



## **Identification d'Excitations Dynamiques sur des Plaques en Flexion par la Méthode des Champs Virtuels**

A. Berry<sup>a,b</sup>, O. Robin<sup>a,b</sup> et F. Pierron<sup>c</sup>

<sup>a</sup>GAUS, Faculté de Génie Mécanique, 2500, boulevard de l'Université, Sherbrooke, QC, Canada J1K 2R1

<sup>b</sup>Centre for Interdiscipl. Research in Music Media and Technology, 527 Sherbrooke St. West, Montreal, QC, Canada H3A 1E3

<sup>c</sup>Faculty of Engineering and the Environment, University of Southampton, SO17 1BJ Southampton, UK  
olivier.robin@usherbrooke.ca

Cette étude vise l'identification de forces dynamiques transverses (localisées ou réparties) sur des plaques en flexion pure, à partir de la mesure de leur réponse vibratoire. À cette fin le principe des travaux virtuels est appliqué localement en utilisant des fonctions de déplacement virtuel par morceaux, de façon à remonter aux efforts dynamiques appliqués sur la surface de la structure. La méthode s'apparente à la " Force Analysis Technique " (FAT) mais n'utilise pas l'équation d'équilibre de la plaque. Elle requiert la connaissance du champ de déplacement transverse et de courbure de flexion sur l'ensemble de la structure. Des simulations numériques et des expériences basées sur une mesure de la réponse vibratoire par Vélocimétrie Laser Doppler ont été effectuées dans le cas de forces mécaniques ponctuelles ou de chargements acoustiques répartis. Les résultats confirment le potentiel de cette approche à localiser et quantifier précisément les excitations.

## 1 Introduction

L'identification des forces dynamiques exercées sur des structures élastiques est un problème pratique important en ingénierie. La méthode FAT (Force Analysis Technique), développée notamment par Guyader et Pézerat [1, 2] consiste à utiliser l'équation d'équilibre de plaques en flexion pour identifier les distributions de pression pariétales. Cette technique peut être alimentée par une mesure continue de la réponse vibratoire par Vélocimétrie Laser Doppler (VLD), et a l'avantage d'être indépendante des conditions aux limites de la structure. Une autre approche, développée par les mêmes auteurs, utilise plutôt une forme intégrale de l'équation d'équilibre de la structure [3, 4, 5], ce qui améliore partiellement la robustesse et la précision des résultats. Cette méthode a été appliquée à des poutres et des plaques.

En parallèle, Grédiac et Pierron ont utilisé le Principe des Travaux Virtuels pour identifier les paramètres mécaniques constitutifs de matériaux [6]. Ceci a conduit à l'élaboration de la Méthode des Champs Virtuels (VFM en anglais) [7]. Cette méthode n'a été testée que très récemment pour la reconstruction de distributions de chargements dynamiques (mécaniques ou acoustiques) sur des plaques en vibration. Cet article décrit brièvement la VFM dans un tel contexte, et présente quelques résultats numériques et expérimentaux.

## 2 Méthode des Champs Virtuels pour l'identification de chargements

### 2.1 Concepts généraux

On considère une plaque en flexion pure de surface  $S$ , soumise à un chargement transverse harmonique  $q(\mathbf{x}, t) = \tilde{q}(\mathbf{x}, \omega) \exp(j\omega t)$  [Pa], où  $\mathbf{x}$  désigne un point quelconque de  $S$ ,  $\omega$  est la pulsation et  $j = \sqrt{-1}$ . La réponse de la plaque implique deux quantités d'intérêt : le champ de déplacement transverse  $w(\mathbf{x}, t) = \tilde{w}(\mathbf{x}, \omega) \exp(j\omega t)$  [m] et le champ de courbure  $\mathbf{k}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, \omega) \exp(j\omega t)$  [ $m^{-1}$ ], qui dans le cas de flexion pure est donné par l'expression  $\tilde{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, \omega) = -\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right\}^T \tilde{w}(\mathbf{x}, \omega)$  ( $T$  dénote la transposition et  $x, y$  sont les coordonnées cartésiennes sur  $S$ ).

