

## **Une approche bayésienne de la parcimonie pour l'identification de sources acoustiques**

Q. Leclere, A. Pereira et J. Antoni

Laboratoire Vibrations Acoustique, INSA de Lyon Bâtiment St. Exupéry 25 bis av. Jean Capelle, 69621  
Villeurbanne, France  
quentin.leclere@insa-lyon.fr

Les méthodes d'identification de sources constituent aujourd'hui un enjeu majeur pour les méthodologies d'imagerie acoustique. La principale difficulté est que le problème sous-jacent est généralement mal posé, sous déterminé ou mal conditionné, à cause de l'existence d'une infinité de solutions. La minimisation d'un critère d'erreur de reconstruction (erreur des moindres carrés) n'est alors pas suffisante pour obtenir un problème bien posé, il est nécessaire d'ajouter des contraintes additionnelles qui peuvent être basées sur la norme L2 de la solution (régularisation de Tikhonov), ou sur des normes L1 ou L0, conduisant à des solutions dites parcimonieuses. Le formalisme bayésien permet d'introduire naturellement un mécanisme de régularisation dans les problèmes d'identification, sous la forme d'une ddp (densité de probabilité) de source a priori. Le choix d'une ddp de type gaussien amène à rechercher une solution d'énergie faible, équivalente en tout point à la minimisation L2. L'approche bayésienne offre cependant une estimation du paramètre de régularisation très performante par rapport aux approches alternatives (courbe en L, validation croisée généralisée). Il est également possible de choisir d'autre ddp a priori, permettant d'obtenir des solutions plus ou moins parcimonieuses. L'objectif de cette communication est de présenter l'intérêt des solutions apportées par la démarche bayésienne pour les problématiques d'imagerie acoustique. L'utilisation de ddp a priori non gaussiennes sera notamment illustrée par des exemples numériques et expérimentaux. Les résultats seront comparés aux résultats obtenus en utilisant des algorithmes classiques de recherche de solutions parcimonieuses de type Basis Pursuit denoising.

## 1 Introduction

### 1.1 Beamforming, moindres carrés

Les méthodes d'identification de sources acoustiques basées sur les mesures d'antennerie microphonique sont en constants développements depuis les années 1970, grâce notamment aux progrès technologiques et informatiques ayant permis la multiplication du nombre de voies d'acquisition et des puissances de calcul.

Généralement, les méthodes d'identification de sources acoustiques utilisent l'équation de propagation des ondes en champ libre. L'utilisation de modèles plus complexes d'origine numérique ou expérimentale permettent de prendre en compte des géométries particulières, lorsque la configuration expérimentale le nécessite, mais leur utilisation reste assez délicate à cause de la sensibilité des méthodes au biais de modèle. Néanmoins, d'une manière générale, la propagation acoustique sera formulée matriciellement, pour une fréquence donnée, sous la forme suivante :

$$\mathbf{p} = \mathbf{H}\mathbf{q}, \quad (1)$$

où  $\mathbf{p}$  représente les  $M$  points de mesure microphoniques,  $\mathbf{q}$  les  $N$  degrés de liberté de sources et  $\mathbf{H}$  la matrice de propagation. On peut, typiquement, choisir une décomposition en ondes planes ou en ondes sphériques, menant respectivement aux fonctions de transfert suivantes :

$$H_{mn} = e^{jk(\cos \phi_n(x_m \cos \theta_n + y_m \sin \theta_n) + z_m \sin \phi_n)} \quad (2)$$

$$H_{mn} = \frac{e^{-jkr_{mn}}}{r_{mn}} \quad (3)$$

où  $k$  représente le nombre d'onde acoustique,  $(x, y, z)_m$  la position du récepteur  $m$ ,  $\theta_n, \phi_n$  l'angle d'arrivée de l'onde  $n$  pour la formulation en ondes planes, et  $r_{mn}$  la distance entre la source monopolaire  $n$  et le récepteur  $m$  pour la formulation en ondes sphériques. La première méthode à avoir été utilisée pour traiter des mesures d'antennerie microphonique est appelée formation de voies (beamforming, [1]). Il s'agissait alors d'appliquer un retard à chaque microphone

