce à sa prise en compte complète des effets de dispersion temporelle et spatiale, permet une prédiction exacte des comportements macroscopiques de type métamatériau, directement depuis la microgéométrie.

Le deuxième cas sera celui d'une géométrie « ordinaire » : un réseau carré périodique de cylindres rigides saturés par un fluide viscothermique (Cf. Figure 3, la direction de propagation est pour simplicité prise normale, alignée avec l'axe x). Cette géométrie permet un calcul direct quasi-analytique des ondes de Bloch, par diffusion-multiple, prenant en compte les trois types d'ondes, acoustiques, entropiques, et de vorticité. Une coïncidence

⁵ Il est clair que les modes supérieurs $l=2,3,\dots$ ne sont pas à traiter dans le cadre des approximations faites.

doit être observée sur les nombres d'ondes et impédances des différentes ondes, indépendamment des fréquences, qu'elles soient calculées par la résolution directe en ondes de Bloch, ou qu'elles soient calculées au moyen des méthodes de la théorie nonlocale.

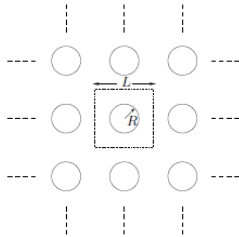


Figure 3. Réseau carré 2D de cylindres rigides saturé par un fluide viscothermique.

Pour le vérifier nous portons sur les Figures 4 et 5 pour deux valeurs de la porosité ($\phi = 0.99$ and $\phi = 0.9$), les vitesses de phase complexes $c = \omega / q_1(\omega)$ du mode le moins atténué, qui sont obtenues, ou bien du calcul de Bloch par diffusion-multiple [11] (ligne bleu), ou bien d'une implémentation numérique de l'homogénéisation nonlocale (§3) utilisant le programme d'éléments finis FreeFem++ [12] pour le calcul des permittivités fonction de ω, k , suivi d'une résolution par méthode de Newton de l'équation de dispersion résultante (10) (ronds noirs). Les résultats obtenus avec la théorie locale introduite dans la section suivante sont également indiqués (tirets rouges).

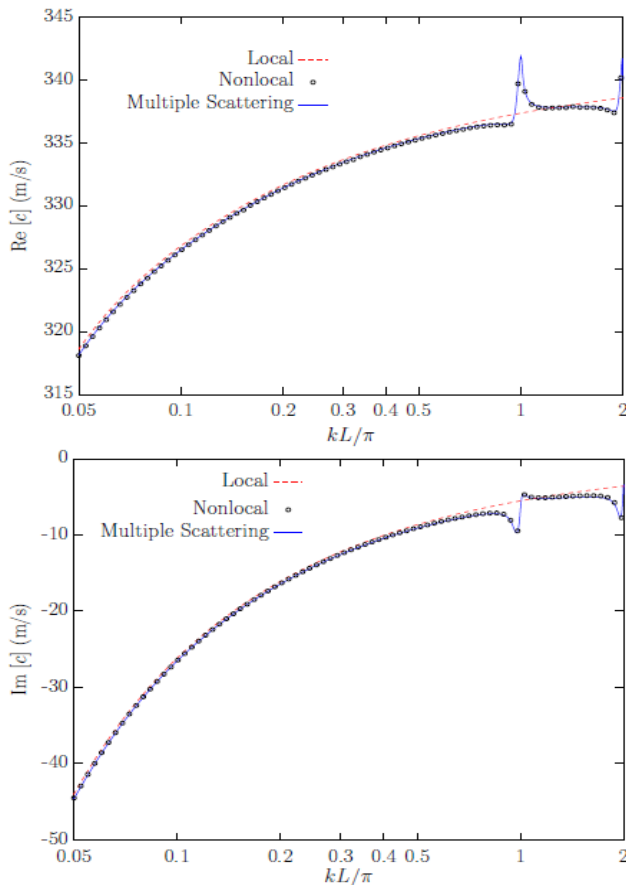


Figure 5. Vitesse de phase de l'onde la moins atténuée, pour la porosité $\phi = 0.99$.

