

# Méthodes pseudospectrales pour la propagation acoustique en milieu extérieur

D. Dragna et P. Blanc-Benon LMFA, Ecole Centrale de Lyon, 36 avenue Guy de Collongue, 69134 Ecully, France didier.dragna@ec-lyon.fr L'application de méthodes pseudospectrales (PS) à l'étude de la propagation acoustique en milieu extérieur dans le domaine temporel est discutée. Celles-ci sont des méthodes numériques pour le calcul des dérivées spatiales qui générent de faibles erreurs de dipersion et de dissipation. Elles sont ainsi bien adaptées à la propagation longue distance. Deux types principaux e méthodes PS sont utilisés dans la littérature ; la première dite de Fourier est adaptée aux problèmes périodiques et permet une résolution précise jusqu'a deux points par longueur d'onde alors que la seconde dite de Chebyshev est employée pour les problèmes non-périodiques. Les erreurs de dispersion et de dissipation générées par celle-ci ont été étudiées récemment (Dragna et al., JCP, 2013). Pour la propagation atmosphèrique, une méthode PS de type Fourier a déjà été proposée dans la littérature (Hornikx et al., JASA, 2010), mais est limitée au cas de la propagation au-dessus de sols plans parfaitement réflechissants. En effet, la prise en compte de la condition d'impédance au niveau du sol nécessite l'utilisation d'une méthode PS de type Chebyshev. Un solver hybride Fourier-Chebyshev est ici developpé et une condition limite d'impédance dans le domaine temporel (Cotté et al., AIAA J., 2009) est implémentée. Différents cas-tests de propagation au-dessus d'un sol impédant dans un milieu inhomogène sont ensuite réalisés.

## **1** Introduction

La modélisation de la propagation en milieu extérieur nécessite de prendre en compte de nombreux phénomènes physiques, liés aux intéractions des ondes acoustiques avec les inhomogénéités de l'atmosphère (profils moyens de température et de vent, fluctuations turbulentes, ...) et avec le sol (réflexion sur un milieu absorbant, diffraction par la topographie, ...). Les solutions analytiques ne sont connues que dans des cas très simples. Pour des applications réalistes, il est nécessaire de recourir à des simulations numériques.

Depuis plus d'une dizaine d'années, la résolution des équations de l'acoustique dans le domaine temporel est un sujet de recherche important. De nombreuses études ont été réalisées afin de prendre en compte des phénomènes complexes (vent, topographie, impédance de surface, ...) mais aussi afin d'améliorer les méthodes numériques employées. En effet, afin d'avoir une précision suffisante à longue distance tout en gardant un temps de calcul raisonnable, il est nécessaire d'employer des méthodes numériques qui génèrent très peu d'erreur. Ainsi, alors que des méthodes différences finies d'ordre 2 étaient utilisés dans les premières publications [1], des méthodes d'ordre élevés, comme des méthodes différences finies optimisées d'ordre 4 [2, 3], sont désormais le nouveau standard dans la communauté de la propagation acoustique.

Récemment, une méthode pseudospectrale (PS) de type Fourier a été proposée [4]. Ce type de méthode permet une résolution des ondes acoustiques jusqu'à deux points par longueur d'onde avec un temps de calcul performant. Cependant, la méthode PS de Fourier est restreinte à la propagation acoustique au-dessus d'un sol dont l'impédance de surface ne dépend pas de la fréquence. Cela est limitant pour des applications réalistes. Afin de lever cette restriction, un autre type de méthode pseudospectrale dite de Chebyshev est ici employée. Une condition limite d'impédance dans le domaine temporel [5] peut alors être implémentée.

Dans la partie 2, les méthodes pseudospectrales sont décrites brièvement. Les méthodes PS de type Fourier et Chebyshev sont ensuite présentées en détail avec les précisions numériques attendues et leurs limitations. Dans la partie 3, un solveur basé sur des méthodes PS est proposé pour des applications en propagation extérieure et différents cas-tests dans une atmosphère au repos et en mouvement sont réalisés pour validation.