avant de sommer l'ensemble des signaux, les retards appliqués aux différents points de mesure permettant de privilégier une direction d'arrivée particulière des ondes sonores. Le principe de calcul peut être transcrit dans le domaine de Fourier, revenant à résoudre l'équation 1 indépendamment pour chaque degré de liberté de source au sens des moindres carrés (on omet le terme de normalisation) :

$$q_n = \langle \mathbf{H}_n, \mathbf{p} \rangle = \sum_{m=1}^M H_{mn}^* p_m, \quad (4)$$

où  $\mathbf{H}_n$  représente la colonne  $n$  de la matrice  $\mathbf{H}$ . La méthode de formation de voies ne constitue pas à proprement parler une méthode d'identification, tout simplement parce que la quantification des contributions se fait de manière indépendante pour chaque source potentielle. Les avantages de la méthode est sa robustesse, son insensibilité au nombre et à la répartition des sources potentielles, l'inconvénient est que la résolution spatiale du résultat est particulièrement mauvaise en basses fréquences, et que la méthode ne permet pas d'obtenir des résultats quantitatifs.

La problématique d'identification apparait lorsque l'on tente l'inversion matricielle du système (1), qui, généralement, est sous déterminé ( $M \ll N$ ) [2]. Dans ce cas, le problème d'identification de  $\mathbf{q}$  a une infinité de solutions exactes. La solution naïve consiste alors à choisir tout simplement la solution la moins énergétique, donnée par

$$\mathbf{q} = \mathbf{H}^*(\mathbf{H}\mathbf{H}^*)^{-1}\mathbf{p} \quad (5)$$

En présence de bruit, cette solution n'est pas satisfaisante car le caractère exact de la solution reste un critère trop restrictif. Il est alors possible de relaxer ce critère en utilisant une approche moindres carrés, qui, associée à un critère de minimisation énergétique de la solution, amène la solution régularisée au sens de Tikhonov :

$$\mathbf{q} = \mathbf{H}^*(\mathbf{H}\mathbf{H}^* + \eta^2\mathbf{I})^{-1}\mathbf{p}, \quad (6)$$

qui correspond au minimum de la fonctionnelle

$$J(\mathbf{q}) = \|\mathbf{p} - \mathbf{H}\mathbf{q}\|^2 + \eta^2\|\mathbf{q}\|^2 \quad (7)$$

La difficulté revient alors à ajuster correctement le paramètre de régularisation  $\eta$ , avec des approches du type courbe en L ou validation croisée [2, 3].

## 1.2 Vision bayésienne de la régularisation de Tikhonov

L'approche bayésienne est basé sur une vision statistique du problème d'identification [4, 5]. Il est alors nécessaire de considérer le bruit de mesure, qui sera supposé gaussien indépendant. L'équation (1) devient alors

$$\mathbf{p} = \mathbf{H}\mathbf{q} + \mathbf{b}, \quad (8)$$

avec la loi de probabilité associée au bruit :

$$[\mathbf{b}] = Nc(\mathbf{0}, \beta^2\mathbf{I}) \quad (9)$$

qui représente une loi normale complexe multivariée de centre  $\mathbf{0}$  et de matrice de covariance  $\beta^2\mathbf{I}$ , où  $\beta$  est un paramètre déterminant le niveau de bruit. Le bruit est considéré ici incohérent (matrice de covariance diagonale) et de même niveau sur tous les microphones. L'objectif est d'inférer la loi de probabilité de  $\mathbf{q}$  connaissant  $\mathbf{p}$ , notée  $[\mathbf{q}|\mathbf{p}]$ , et appelée loi de  $\mathbf{q}$  a posteriori, à partir de la loi de  $\mathbf{p}$  connaissant  $\mathbf{q}$ , notée  $[\mathbf{p}|\mathbf{q}]$ . La formule de Bayes met en relation ces deux lois :

$$[\mathbf{q}|\mathbf{p}] = \frac{[\mathbf{p}|\mathbf{q}][\mathbf{q}]}{[\mathbf{p}]} \quad (10)$$