La validité de l'homogénéisation thermodynamique nonlocale proposée ici, se voit de l'accord obtenu entre les calculs directs par diffusion-multiple, et les calculs

numériques implémentant la procédure d'homogénéisation nonlocale (§3). Les structures apparaissant sur les courbes traduisent les résonances de Bragg des cellules périodiques. Ces Figures 4,5, sont aussi une illustration du fait que, dans les géométries "ordinaires" où n'interviennent pas de manière essentielle, des pores de tailles très différentes⁶, les caractéristiques de l'onde la moins atténuée peuvent être décrites très précisément par une approche locale, aux fréquences assez basses. Nous passons maintenant à la dérivation de cette théorie macroscopique locale simplifiée.

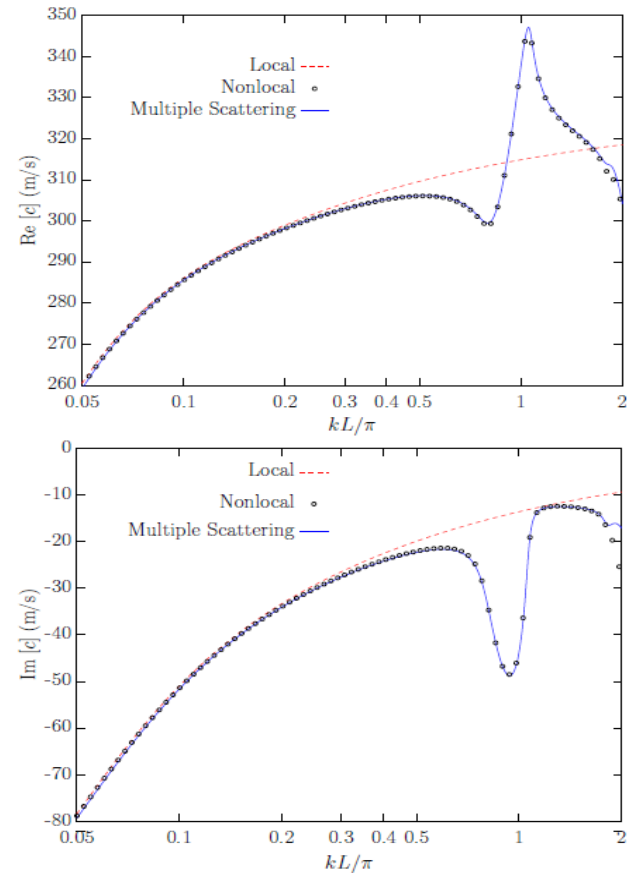


Figure 5. Vitesse de phase de l'onde la moins atténuée, pour la porosité $\phi = 0.9$.

5 Homogénéisation locale

Par définition dans la théorie locale, les phénomènes de dispersion spatiale sont posés entièrement inexistants. Il s'agit là d'une simplification drastique dans son principe. Elle entre directement en conflit avec le fait que, en propagation d'ondes, tout champ variable en temps est aussi nécessairement variable en espace; il suit alors que la théorie locale recherchée n'est qu'une approximation qui ne se réfère pas aux solutions des équations complètes de Navier–Stokes–Fourier de la mécanique des fluides au niveau des pores. De fait, et de la même manière que la théorie locale de Zwikker et Kosten de la propagation du son dans les conduits circulaires est obtenue en jouant avec différentes simplifications des équations de départ au niveau des pores, ici, nous avons à jouer avec des

⁶ Ce n'est pas le cas dans le premier exemple de type "métamatériau": au regard de la taille des cavités le rayon des cols est très petit.

simplifications généralisées du même type. Adaptant ainsi les considérations que nous faisons dans [8] Appendix (comparant le traitement complet de Kirchhoff à celui de Zwikker et Kosten), il n'est pas difficile de voir que ce que nous cherchons maintenant, sont les noyaux ρ_{ij} , χ^{-1} , dans les équations macroscopiques approchées suivantes:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial D_i}{\partial t} = -\nabla_i H \quad (11a,b)$$

$$D_i(t, \mathbf{x}) = \int_{-\infty}^t dt' \rho_{ij}(t-t') V_j(t', \mathbf{x}) \quad (12a)$$

$$H(t, \mathbf{x}) = \int_{-\infty}^t dt' \chi^{-1}(t-t') B(t', \mathbf{x}), \quad H \equiv P \quad (12b)$$