### 2 Méthodes pseudospectrales

#### 2.1 Description de la méthode

Le principe des méthodes pseudospectrales (PS) est brièvement décrit dans cette partie. Pour plus de détails, on pourra se référer aux livres de références [6, 7]. On considère une variable u, dont on veut déterminer la dérivée spatiale. Les méthodes spectrales consistent à projeter u sur une base de fonctions convenablement choisies :

$$u(x,t) \approx u_N(x,t) = \sum_{j=0}^N \hat{u}_j(t)\phi_j(x),\tag{1}$$

où  $u_N$  est la projection de u,  $\phi_j$  sont les fonctions d'essais et  $\hat{u}_j$  les coefficients d'expansion. Les méthodes pseudospectrales sont un type particulier de méthodes spectrales. Elles sont obtenues en imposant que  $u_N(x_p) =$  $u(x_p)$  sur un ensemble discret  $x_p$  de N + 1 points, appelés points de collocation. La dérivée spatiale se calcule simplement à partir de l'équation précédente :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{\partial u_N}{\partial x} = \sum_{i=0}^N \hat{u}_j(t) \frac{\partial \phi_j}{\partial x},\tag{2}$$

Selon Boyd [6], la base de fonctions doit satisfaire quelques conditions : être facile à calculer, avoir une convergence rapide et être complète. Ces méthodes sont globales, car la dérivée en un point du domaine est calculée à partir de l'ensemble des informations sur le domaine, contrairement aux méthodes différences finies, par exemple, dans lesquelles les dérivées spatiales en un point ne sont obtenues qu'à partir des points adjacents.

Pour des problèmes aux frontières périodiques, les polynômes trigonométriques, dits aussi de Fourier, sont les mieux adaptés. La méthode pseusdopectrale correspondante est alors appelée méthode PS Fourier. Les points de collocation sont répartis de manière uniforme et le pas spatial  $\Delta$  est donc constant. Celle-ci est particulièrement intéressante, car, pour N suffisamment grand, elle permet une résolution jusqu'à deux points par longueur d'onde. De plus, le calcul des coefficients  $\hat{u}_i$  et de la dérivée  $\partial u_N / \partial x$ se ramène à un calcul de transformée de Fourier discrète, dont le nombre d'opérations peut être ramené à  $O(N \log(N))$ à l'aide de transformée de Fourier rapide (TFR). Pour le cas non-périodique, des oscillations de Gibbs apparaissent et détruisent la précision de la méthode PS Fourier. Des méthodes dites de continuation [8] sont actuellement développées pour résoudre ces problèmes.

Pour des problèmes aux frontières non-périodiques, des bases de fonction constitués de polynômes orthogonaux (Chebyshev, Legendre, ...) sont préferrées dans la littérature. On utilisera par la suite les polynômes de Chebyshev et la méthode PS correspondante est appelée méthode PS Chebyshev. Le coût numérique de cette méthode est plus élevé que la précédente, car la résolution n'est plus que de  $\pi$  points par longueur d'onde, pour N suffisamment grand. Le calcul des coefficients  $\hat{u}_i$  et de la dérivée  $\partial u_N / \partial x$  peut là encore être réalisé efficacement à l'aide de TFR. Le principal inconvénient de cette méthode est néanmoins la distribution non-uniforme des points de collocation. Pour inclure les points aux frontières du domaine, on utilise la distribution dite de Gauss-Lobatto. Si on considère un intervalle [-1; 1], les points de collocation sont repartis suivant  $x_p = \cos(p\pi/N)$  avec  $0 \le p \le N$ . Lorsqu'on augmente N, alors que le pas moyen  $\Delta$  décroît en 1/N, le plus petit pas spatial  $\Delta_{\min}$  décroît en  $1/N^2$ . Pour des méthodes d'intégration explicite, le pas de temps  $\Delta t$  est contraint à travers la condition de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) par  $\Delta_{\min}$ . Il est donc attendu que pour N grand,  $\Delta t$ devienne très petit ce qui implique un coût de calcul très important.