La valeur de  $\mathbf{q}$  maximisant la fonction  $[\mathbf{q}|\mathbf{p}]$  est appelée MAP (maximum a posteriori), et sera noté  $\hat{\mathbf{q}}$ . Le dénominateur de l'équation 10 ne dépendant pas de  $\mathbf{q}$ , le MAP est obtenu en maximisant le numérateur seulement. La loi  $[\mathbf{p}|\mathbf{q}]$  est directement obtenue à partir de l'équation 8 et de la loi du bruit  $[\mathbf{b}]$ . La loi de  $[\mathbf{q}]$  est appelée loi a priori de  $\mathbf{q}$ , qui va permettre d'introduire un mécanisme de régularisation en donnant plus de probabilité aux solutions de faibles normes. On peut dans un premier temps utiliser une loi normale complexe, de la forme

$$[\mathbf{q}] = Nc(\mathbf{0}, \alpha^2\mathbf{I}) \quad (11)$$

On notera que, comme pour le modèle de bruit, la matrice de covariance est ici diagonale, ce qui revient à ne pas introduire d'a priori sur la corrélation spatiale des sources recherchées. La recherche du MAP revient alors à minimiser une fonctionnelle identique à la fonction coût de la solution au sens de Tikhonov avec un paramètre de régularisation égal au rapport des puissances données a priori au bruit et aux sources  $\eta^2 = \beta^2/\alpha^2$  (cf. [4, 5]). L'originalité de l'approche bayésienne par rapport à l'approche classique est qu'elle permet de déterminer de manière originale le paramètre de régularisation. En choisissant une loi de probabilité a priori uniforme pour  $\alpha$  et  $\beta$ , la loi de Bayes peut s'écrire

$$[\alpha^2, \beta^2|\mathbf{p}] = \frac{[\mathbf{p}|\alpha^2, \beta^2]}{[\mathbf{p}]} \quad (12)$$

la loi  $[\mathbf{p}|\alpha^2, \beta^2]$  est établi à partir de l'équation (8) et des lois a priori du bruit et des sources :

$$[\mathbf{p}|\alpha^2, \beta^2] = Nc(\mathbf{0}, \alpha^2\mathbf{H}\mathbf{H}^* + \beta^2\mathbf{I}) \quad (13)$$

La recherche des MAP  $\hat{\alpha}^2, \hat{\eta}^2$  revient alors à déterminer la valeur de  $\eta^2 (= \beta^2/\alpha^2)$  minimisant

$$J(\eta^2) = M \ln(\mathbf{p}^*(\mathbf{H}\mathbf{H}^* + \eta^2\mathbf{I})^{-1}\mathbf{p}) + \ln(|\mathbf{H}\mathbf{H}^* + \eta^2\mathbf{I}|) \quad (14)$$

Le MAP  $\hat{\alpha}^2$  étant obtenu à partir de  $\hat{\eta}^2$  :

$$\hat{\alpha}^2 = \frac{1}{M} \mathbf{p}^*(\mathbf{H}\mathbf{H}^* + \hat{\eta}^2\mathbf{I})^{-1}\mathbf{p} \quad (15)$$

## 1.3 A priori de parcimonie

Le choix de la loi de probabilité a priori de  $\mathbf{q}$  est crucial pour le mécanisme de régularisation (cf. [6]). Une loi gaussienne complexe multivariée conduit à une régularisation de Tikhonov, mais qu'en est il si l'on change cette loi? On se propose ici d'étudier la gaussienne généralisée centrée [7], dont la densité de probabilité est de la forme

$$[\mathbf{q}] \propto \exp\left(-\frac{(\|\mathbf{q}\|_p)^p}{2\alpha^2}\right) \quad (16)$$

où  $(\|\mathbf{q}\|_p)^p = \sum_{n=1}^N |q_n|^p$ . La forme de la densité de probabilité est contrôlée par le paramètre  $p$ . Une valeur de  $p$  égale à 2 donne une gaussienne classique. Les densités de probabilité de lois gaussiennes réelles généralisées centrées réduites sont tracées pour différentes valeurs de  $p$  sur la figure 1.