L'interprétation de l'équivalence $H \equiv P = \langle p \rangle / \phi$ est que, en l'absence de tailles des pores très différentes, les résonances grandes longueurs d'ondes sont exclues. La pression p coïncide dès lors pratiquement⁷, au niveau des pores, avec sa moyenne de volume P , lentement variable dans la phase fluide. D'où la factorisation $P \langle \mathbf{v} \rangle$ de la moyenne $\langle p \mathbf{v} \rangle$, et la simplification $H \equiv P$. Cette caractéristique de la distribution du champ p généralise sans changement significatif⁸ la constance du champ de pression sur une section, dans la théorie de Zwikker et Kosten de la propagation en tube circulaire. Déterminons maintenant le noyau correspondant de la densité effective, $\rho_{ij}(\omega)$ dans l'espace de Fourier. Comme nous négligeons entièrement la dispersion spatiale, le terme source, gradient de pression, est introduit sous la forme d'une constante spatiale dans l'équation de Navier–Stokes; cette constance du terme source autorise à poser une condition d'incompressibilité du mouvement. On est donc conduit à poser et résoudre le problème simplifié suivant: $\partial \mathbf{v} / \partial t = -\nabla \pi / \rho_0 + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f} / \rho_0$ et $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ dans $\mathcal{V}_f(\omega)$, avec $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ sur $\partial \mathcal{V}(\omega)$, forçage $\mathbf{f} = -\nabla p = \mathbf{f}_0 e^{-i\omega t}$, et \mathbf{f}_0 une constante spatiale indépendante de la réalisation ω . Une fois ce problème microscopique résolu (une unique solution \mathbf{v} existera, avec π un champ borné), la densité locale voulue $\rho_{ij}(\omega)$ sera l'unique tenseur symétrique tel que $-i\omega \langle v_i \rangle = \rho_{ij}^{-1}(\omega) f_{0j}$.

Cette recette de calcul du tenseur $\rho_{ij}(\omega)$ n'est autre que celle donnée par l'application de la méthode d'homogénéisation asymptotique double échelle [13], exprimée à l'ordre 0. Nous pourrions poursuivre le raisonnement et obtenir avec des arguments similaires la recette de calcul de $\chi^{-1}(\omega)$. A nouveau il serait constaté que cette recette est celle donnée par l'application de la méthode d'homogénéisation asymptotique double échelle, exprimée à l'ordre 0 (Cf. Appendix A dans la 4^{ème} des Refs. [13]). Cette homogénéisation traditionnelle est donc approchée et dépourvue de caractère fondamental. Elle n'est pas vérifiée indépendamment des géométries et des

fréquences; lorsqu'applicable, cependant, i.e. dans une large classe de géométries ne faisant pas intervenir de manière essentielle des dimensions de pores très différentes, et jusqu'à des fréquences pas trop élevées, elle pourra être utilisée de manière très précise et avantageuse.

6 Modèle local des permittivités

A partir de la théorie locale au dessus, un modèle simple des fonctions $\rho_{ij}(\omega)$ and $\chi^{-1}(\omega)$ peut être proposé. Pour simplicité des développements suivants, nous nous restreignons au cas isotrope, ou à la propagation selon un axe principal, de sorte que la densité est un scalaire. Introduisons d'abord diverses fonctions utiles:

(i) tortuosités dynamiques $\alpha(\omega)$ and $\alpha'(\omega)$, telles que

$$\rho(\omega) = \rho_0 \alpha(\omega) \quad \text{et} \quad \chi(\omega) = \chi_0 [\gamma - (\gamma - 1) / \alpha'(\omega)],$$