Les champs de déplacement et de courbure peuvent être mesurés par VLD ou par déflectométrie optique [8], par exemple. La VLD requiert l'intégration temporelle de la vitesse transverse pour construire le déplacement transverse, et une double dérivation spatiale des déplacements pour produire les courbures. Par contraste, la déflectométrie optique fournit une mesure directe de la pente de flexion

locale suivant  $x$  et  $y$  [8, 9]; en conséquence, des opérations de dérivation et d'intégration spatiales simples sont requises pour générer les courbures et les déplacements, respectivement. Dans cet article, la VLD à balayage est utilisée pour mesurer les champs de déplacement transverse et de courbure de flexion. L'objectif est d'extraire le chargement inconnu  $\tilde{q}(\mathbf{x}, \omega)$  étant donné des mesures de  $\tilde{w}(\mathbf{x}, \omega)$  et  $\tilde{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, \omega)$  et en supposant que les propriétés mécaniques de la plaque sont connues.

Le principe des travaux virtuels s'écrit [7]

$$\begin{aligned} & -\omega^2 h \int_S \rho w^v(\mathbf{x}) \tilde{w}(\mathbf{x}, \omega) d\mathbf{x} + \\ & \frac{h^3}{12} \int_S \mathbf{k}^{vT}(\mathbf{x}) \mathbf{Q}(\mathbf{x}, \omega) \tilde{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, \omega) d\mathbf{x} \\ & = \int_S w^v(\mathbf{x}) \tilde{q}(\mathbf{x}, \omega) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (1)$$

où  $\rho$  est la masse volumique de la plaque,  $h$  est son épaisseur,  $\mathbf{Q}$  est la matrice élastique  $3 \times 3$ , et  $w^v(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{k}^v(\mathbf{x})$  sont des champs de déplacements et de courbures *virtuelles*. Le déplacement virtuel dans l'équation (1) est une fonction  $C^1$  sur  $S$ ; de plus, si cette fonction est choisie comme étant cinématiquement admissible, le travail des efforts sur le contour de la plaque s'annule dans l'équation (1). À titre d'exemple, si la plaque est encastrée, les déplacements et pentes virtuelles doivent être nulles sur la frontière pour éliminer les efforts tranchants et moments de flexion aux limites.

Les pertes structurales sont introduites par la suite dans l'équation (1) par le biais d'une matrice élastique complexe,  $\tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{x}, \omega) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, \omega) + j\omega \mathbf{C}(\mathbf{x}, \omega)$ , où  $\mathbf{C}$  est la matrice d'amortissement  $3 \times 3$  de la plaque. L'équation (1) est utilisée dans la suite pour extraire  $\tilde{q}$  étant donné des mesures de  $\tilde{w}(\mathbf{x}, \omega)$  et  $\tilde{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, \omega)$ , et un choix approprié de champs virtuels  $w^v(\mathbf{x})$  et  $\mathbf{k}^v(\mathbf{x})$ .

### 2.2 Champs virtuels

Dans ce travail, les champs virtuels sont choisis comme des fonctions par morceaux sur  $S$ . Le champ virtuel prend des valeurs non nulles sur une fenêtre rectangulaire  $S_v = [a_x \ b_x] \times [a_y \ b_y]$  de la plaque (figure 1), et est nul ailleurs. Le support  $S_v$  sera appelé fenêtre virtuelle par la suite. Pour éliminer comme inconnues les efforts tranchants et moments de flexion sur le contour de  $S_v$ , les champs de déplacements et de pentes virtuels doivent s'annuler sur ce contour. Le déplacement virtuel choisi est basé sur les fonctions d'interpolation Hermite16 utilisées dans la méthode des éléments finis [7]. Au total, 9 noeuds sont définis sur la fenêtre virtuelle, divisant celle-ci en 4 quadrants. Dans le système de coordonnées locales

de chaque quadrant  $-1 \leq \xi_1 \leq +1, -1 \leq \xi_2 \leq +1$ , les déplacements virtuels sur le quadrant  $ij$  (figure 1) sont définis par :

$$w_{ij}^v(x, y) = H_{3-j}^0(\xi_1)H_{3-i}^0(\xi_2) \quad (2)$$

où  $H_1^0(\xi_1) = \frac{1}{4}(2 + \xi)(1 - \xi)^2$ ,  $H_2^0(\xi_1) = \frac{1}{4}(2 - \xi)(1 + \xi)^2$  sont les polynômes de Hermite,  $\xi_1 = \frac{4x}{b_x - a_x} + c_1$ ,  $\xi_2 = \frac{4y}{b_y - a_y} + c_2$  et  $c_1, c_2$  sont des constantes définies pour chaque quadrant. Les courbures associées à ces déplacements virtuels s'expriment simplement à partir des polynômes de Hermite et de leurs dérivées spatiales. Les déplacements virtuels et courbures virtuelles correspondants sont illustrés à la figure 2. On constate bien que les déplacements et pentes virtuels sont nuls sur le contour de la fenêtre virtuelle et que le déplacement virtuel est unitaire au noeud central.