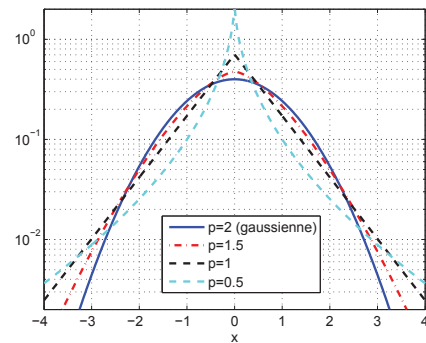


FIGURE 1 – Densités de probabilité de lois gaussiennes généralisées centrées réduites.

Comme on peut le voir sur la figure 1, une valeur inférieure à 2 augmente la probabilité des grandes et faibles valeurs de la solution. Il semble donc naturel qu'une valeur de  $p$  inférieure à 2 privilégiera d'autant les résultats parcimonieux que  $p$  se rapproche de 0. L'application de la règle de Bayes à cet a priori (équation (10)) conduit à la minimisation de la fonction coût suivante :

$$J(\mathbf{q}) = \|\mathbf{p} - \mathbf{H}\mathbf{q}\|^2 + \eta^2(\|\mathbf{q}\|_p)^p \quad (17)$$

où  $\eta$  est un paramètre de régularisation dépendant de  $\alpha$  et  $\beta$ . L'apparition de la norme  $L_p$  dans la fonction coût renvoie à la problématique du choix de la base de représentation des sources. En effet, si la norme  $L_2$

est insensible au choix de la base de représentation des sources, ce n'est plus le cas pour la norme  $L_p$ . Cette constatation met en perspective la notion de choix de dictionnaire, propre aux approches inverses parcimonieuses, pour lesquelles le choix de la base dans laquelle la parcimonie est recherchée est fondamental (voir [8]).

La minimisation de la fonction (17) peut être faite de manière itérative par une approche de type majoration-minimisation [9], pour laquelle le problème est ramené à une minimisation faisant intervenir une norme  $L_2$ , dont la solution est trouvée comme décrit précédemment :

$$J^{i+1}(\mathbf{q}) = \|\mathbf{p} - \mathbf{H}\mathbf{q}\|^2 + \eta^2 \|\mathbf{W}^i \mathbf{q}\|^2 \quad (18)$$

où  $\mathbf{W}^i$  est une matrice diagonale qui dépend du résultat  $\mathbf{q}_i$  de la minimisation de  $J^i(\mathbf{q})$ , dont le terme  $(n, n)$  est donné par

$$(W^i)_{n,n} = |(q^i)_n|^{p-2} \quad (19)$$

La solution initiale  $\mathbf{q}_0$  pouvant être arbitrairement choisie égale à la solution avec un a priori de source gaussien ( $p = 2$ ).

## 1.4 Algorithmes de reconstruction parcimonieuse

La recherche d'une solution parcimonieuse revient à rechercher la solution ayant le moins possible de termes non nuls, ce qui revient à minimiser la norme  $L_0$ . La recherche de ce type de solution est un problème complexe, qui peut être remplacé sous certaines conditions par la minimisation de la norme  $L_1$ . Plusieurs algorithmes existent, dont les descriptions, accompagnées d'illustrations sont faites dans [8, 10, 11] dans le cadre du problème inverse acoustique. On se propose ici de tester l'algorithme BPDN (Basis Pursuit Denoise), dont le principe est le suivant :

$$\text{minimiser } \|\mathbf{q}\|_1 \text{ satisfaisant } \frac{\|\mathbf{p} - \mathbf{H}\mathbf{q}\|}{\|\mathbf{p}\|} < \epsilon \quad (20)$$

Plusieurs programmes existent pour résoudre ce problème, nous utiliserons ici la toolbox SPGL1 [12, 13]. L'utilisation de cette approche nécessite de donner une valeur maximale d'erreur de reconstruction relative,  $\epsilon$ .