FIGURE 1 – Distribution de points de Gauss-Lobatto utilisée pour la méthode PS Chebyshev (haut) sur un domaine avec N = 32 et (bas) sur deux sous-domaines avec N = 16.

Afin de réduire cette contrainte, le domaine de calcul est classiquement divisé en sous-domaines. Ceci est illustré sur la figure 1, où le domaine initial avec N = 32 a été divisé en deux sous-domaines avec N = 16. Le pas spatial minimal dans le second cas pour N = 16 est deux fois plus grand que celui pour le premier cas avec N = 32, ce qui permet d'augmenter le pas de temps. Notons aussi que le pas spatial moyen reste constant. Aux interfaces des sous-domaines, des conditions aux limites doivent être imposées afin de faire transiter l'information. La méthode des caractéristiques est alors classiquement employée.

#### 2.2 Erreurs numériques

Puisque le nombre N dans les sous-domaines n'est pas très grand, la résolution de  $\pi$  points par longueur d'onde n'est pas atteinte. Les erreurs numériques générées par les méthodes PS Chebyshev multi-domaines ont été étudiées dans Dragna *et al.* [9]. En particulier, le nombre d'onde effectif  $k^*$  de ces méthodes a été déterminé. Celui-ci permet de quantifier les erreurs engendrées par les méthodes numériques. Pour cela, on considère l'équation d'advection :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{3}$$

avec *c* la célérité de l'onde et la condition initiale  $u(x, t = 0) = \exp(ikx)$ . La solution analytique du problème s'écrit simplement  $u(x, t) = \exp(ikx - ikct)$ . Pour des méthodes différences finies, la solution numérique est donnée par  $u(x, t) = \exp(ikx - ik^*ct)$ . Pour les méthodes

PS Chebyshev, la solution s'écrit comme la somme de différents modes. Pour des temps suffisamment long, il ne reste plus qu'un seul mode appelé mode propagatif et la solution devient  $u(x,t) = V(k,x) \exp(ikx - ik^*ct)$ , avec V(k,x) l'amplitude initial du mode propagatif.



FIGURE 2 – Nombre de points par longueur d'onde en fonction du nombre maximal de longueur d'ondes précises pour un critère (haut)  $\mathcal{E}_{phase} < 0.05\pi$  et (bas)  $\mathcal{E}_{amplitude} < 0.05$  pour : une méthode PS Chebyshev multidomaine avec (ligne bleue) N = 8, (ligne rouge) 16, (ligne verte) 32 et (ligne magenta) 64, une méthode PS Fourier (ligne noire) et une méthode différences finies standard (tirets cyan) 2, (tirets rouges) 4 et (tirets verts) 6 et (tirets bleus) d'ordre 8.

Pour un récepteur situé en  $x = M\Delta$ , on peut donc évaluer l'erreur sur la phase  $\mathcal{E}_{\text{phase}} = M|k - k^*|\Delta$  et sur l'amplitude  $\mathcal{E}_{\text{amplitude}} = |1 - \exp(M \text{Im}[k^*]\Delta)|$  de la solution numérique. En reprenant les travaux de Fornberg [10], on peut alors déterminer la discrétisation spatiale requise pour que l'erreur sur la phase ou sur l'amplitude d'une onde qui s'est propagagée sur un nombre donné de longueur d'onde  $\lambda$  soit plus faible qu'une valeur fixée. On choisit ici deux critères : pour le premier, une erreur sur la phase  $\mathcal{E}_{\text{phase}} < 0.05\pi$  et pour le second, une erreur sur l'amplitude  $\mathcal{E}_{\text{amplitude}} < 0.05$ . Les résultats sont représentés sur la figure 2 pour les méthodes PS Chebyshev pour N = 8, 16, 32 et 64 et pour les méthodes différences finies centrées standard d'ordre 2, 4, 6 et 8. Pour l'erreur sur la phase, on peut voir que des schémas différences finis d'ordre 2 nécessitent un nombre très important de points par longueur d'onde pour atteindre une bonne précision à longue distance. Ainsi pour avoir 100  $\lambda$  précis, il faut mailler le domaine avec plus de 80 points par longueur d'onde. Lorsqu'on augmente l'ordre des schémas, on peut diminuer le nombre de points par longueur d'onde requis à précision égale. Ainsi pour un ordre 4, 6 ou 8, seulement 20, 10 ou 7 points par longueur d'onde sont alors nécessaires. Notons que les méthodes PS Chebyshev ont une précision remarquable : ainsi pour N = 8, la méthodes PS Chebyshev est plus précise que son équivalente différences finies. Lorsque N augmente, la précision des méthodes PS Chebyshev est limitée à  $\pi$  points par longueur d'onde, atteint environ pour N = 64. L'erreur sur l'amplitude est nulle pour les méthodes différences finies standard. Pour les méthodes PS Chebyshev, de manière comparable à l'erreur sur la phase, elle décroît quand N augmente et la limite de  $\pi$ points par longueur d'onde est atteinte pour  $N \ge 64$ . Pour des calculs de propagation à longues distances, c'est-à-dire au-delà de 100 longueurs d'onde, on s'assurera donc à avoir une discrétisation supérieure à 8, 5, 4 et 3.5 points par longueur d'onde pour N = 8, 16, 32, 64 respectivement.