(ii) perméabilités dynamiques $k(\omega)$ et $k'(\omega)$ telles que

$$k(\omega) = \nu \phi / (-i\omega \alpha(\omega)) \quad \text{et} \quad k'(\omega) = \nu' \phi / (-i\omega \alpha'(\omega)),$$

(iii) fonctions de relaxation $X(\omega)$ and $X'(\omega)$ telles que

$$\frac{\alpha_\infty}{\alpha(\omega)} = 1 - X(\omega) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\alpha'(\omega)} = 1 - X'(\omega).$$

Ces dernières peuvent être écrites sous la forme classique DTR (distribution de temps de relaxation)⁹:

$$X(\omega) = \int_0^\infty \frac{g(\sigma) d\sigma}{1 - \frac{i\omega}{\nu} \sigma} \quad \text{and} \quad X'(\omega) = \int_0^\infty \frac{g'(\sigma) d\sigma}{1 - \frac{i\omega}{\nu'} \sigma}.$$

La nature de la microgéométrie est exprimée dans les distributions visqueuses et thermiques $g(\sigma)$ and $g'(\sigma)$ (σ a dimension de surface et détermine les temps de relaxation visqueux et thermiques σ/ν et σ/ν'). La forme générique des g and g' , en géométrie aléatoire stationnaire ne manifestant qu'une seule taille de pores, doit être du type suivant:

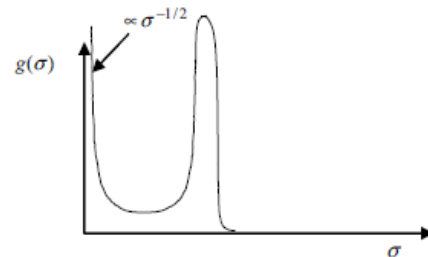


Figure 6. Forme générique des distributions visqueuse et thermiques.

Le pic marqué aux valeurs finies de σ exprime l'hypothèse de l'absence d'une distribution large de la taille des pores.. La divergence $\propto \sigma^{-1/2}$ à l'origine exprime un comportement divergent du type $\propto t^{-1/2}$ pour la décroissance temporelle initiale des fonctions X et X' dans le domaine temporel (loi du type « Curie–von–

⁷ A des termes d'ordre $Pl/\lambda \ll P$ près, avec l et λ les dimensions typiques microscopiques (pores) et macroscopiques (longueurs d'ondes).

⁸ Il y a seulement, maintenant, la présence de fluctuations locales de pression $\delta p = p - P$ d'ordre $Pl/\lambda \ll P$.

⁹ Ces expressions dérivent des simplifications faites section 5, qui impliquent que les fonctions $\rho_{ij}(\omega)$ and $\chi^{-1}(\omega)$ n'ont de singularités qu'aux fréquences purement imaginaires (Cf. [15] Appendix A, 4^{ème} Ref. [13] Appendix B, et [14]).

Schweidler», observée aux temps courts pour les dépolarisations dans les diélectriques). L'interprétation de l'exposant $1/2$ passe ici par la supposition que, aux hautes fréquences, la surface des pores $\partial\mathcal{V}(\omega)$ apparaît localement plane à l'échelle des couches limites visqueuses et thermiques dont l'épaisseur tend vers zéro comme $\propto \omega^{-1/2}$. Plus explicitement, on peut montrer que les divergences sont alors $\frac{2}{\pi\Lambda}\sigma^{-1/2}$ and $\frac{2}{\pi\Lambda'}\sigma^{-1/2}$ [14], où

Λ et Λ' sont les longueurs caractéristiques visqueuses et thermiques, telles que définies par Johnson et Allard, et qui interviennent dans la limite haute fréquence $\omega \rightarrow \infty$:

$$\alpha(\omega) = \alpha_\infty + \frac{2\alpha_\infty}{\Lambda} \left(\frac{\nu}{-i\omega} \right)^{1/2} + \frac{3\alpha_\infty}{\Sigma} \frac{\nu}{-i\omega} + O\left(\frac{\nu}{-i\omega} \right)^{3/2} + \dots$$