## 2 Résultats

### 2.1 Simulations numériques

On se propose dans cette section de simuler un cas simple d'identification de sources acoustiques pour illustrer l'effet du choix de la forme de ddp a priori de solution. Une ligne de 100 sources monopolaires sont distribuées régulièrement sur un segment de 1 mètre de longueur, avec un pas de 1cm. 20 microphones sont positionnés sur un segment parallèle, à 20 cm des sources, avec un pas de 5cm. La fréquence étudiée est 1000Hz. Deux distributions de sources sont simulées, la première n'a que deux sources non nulles, de débit unitaires, aux abscisses  $x = 0.25$  et  $0.57m$ . La seconde est une source répartie : tous les monopoles situés

entre  $0.3$  et  $0.7m$  ont un débit non nul constant. Les distributions de sources sont tracées sur la figure 2. La pression rayonnée sur les microphones est simulée

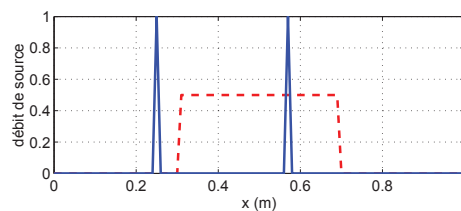


FIGURE 2 – Distributions de sources simulées. Cas 1 (2 monopoles, trait plein bleu), cas 2 (source distribuée, trait tirets rouge).

en utilisant des fonctions de transfert champ libre (equation (3)), puis bruitée en respectant un RSB global de 20dB. La reconstruction des sources est faite suivant la méthode décrite en section 1.3, avec un paramètre  $p$  variant entre 0 et 2. Les résultats sont donnés pour les deux cas de sources sous forme de cartographies données dans les figures 3 et 4.

Dans les deux cas, la tendance au résultat de plus

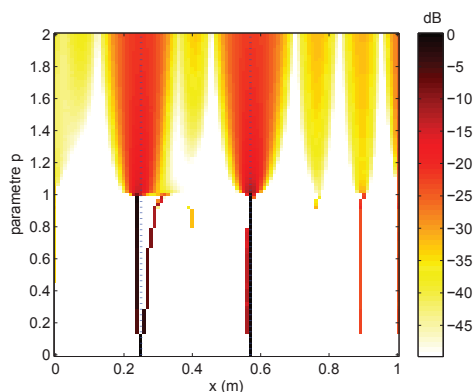


FIGURE 3 – Sources identifiées pour le cas 1 (2 monopoles, matérialisés par les barres verticales en pointillés bleu).

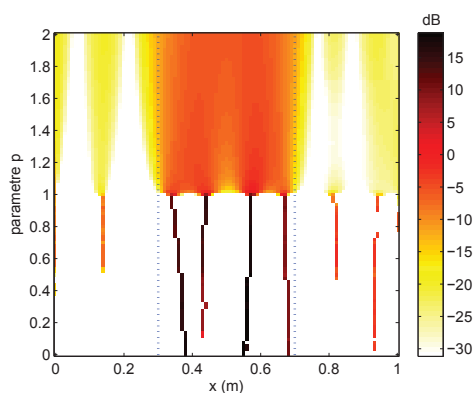


FIGURE 4 – Sources identifiées pour le cas 2 (sources répartie entre les limites matérialisées par les barres verticales en pointillés bleu).

en plus parcimonieux est nette lorsque la valeur de  $p$  diminue. Cependant, il faut noter que la séparation entre résultats "parcimonieux" et "distribués" est

franche, la frontière étant obtenue pour  $p = 1$ . Pour la valeur  $p = 0$  (minimisation de la norme L0), le résultat obtenu pour le cas 1 (2 monopoles) est très satisfaisant, car dans notre cas le dictionnaire choisi (base canonique) est bien adapté. Pour le cas de la source répartie, le résultat est logiquement moins satisfaisant.