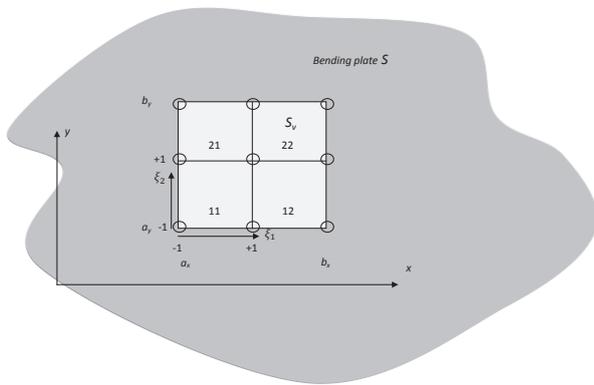


FIGURE 1 – Plaque en flexion pure  $S$  et fenêtre virtuelle  $S_v$ .

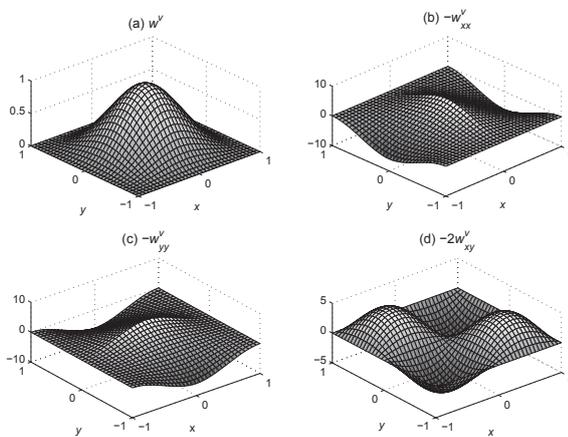


FIGURE 2 – Champs virtuels Hermite16, (a) : déplacement virtuel  $w^v(x, y)$  et courbure virtuelle (b) :  $k_1 = -\frac{\partial^2 w^v(x, y)}{\partial x^2}$ , (c) :

$$k_2 = -\frac{\partial^2 w^v(x, y)}{\partial y^2}, \text{ (d) : } k_6 = -2\frac{\partial^2 w^v(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

Une fois les champs virtuels définis sur  $S_v$ , l'équation (1) peut être utilisée pour extraire le chargement  $\tilde{q}(\mathbf{x}, \omega)$ ; l'intégration sur  $S$  est maintenant restreinte à la fenêtre virtuelle  $S_v$ ,

$$-\omega^2 h \int_{S_v} \rho w^v(\mathbf{x}) \tilde{w}(\mathbf{x}, \omega) d\mathbf{x} + \frac{h^3}{12} \int_{S_v} \mathbf{k}^{vT}(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{x}, \omega) \tilde{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, \omega) d\mathbf{x}$$

$$= \int_{S_v} w^v(\mathbf{x}) \tilde{q}(\mathbf{x}, \omega) d\mathbf{x}. \quad (3)$$

L'équation ci-dessus peut être utilisée pour des fenêtres virtuelles de petite taille décrivant l'ensemble de la plaque, de façon à déterminer  $\tilde{q}$  sur  $S$ . Si le chargement  $\tilde{q}(\mathbf{x}, \omega)$  est résolu comme une pression uniforme  $\tilde{q}(\omega)$  sur la fenêtre virtuelle, le terme de droite de l'équation 3 devient  $\int_{S_v} w^v(\mathbf{x}) \tilde{q}(\mathbf{x}, \omega) d\mathbf{x} = \tilde{q}(\omega) \int_{S_v} w^v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \tilde{q}(\omega) \frac{(b_x - a_x)(b_y - a_y)}{4}$ . Si le chargement  $\tilde{q}(\mathbf{x}, \omega)$  est résolu comme une force ponctuelle  $\tilde{f}(\omega)$  appliquée au centre  $\mathbf{x}_c$  de la fenêtre virtuelle, alors  $\int_{S_v} w^v(\mathbf{x}) \tilde{q}(\mathbf{x}, \omega) d\mathbf{x} = \int_{S_v} w^v(\mathbf{x}) \tilde{f}(\omega) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c) d\mathbf{x} = \tilde{f}(\omega)$  puisque  $w^v(\mathbf{x}_c) = 1$ .