$$\alpha'(\omega) = 1 + \frac{2}{\Lambda'} \left(\frac{\nu'}{-i\omega} \right)^{1/2} + \frac{3}{\Sigma'} \frac{\nu'}{-i\omega} + O\left(\frac{\nu'}{-i\omega} \right)^{3/2} + \dots$$

avec Σ et Σ' , les paramètres géométriques impliqués dans les termes d'ordre suivants, et qui représentent cette fois des surfaces caractéristiques, visqueuses et thermiques [15,16]. Dans la limite basse fréquence $\omega \rightarrow 0$:

$$\alpha(\omega) = \frac{\nu\phi}{-i\omega k_0} + \alpha_0 + \frac{i\omega k_0}{\nu\phi} \alpha_1^2 + \dots$$

$$\alpha'(\omega) = \frac{\nu'\phi}{-i\omega k'_0} + \alpha'_0 + \frac{i\omega k'_0}{\nu'\phi} \alpha_1'^2 + \dots$$

où les paramètres géométriques sont les perméabilités statiques k_0 and k'_0 (surfaces), les tortuosités statiques α_0 and α'_0 (sans dimensions) [16] et encore d'autres paramètres sans dimension α_1 and α_1' . Développant aux basses fréquences les expressions DTR au dessus des fonctions X et X' , et comparant avec les relations tirées de (iii) et des limites $\omega \rightarrow 0$ au dessus, il est facile de déduire les expressions suivantes des quatre premiers moments successifs:

$$\int_0^\infty d\sigma g(\sigma) = 1, \quad \int_0^\infty \sigma g(\sigma) d\sigma = \frac{k_0 \alpha_\infty}{\phi},$$

$$\int_0^\infty \sigma^2 g(\sigma) d\sigma = \frac{\alpha_0}{\alpha_\infty} \left(\frac{k_0 \alpha_\infty}{\phi} \right)^2,$$

$$\int_0^\infty \sigma^3 g(\sigma) d\sigma = \left[\frac{\alpha_1^2 + \alpha_0^2}{\alpha_\infty^2} \right] \left(\frac{k_0 \alpha_\infty}{\phi} \right)^3.$$

Les relations thermiques correspondantes s'écrivent de même, en mettant les primes et remplaçant $\alpha_\infty \rightarrow \alpha'_\infty = 1$. Observons maintenant que, en tant que modèle simple des formes génériques données, nous pouvons supposer les fonctions $g(\sigma)$ et $g'(\sigma)$ données aux petits σ par leurs divergences asymptotiques de Curie-von-Schweidler $\frac{2}{\pi\Lambda}\sigma^{-1/2}$ et $\frac{2}{\pi\Lambda'}\sigma^{-1/2}$, que l'on fera s'annuler pour simplicité au dessus d'un certain cutoff visqueux $\sigma = \sigma_c$ ou thermique $\sigma = \sigma'_c$, respectivement. Simultanément, et pour décrire la région des σ plus grands, on posera que les distributions sont nulles, excepté pour une série de contributions en delta de Dirac. En nous limitant à deux delta de Dirac, on pourra reproduire l'ensemble des

équations données au dessus. Au $g(\sigma)$ continu décrit au dessus, on rajoute ainsi les distributions $b_1^2 \delta(\sigma - \sigma_1) + b_2^2 \delta(\sigma - \sigma_2)$ (de même avec les primes), convenablement placées et pondérées via le choix des surfaces σ_i et poids b_i^2 . Nous arrivons de cette manière à un modèle très réaliste à 5 paramètres, σ_c , σ_1 , σ_2 , b_1^2 , b_2^2 , de la fonction $g(\sigma)$ (de même avec les primes). Par des calculs élémentaires on voit que, pour que ce modèle soit consistant avec la limite $\omega \rightarrow \infty$, il suffit d'imposer la condition:

$$\frac{b_1^2}{\sigma_1} + \frac{b_2^2}{\sigma_2} - \frac{4}{\pi\Lambda} \sigma_c^{-1/2} = \frac{3}{\Sigma} - \frac{4}{\Lambda^2},$$