Les erreurs de reconstruction normalisées ( $\sigma_n =$

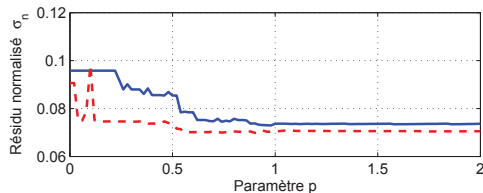


FIGURE 5 – Erreurs de reconstruction en fonction du paramètre  $p$  pour le cas 1 (2 monopoles, traits pleins) et le cas 2 (sources distribuées, pointillés).

$\|\mathbf{p} - \mathbf{H}\mathbf{q}\|/\|\mathbf{p}\|$ ) sont tracées sur la figure 5 pour les deux cas simulés en fonction de  $p$ . On constate que dans les deux cas, l'erreur de reconstruction a tendance à augmenter très légèrement (1 à 2 %) quand  $p$  diminue. Les normes L0, L1, et L2 des résultats obtenus pour les

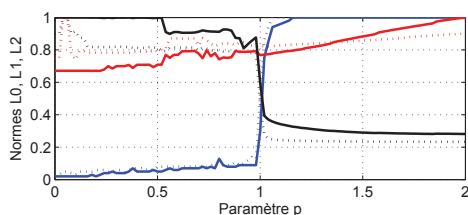


FIGURE 6 – Normes du résultat, L0 (en bleu), L1 (en rouge) et L2 (en noir) en fonction du paramètre  $p$  pour le cas 1 (2 monopoles, traits pleins) et le cas 2 (sources distribuées, pointillés).

deux cas simulés sont tracés sur la figure 6 en fonction de  $p$ . Logiquement, les normes L0 et L2 ont tendance à augmenter et diminuer, respectivement, avec  $p$ . On retrouve le caractère discontinu de l'évolution de la norme L0, très faible pour  $p < 1$  et maximale pour  $p > 1$  (pas d'éléments nuls dans la source identifiée). On note également, pour le cas 2, que la norme L1 n'a pas une évolution monotone avec  $p$  pour  $p < 1$ .

Enfin, il est important d'examiner la rapidité de l'approche itérative majoration-minimisation décrite en section 1.3. Le nombre d'itérations est tracé pour les deux cas simulés sur la figure 7. La convergence de l'algorithme s'avère particulièrement lente pour les cas proches de  $p = 1$ . Cette constatation est à mettre en perspective avec la frontière entre résultats parcimonieux et continus, obtenue pour cette même valeur de  $p$ . Les mêmes simulations ont été traitées avec l'approche BPDN (cf. section 1.4). Les résultats sont donnés en figures 8 et 9 pour les deux cas traités, en fonction du paramètre  $\epsilon$ , la tolérance pour l'erreur de reconstruction relative (cf. eq. 20). Il apparaît que l'algorithme échoue en dessous d'une certaine valeur de tolérance relative, à environ 7%, qui correspond à une valeur légèrement inférieure à l'erreur introduite. Au

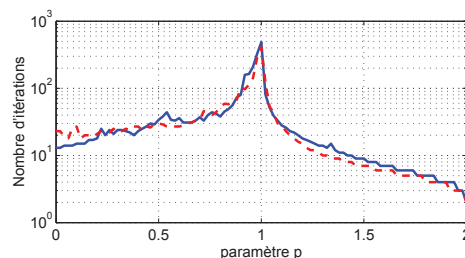


FIGURE 7 – Nombre d'itérations pour les cas 1 (2 monopoles, trait plein bleu) et 2 (source distribuée, trait tirets rouge).