### 3 Simulations numériques

On considère dans cette section un panneau rectangulaire, simplement supporté de dimensions  $0.48 \text{ m} \times 0.42 \text{ m}$  et épaisseur  $h = 3.19 \text{ mm}$ , en aluminium (facteur de perte  $\eta = 4 \times 10^{-3}$ ). Les déplacements transverses et courbures de flexion sont calculés sur un maillage de  $49 \times 43$  points équi-répartis (séparation de  $1 \text{ cm}$  dans les 2 directions) par développement sur la base des modes propres de la plaque pour divers chargements.

Le principe des travaux virtuels, équation (3), est ensuite appliqué; le travail des forces inertielles et élastiques à gauche de l'équation (3) est calculé par intégration numérique sur des fenêtres virtuelles successives  $S_v$  balayant l'ensemble de la surface de la plaque. Comme la fenêtre virtuelle peut couvrir seulement quelques points de maillage de la plaque, il est généralement nécessaire de sur-échantillonner  $S_v$ , évaluer le champ virtuel  $w^v, \mathbf{k}^v$  et interpoler la réponse de la plaque  $w, \mathbf{k}$  sur ce maillage raffiné avant de procéder à l'intégration numérique sur  $S_v$ . Les résultats numériques qui suivent ont été obtenus pour un facteur de sur-échantillonnage de 6 et une intégration par la méthode des trapèzes.

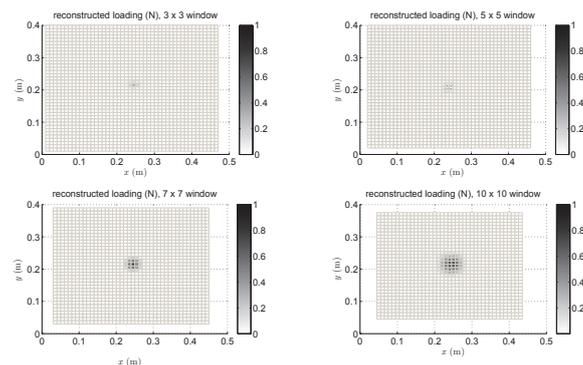


FIGURE 3 – Plaque excitée en son centre par une force ponctuelle de  $1 \text{ N}$  à  $1.1 \text{ kHz}$ ; amplitude de la force reconstruite au centre de chaque fenêtre virtuelle, pour différentes tailles de fenêtres virtuelles, (a) :  $3 \times 3$  éléments; (b) :  $5 \times 5$  éléments; (c) :  $7 \times 7$  éléments; (d) :  $10 \times 10$  éléments.

La figure 3 montre l'extraction du chargement lorsque la plaque est excitée par une force ponctuelle de  $1 \text{ N}$  au centre de la plaque, à une fréquence de  $1.1 \text{ kHz}$ . La plaque étudiée a sa première fréquence naturelle à  $77 \text{ Hz}$ ; une fréquence de  $1.1 \text{ kHz}$  correspond à une excitation hors-résonance

pour laquelle plusieurs modes d'ordre relativement élevé participent à la réponse vibratoire. Le chargement est résolu comme une force ponctuelle au centre de chaque fenêtre virtuelle, pour différentes tailles de fenêtres virtuelles ( $3 \times 3$  éléments,  $5 \times 5$  éléments,  $7 \times 7$  éléments,  $10 \times 10$  éléments). De façon générale, la méthode prédit correctement la position et l'amplitude de la force. La taille de la zone excitée correspond sensiblement à la taille de la fenêtre virtuelle utilisée. L'amplitude de la force reconstruite tend à être sous-estimée pour des fenêtres virtuelles de petite taille, en raison d'erreurs dans l'intégration numérique sur  $S_v$  dans l'équation (3) : les amplitudes de force identifiées au centre de la plaque pour des fenêtres virtuelles  $3 \times 3$ ,  $5 \times 5$ ,  $7 \times 7$ ,  $10 \times 10$  sont de 0.33 N, 0.79 N, 0.95 N, 0.89 N, respectivement. Ces résultats sont remarquablement indépendants de la fréquence d'excitation (incluant les cas statique et de résonance d'un mode), en particulier en termes de la taille de la zone de chargement identifiée, même si les déplacements et courbures de flexion sont très différents.