(de même avec les primes). Pour que le modèle soit consistant avec la limite $\omega \rightarrow 0$, il faut satisfaire aux 4 équations des moments, données au dessus. Cet ensemble d'équations est nonlinéaire, mais il peut être solutionné numériquement sans difficultés. Il s'établit une correspondance unique entre le jeu de cinq paramètres qui détermine la dispersion fréquentielle dans ce modèle, et le jeu des cinq paramètres Λ , Σ , $k_0 \alpha_\infty / \phi$, α_0 / α_∞ , α_1 / α_∞ , (de même avec les primes et $\alpha_\infty \rightarrow \alpha'_\infty = 1$). La précision remarquable du modèle obtenu selon cette ligne est mise en évidence sur la Figure 7, qui donne une représentation de Cole-Cole de la fonction de relaxation $X(\omega)$ dans un conduit 2D. Elle est, ou bien calculée de manière exacte (par une formule en tangente hyperbolique), ou bien calculée par le modèle aux cinq paramètres, déterminés par la reproduction exacte des deux limites BF et HF indiquées.

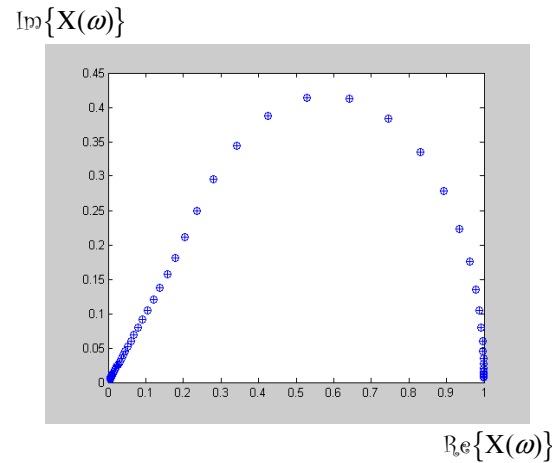


Figure7. Conduit 2D: Fonction de relaxation exacte o o, et modélisée ++, à différentes fréquences.

Aucune différence n'est décelable visuellement, entre les fonctions de relaxation exactes et modélisées. Cela n'était pas le cas avec les modèles utilisés jusqu'ici, tels que ceux de Johnson-Allard ou de Pride-Lafarge [16].

7 Conclusion

Une théorie macroscopique nonlocale de la propagation du son dans les matériaux poreux à structure rigide, saturés par un fluide viscothermique, a été développée. Etroitement reliée à la thermodynamique irréversible exprimée dans les équations de Navier-Stokes-Fourier, cette théorie se

formule précisément dans le cas où le milieu macroscopique est défini au sens d'une moyenne d'ensemble; pour simplicité le milieu est pour l'instant posé macroscopiquement homogène (donc illimité, dans un cadre nonlocal). Au sens de la moyenne d'ensemble, la description nonlocale s'applique quelles que soient les fréquences et longueurs d'ondes. Elle décrit les ondes « cohérentes ». En milieu périodique la théorie permet, après randomisation du milieu par des translations arbitraires et moyenne d'ensemble (moyenne alors équivalente à une moyenne de volume), de déduire/définir depuis la microstructure, les propriétés de propagation (vecteurs d'ondes/impédances) des ondes de Bloch. Cette description nonlocale prévoit depuis la microstructure, les propriétés acoustiques macroscopiques des métamatériaux. Une prochaine étape sera de généraliser la théorie au cas de matériaux inhomogènes macroscopiquement¹⁰, conduisant en particulier à une résolution des problèmes de réflexion-transmission. La mise en œuvre de l'approche nonlocale est d'évidence assez lourde; sa réduction à un traitement local est désirable lorsqu'elle est possible. A ce propos nous avons montré comment, dans une large plage de géométries et de fréquences, le milieu sera décrit par un modèle simple local. Il reste à étudier expérimentalement et numériquement l'intérêt de ce modèle, en vue de la caractérisation inverse des matériaux poreux, ou de la prédiction de la propagation et atténuation des transitoires.