L'efficacité des méthodes PS Chebyshev multi-domaines a aussi été évaluée dans Dragna *et al.* [9]. Il a été montré que l'efficacité était maximale pour *N* compris entre 8 et 32.

## 3 Application à la propagation atmosphérique

#### 3.1 Description du solveur

La propagation dans l'atmosphère est ici décrite par un jeu de deux équations couplées [11], qui correspondent aux équations d'Euler linéarisées où les termes d'ordre  $(V_0/c_0)^2$ , avec  $V_0$  l'ordre de grandeur de vitesse du vent et  $c_0$  une valeur de référence pour la célérité du son, ont été négligés.

Comme cela a été vue dans la partie précédente, la méthode PS Fourier est plus efficace que la méthode PS Chebyshev. On utilise donc seulement celle-ci dans la direction perpendiculaire au sol et la méthode PS Fourier est appliquée dans les autres directions. Au niveau du sol, la condition limite d'impédance proposée par Cotté *et al.* [5] est implémentée. Aux autres bords du domaine, des couches parfaitement adaptées (ou PML) sont utilisés afin de rendre la solution périodique, ce qui est indispensable pour la méthode PS Fourier. La formulation dite «split» (voir par exemple [4]) est utilisée. Les méthodes numériques employées sont illustrées sur la figure 3.



FIGURE 3 – Exemple de domaine de calcul. La méthode PS Chebyshev multi-domaines est utilisée dans la direction perpendiculaire au sol. Dans les autres directions, la méthode PS Fourier est appliquée.

#### 3.2 Cas-test 3-D

Un premier cas-test simple de validation est réalisé. On considère ainsi la propagation d'un signal impulsionnel au-dessus d'un sol impédant dans une géométrie tridimensionnelle. Le domaine de calcul a pour taille [-4 m; 108 m] × [-7.8 m; 7.8 m] × [0 m; 40 m]. Le pas spatial est égal à  $\Delta x = \Delta y = 0.25$  m dans les directions x et y et à  $\Delta z = 0.125$  m dans la direction z. Il y a environ 500000 points dans le domaine de calcul. Dans la direction z où est appliquée la méthode PS Chebyshev, 16 sous-domaines avec N = 16 sont utilisés.



FIGURE 4 – (Haut) Formes d'onde à un récepteur en x = 100 m et z = 1 m pour (ligne noire) la solution numérique et (tirets rouges) la solution analytique et (bas) erreur sur les densités spectrales d'énergie en dB.

Les formes d'ondes à un récepteur situé en x = 100 m et z = 1 m sont représentées sur la figure. 4 pour la solution numérique et la solution analytique [12]. Les deux solutions sont en très bon accord. L'erreur en dB dans le domaine fréquentiel est ensuite représentée en fonction de  $\Delta x/\lambda$ . On peut voir qu'on retrouve une très bonne précision pour des ondes discrétisés jusqu'à deux points par longueur d'onde avec la méthode PS Fourier. L'erreur commence ainsi à croître lorsqu'on se rapproche de la limite de Shannon-Nyquist.