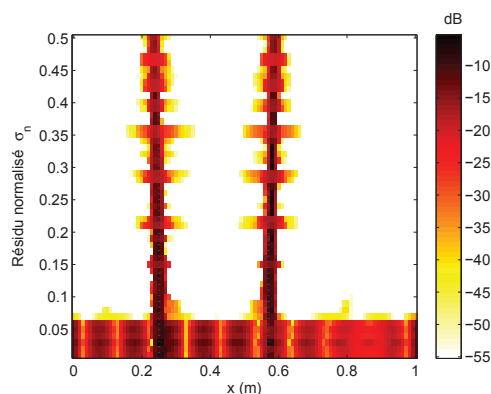


FIGURE 8 – Sources identifiées par BPDN pour le cas 1 (2 monopoles, matérialisés par les barres verticales en pointillés bleu).

dès de ce seuil, les résultats pour le cas 1 (2 monopoles) sont satisfaisants, même si la parcimonie ne semble pas optimale : chaque monopole simulé est reconstruit sur 4 à 5 sources identifiées contiguës. Pour le cas 2 (sources réparties), l'algorithme BPDN a tendance à identifier deux sources, quelle que soit la tolérance, avec cependant une dynamique dépendant fortement du choix du paramètre.

## 2.2 Résultats expérimentaux

Les différentes méthodes testées numériquement ont également été mises en oeuvre sur un cas expérimental académique. Une antenne de 30 microphone ( $5 \times 6$ , résolution 10cm) est placée à 20cm d'une source acoustique constituée de 3 sources corrélées considérées comme ponctuelles dans la bande de fréquence d'intérêt (100Hz-2kHz). Les résultats d'identification sont présentés à une fréquence de 980 Hz en figure 10 pour différentes méthodes. L'erreur de reconstruction normalisée  $\sigma_n$  est donnée pour chaque résultat.

Le choix de la méthode utilisée a un impact significatif sur la dynamique et la résolution du résultat. A cette fréquence, le beamforming ne permet pas d'identifier les trois sources. La méthode itérative d'identification permet d'identifier les 3 sources, avec une dynamique qui dépend fortement de du choix du paramètre  $p$ . On notera la forte sensibilité du résultat pour des valeurs de  $p$  proches de 1, comme il avait été observé sur les simulations numériques. Sur ce cas, une valeur de  $p$  égale à 1.1 permet d'obtenir une image satisfaisante pour un résidu normalisé relativement bas



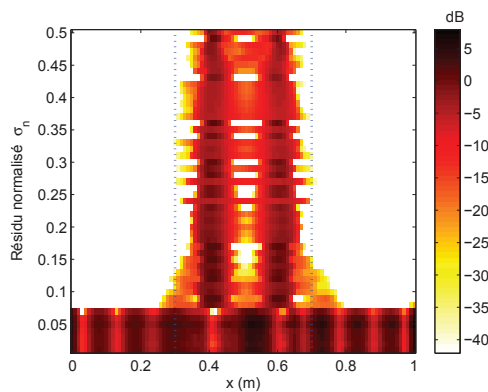


FIGURE 9 – Sources identifiées par BPDN pour le cas 2 (sources répartie entre les limites matérialisées par les barres verticales en pointillés bleu).

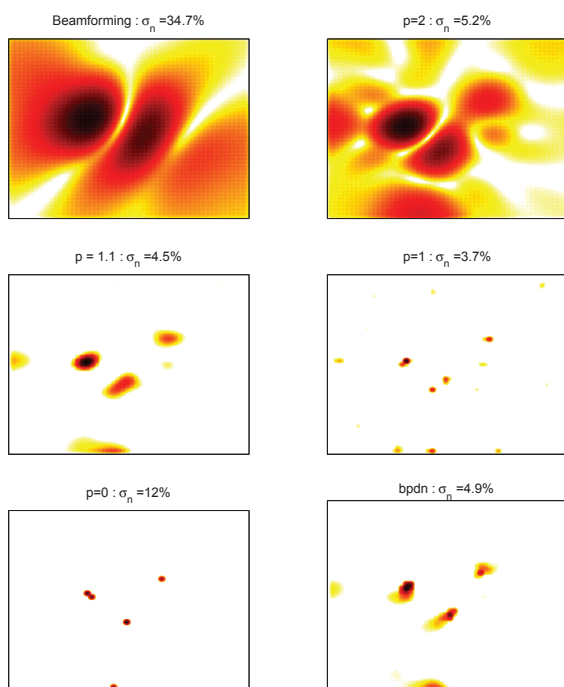


FIGURE 10 – Résultats expérimentaux : Identification de 3 monopoles corrélés, 980Hz. Dynamique : 30dB.