Remerciements

Les auteurs remercient Aroune Duclos, Frederic Hecht et Olivier Pironneau, pour leur aide dans les calculs de diffusion-multiple et les simulations FreeFem++. Des remerciements sont également dus à Fabien Chevillotte pour son aide dans la prise en main de FreeFem++.

Références

- [1] L.D. Landau, E. Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media*, Pergamon Press, Oxford, 1960; V.M. Agranovich, V.L. Ginzburg, *Spatial Dispersion in Crystal Optics and the Theory of Excitons*, Interscience Publishers, London, 1966; D.B. Melrose, R.C. McPhedran, *Electromagnetic Processes in Dispersive Media—A Treatment Based on the Dielectric Tensor*, Cambridge University Press, New York, 1991.
- [2] P. Belov et al., Strong spatial dispersion in wire media in the very large wavelength limit, *Phys. Rev. B* **67** 113103–113107 (2003).
- [3] D. Lafarge and N. Nemati, Nonlocal Maxwellian theory of sound propagation in fluid-saturated rigid-framed porous media, *Wave Motion* **50** 1016–1035 (2013).
- [4] H.A. Lorentz, *The Theory of Electrons and its Applications to the Phenomena of Light and Radiant Heat*, second ed., B.G. Teubner, Leipzig, 1916.
- [5] P. Sheng, *Introduction to Wave Scattering, Localization, and Mesoscopic Phenomena*, Springer, 2nd edition, 2006.
- [6] A. Schoch, Remarks on the concept of acoustic energy, *Acustica* **3** 181–184 (1953).
- [7] L.D. Landau, E. Lifshitz, *Statistical Physics*, Pergamon Press, London, 1959.
- [8] N. Nemati and D. Lafarge, Check on a nonlocal Maxwellian theory of sound propagation in fluid-saturated rigid-framed porous media, *Wave Motion* (2014), <http://dx.doi.org/10.1016/j.wavemoti.2013.12.005>
- [9] http://tel.archives-ouvertes.fr/ouvertes.fr/docs/00/84/86/03/PDF/thesis_Navid_Nemati_2012.pdf
- [10] N. Fang et al., Ultrasonic metamaterials with negative modulus, *Nature Mater.* **5** 452–456 (2006).
- [11] A. Duclos, D. Lafarge, V. Pagneux, Transmission of acoustic waves through 2D phononic crystal: visco-thermal and multiple scattering effects, *Eur. Phys. J. Appl. Phys.* **45** 11302–11306 (2009).
- [12] F. Hecht, New development in freefem++. *J. Numer. Math.* **20** 251–265 (2012).
- [13] J.L. Auriault, C. Boutin, C. Geindreau, *Homogenization of Coupled Phenomena in Heterogenous Media*, ISTE and Wiley, 2009; R. Burridge and J.B. Keller, Poroelasticity equations derived from microstructure, *J. Acoust. Soc. Am.* **70** 1140–1146 (1981); M. Y. Zhou, P. Sheng, First principles calculations of dynamic permeability in porous media. *Phys. Rev. B* **39** 12027–12039 (1989); D. Lafarge et al., Dynamic compressibility of air in porous structures at audible frequencies, *J. Acoust. Soc. Am.* **102** 1995–2006 (1997).
- [14] M. Avellaneda, S. Torquato, Rigorous link between fluid permeability, electrical conductivity, and relaxation times for transport in porous media, *Phys. Fluids A* **3** 2529–2540 (1991).
- [15] D.L. Johnson et al., Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media, *J. Fluid Mech.* **176** 379–402 (1987); Y. Champoux, J. F. Allard, Dynamic tortuosity and bulk modulus in air-saturated porous media. *J. Appl. Phys.* **70** (1991) 1975–1979.
- [16] J. Kergomard et al., Transients in porous media: exact and modeled time-domain Green's functions, *Acta-Acust. United Acust.* **99** 557–571 (2013).

¹⁰ Mais toujours à structure rigide. La généralisation au cas poroélastique n'est pas encore entreprise. Elle est peut-être obscurcie par des difficultés d'ordre thermodynamique, liées à la nature physique incomplète des équations de Navier-Stokes-Fourier.