#### **3.3 Cas-test 2-D**

On s'intéresse maintenant à des cas de propagation 2-D de signaux impulsionnels à longue distance dans une atmosphère inhomogène. Afin de réduire le temps de calcul, une technique de fenêtre glissante [1] est employée. Cette méthode est basée sur le fait qu'un signal impulsionnel a une étendue spatiale bornée. Pour un cas de propagation à longue distance, il n'est donc pas nécessaire de mailler l'ensemble du domaine, mais seulement une fenêtre autour du signal. Lorsque le signal s'est propagé sur un pas spatial, on décale Le domaine compte 384 points dans la direction x et a 32 sous-domaines avec N = 32 dans la direction z. La source acoustique est un point source situé en  $x_S = 0$  m et  $z_S = 2$  m. Le contenu fréquentiel de la source est gaussien avec un maximum pour une fréquence égale à 600 Hz.

#### Profil de célérité du son

Un profil de célérité du son du type :

$$c(z) = \frac{c_0}{\sqrt{1 + 2z/R_c}},$$
 (4)

avec  $R_c = 1000$  m, est d'abord considéré. Ce profil est appelé profil bilinéaire dans la littérature [13]. La solution analytique est connue pour un sol absorbant [13].



FIGURE 5 – (Haut) Formes d'onde à un récepteur en x = 300 m et z = 2 m et (bas) densité spectrale d'énergie correspondate pour : (ligne noire) la solution numérique et (tirets rouges) la solution analytique.

Les formes d'ondes obtenues en x = 300 m et z = 2 m avec les solutions analytiques et numériques sont représentées en fonction du temps sur la figure 5. L'accord obtenu est très bon. Notons qu'à cette distance pour la valeur de R<sub>c</sub> choisie, le récepteur est dans la zone d'ombre et l'énergie du signal est très faible. Les densités spectrales d'énergie calculées à partir des deux solutions sont ensuite tracées en fonction de la fréquence. Celles-ci sont pratiquement confondues sur l'intervalle de fréquence considérée. Des écarts sont observés proche de 1800 Hz, qui sont principalement dus au fait que le signal a très peu d'énergie dans cette gamme de fréquence. On peut aussi noter sur les spectres, une bosse aux basses fréquences, pour f = 50 Hz, qui peut correspondre à une onde de surface et qui liée à la partie oscillante de la forme d'onde autour de t = 900 ms.

#### Profil de vitesse du vent

On considére ensuite un profil uniforme de vent dans la direction *x*, avec  $V_{0x} = Mc_0$  et  $V_{0z} = 0$ . Le nombre de Mach *M* est fixé à 0.05.



FIGURE 6 – (Haut) Formes d'onde à un récepteur en x = 300 m et z = 2 m et (bas) densité spectrale d'énergie correspondate pour : (ligne noire) la solution numérique et (tirets rouges) la solution analytique.

On a représenté les formes d'ondes obtenues en x = 300 m et z = 2 m pour la solution numérique et la solution analytique [11] sur la figure 6. Là encore, les formes d'onde sont en très bon accord. Les courbes représentant les densités spectrales d'énergie sont aussi quasiment superposées jusqu'à 1700 Hz.

### 4 Conclusion

L'application de méthodes pseudospectrales à la propagation extérieure a été examinée. L'étude s'est basée sur de précédents travaux [4] qui avaient proposé une méthode PS de type Fourier pour la propagation au-dessus d'un sol avec une impédance constante. Pour généraliser l'application de méthodes PS au cas d'un sol dont les propriétés dépendent de la fréquence, une méthode PS de type Chebyshev multidomaine a été présentée. Un solveur hybride utilisant la méthode PS Chebyshev dans la direction perpendiculaire au sol et la méthode PS Fourier dans les autres directions a été développé et a été validé avec différents cas dans des géométries bi- et tri-dimensionnelles. Il a été ainsi montré que la réflexion par un sol absorbant et la réfraction et la convection par des profils moyens de célérité du son et de vent étaient convenablement pris en compte.