(erreur de 4.5% légèrement inférieure à l'erreur obtenue avec la régularisation de Tikhonov ( $p = 2$ )). Ce résultat est assez proche de la sortie de l'algorithme BPDN, qui converge vers une image assez similaire pour un temps de calcul significativement plus rapide.

### 3 Conclusion

Le travail présenté dans cette communication a pour principal intérêt de formaliser différentes méthodes d'identification de sources acoustiques dans un cadre unifié bayésien. Le choix de la densité de probabilité a priori de la source apparaît comme un levier permettant d'introduire plus ou moins de parcimonie sur la source identifiée. Les résultats numériques et expérimentaux ont montré que même s'il semblait possible d'imposer le niveau de parcimonie de la source recherchée de manière continue, via le paramètre  $p$  de la norme  $L_p$ , le

résultat montre un caractère relativement discontinu, avec une reconstruction "étendue" pour la minimisation de la norme  $L_p$  avec  $p > 1$  et "parcimonieuse" pour la minimisation de la norme  $L_p$  avec  $p < 1$ . Les résultats obtenus pour  $p$  proche de 1 se sont révélés assez proches du résultat obtenu par approches de minimisation de la norme  $L_1$  classiques type BPDN, au prix d'un temps de calcul significativement plus long.

### Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein du Labex CeLyA de l'Université de Lyon, géré par l'Agence Nationale de la Recherche (ANR-10-LABX-0060/ ANR-11-IDEX-0007).

### Références

- [1] J. Billingsley and R. Kinns. The acoustic telescope. *Journal of Sound and Vibration*, 48(4), 1976.
- [2] Q. Leclere. Acoustic imaging using underdetermined inverse approaches : Frequency limitations and optimal regularization. *Journal of Sound and Vibration*, 321 :605–619, 2009.
- [3] Y. Kim and P.A. Nelson. Optimal regularisation for acoustic source reconstruction by inverse methods. *Journal of Sound and Vibration*, 275, 2004.
- [4] J. Antoni. A bayesian approach to sound source reconstruction : Optimal basis, regularization, and focusing. *Journal of the Acoustical Society of America*, 131(4) :2873–2890, 2012.
- [5] Antonio Pereira. *Acoustic imaging in enclosed spaces*. PhD thesis, INSA Lyon, 2013.
- [6] Ning Chu, Ali Mohammad-Djafari, José Picheral, and Nicolas Gac. An invariant convolution model and its Variational Bayesian Approximation approach via Students-t priors for acoustic imaging in colored noises. In *Proceedings of the 21st International Congress on Acoustics*, volume 19, page 055031 (9pages), Montreal, Canada, June 2013.
- [7] Fabian Sinz, Sebastian Gerwinn, and Matthias Bethge. Characterization of the  $p$ -generalized normal distribution. *Journal of Multivariate Analysis*, 100(5) :817 – 820, 2009.
- [8] Antoine Peillot. *Imagerie acoustique par approximations parcimonieuses des sources*. These, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, November 2012.
- [9] E Chouzenoux, S Moussaoui, and J Idier. Majorize-minimize linesearch for inversion methods involving barrier function optimization. *Inverse Problems*, 28(6) :065011, 2012.
- [10] Ning Chu, Ali Mohammad-Djafari, José Picheral, and Nicolas Gac. A robust super-resolution approach with sparsity constraint in acoustic imaging. *Applied Acoustics*, 76(0) :197 – 208, 2014.

- [11] Patrice Simard and Jerome Antoni. Acoustic source identification : Experimenting the l1 minimization approach. *Applied Acoustics*, 74(7) :974 – 986, 2013.
- [12] E. van den Berg and M. P. Friedlander. Probing the pareto frontier for basis pursuit solutions. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 31(2) :890–912, 2008.
- [13] E. van den Berg and M. P. Friedlander. SPGL1 : A solver for large-scale sparse reconstruction, June 2007. <http://www.cs.ubc.ca/labs/scl/spgl1>.