Les méthodes PS sont donc des méthodes numériques performantes pour la propagation à longue distance. La méthodes PS de type Fourier est en particulier appropriée à la propagation extérieure. La méthode PS Chebyshev est, quant à elle, plus délicate à mettre en oeuvre. Son principal inconvénient est la distribution de points non-uniforme qui induit une diminution du pas de temps par rapport à une méthode PS Fourier. Des schémas différences finies optimisés, plus simples à mettre en oeuvre, ont de plus une précision similaire.

Une extension directe de ces travaux pourrait être la prise en compte de la topographie, comme cela a été fait récemment pour un solveur différences finies [14]. Par ailleurs, afin d'améliorer la performance du solveur PS, la méthode de continuation de Fourier pourrait être évaluée comme alternative possible à la méthode PS Chebyshev.

### Remerciements

Les auteurs voudraient remercier Maarten Hornikx, avec qui l'étude a été menée. Ce travail a été réalisé au sein du Labex CeLyA de l'Université de Lyon, géré par l'Agence Nationale de la Recherche (ANR-10-LABX-0060/ANR-11-IDEX-0007).

## Références

- [1] E. Salomons, R. Blumrich, et D. Heimann, Eulerian time-domain model for sound propagation over a finite-impedance ground surface. Comparison with frequency-domain models, *Acta Acustica united with Acustica* **88**, 483–492, (2002).
- [2] B. Cotté et P. Blanc-Benon, Time-domain simulations of sound propagation in a stratified atmosphere over an impedance ground, *J. Acoust. Soc. Am.* **125**(5), EL202-207 (2009).
- [3] D. Heimann, On the efficiency of noise barriers near sloped terrain a numerical study, *Acta Acustica united with Acustica* **96**, 1003–1011 (2010).
- [4] M. Hornikx, R. Waxler et J. Forssén, The extended Fourier pseudospectral time-domain method for atmospheric sound propagation, *Journal of the Acoustical Society of America* **128**(4), 1632-1646 (2010).
- [5] B. Cotté, P. Blanc-Benon, C. Bogey et F. Poisson, Timedomain impedance boundary conditions for simulations of outdoor sound propagation, *AIAA Journal* 47(10), 2391–2403 (2009).
- [6] J. P. Boyd, *Chebyshev and Fourier spectral methods*, Dover Publications, (2001).
- [7] L. N. Trefethen, *Spectral methods in MATLAB*, SIAM, (2000).
- [8] N. Albin et O. P. Burnon, A spectral FC solver for the compressible Navier-Stokes equations in general domains I : Explicit time-stepping, *Journal of Computational Physics* 230, 6248-6270 (2011).
- [9] D. Dragna, C. Bogey, M. Hornikx et P. Blanc-Benon, Analysis of the dissipation and dispersion properties of the multi-domain Chebyshev pseudospectral method, *Journal of Computational Physics* 255, 31-47 (2013).

- [10] B. Fornberg, The pseudospectral method : comparisons with finite-differences for the elastic wave equation, *Geophysics* 52(4), 483–501 (1987).
- [11] V. E. Ostashev, D. K. Wilson, L. Liu, D. F. Aldridge, N. P. Symons et D. Marlin, Equations for finitedifference, time-domain simulation of sound propagation in moving inhomogeneous media and numerical implementation, *Journal of the Acoustical Society of America* **117**(2), 503–517 (2005).
- [12] X. Di et K. E. Gilbert, An exact Laplace transform formulation for a point source above a ground surface, *Journal of the Acoustical Society of America* 93(2), 714–720 (1993).
- [13] A. Berry et G. Daigle, Controlled experiments of the diffraction of sound by a curved surface, *Journal of the Acoustical Society of America* 83(6), 2047–2028 (1988).
- [14] D. Dragna, P. Blanc-Benon et F. Poisson, Timedomain solver in curvilinear coordinates for outdoor sound propagation over complex terrain, *Journal of the Acoustical Society of America* 133(6), 3751-3763 (2013).