Dans le but d'évaluer le potentiel de la méthode à identifier des chargements distribués, on envisage à la figure 4 le cas d'une excitation par une onde acoustique plane  $\exp(jk_0 \cos(\pi/6)x + jk_0 \sin(\pi/6)y + j\omega t)$ . La fréquence d'excitation est de nouveau fixée à 1.1 kHz,  $k_0 = \frac{\omega}{c_0}$  est le nombre d'onde acoustique et  $c_0 = 343$  m/s est la vitesse du son. Dans cette situation, l'excitation est résolue comme une pression uniforme sur chaque fenêtre virtuelle. La méthode fournit une excellente identification du chargement, que ce soit en amplitude ou en phase (l'amplitude du chargement reconstruit est de 0.96 Pa, alors que l'amplitude exacte est 1 Pa). L'identification du chargement s'avère légèrement meilleure pour l'excitation acoustique que pour le chargement concentré parce que les champs de déplacement et de courbures sont spatialement plus lisses, ce qui rend plus précise l'intégration numérique sur les fenêtres virtuelles.

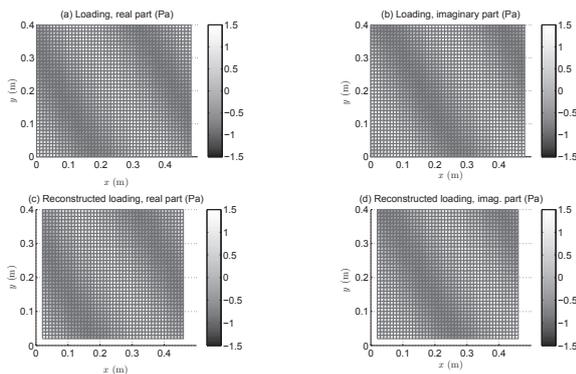


FIGURE 4 – Plaque excitée par une onde acoustique plane  $\exp(jk_0 \cos(\pi/6)x + jk_0 \sin(\pi/6)y)$  at 1.1kHz. (a), (b) : parties réelle et imaginaire de la pression exacte ; (c) and (d) : parties réelle et imaginaire de la pression reconstruite, pour une fenêtre virtuelle  $5 \times 5$ .

La VFM pour l'identification de chargement requiert que les paramètres et en particulier les propriétés mécaniques de la structure soient connus *a priori*. Cette contrainte est importante pour des structures aux propriétés mécaniques complexes, éventuellement anisotropes ou non-homogènes. Il est cependant possible d'envisager comme étape préalable l'application de la VFM avec une excitation contrôlée,

pour l'extraction des paramètres mécaniques [10, 11, 8]. La figure 5 explore à titre d'exemple l'effet d'un biais  $b$  sur le module d'Young dans l'application du principe des travaux virtuels,  $E_b = bE$ , où  $E$  est le module d'Young utilisé dans la simulation directe de la réponse vibratoire, et  $E_b$  est le module utilisé dans l'équation 3. La figure 5 illustre l'effet d'une sur-estimation de 10 %, une sur-estimation de 50 % et une sous-estimation de 50 % dans le cas d'une fenêtre virtuelle  $7 \times 7$ . Le biais dégrade clairement la cartographie du chargement et accroît l'erreur de quantification de la force, sans affecter significativement la position identifiée : la force reconstruite au centre de la plaque pour  $b = 1$ ,  $b = 1.1$  (10% de sur-estimation),  $b = 1.5$  (50 % de sur-estimation),  $b = 0.67$  (50 % de sous-estimation) sont 0.95 N, 1.09 N, 1.62 N, 0.5 N, respectivement. Il apparaît que l'erreur sur  $E$  se répercute presque linéairement sur la quantification du chargement. Des tendances similaires ont été observées pour une réponse statique ou résonante de la plaque : une sur-estimation du module d'Young de la plaque conduit à une sur-estimation de la charge appliquée.

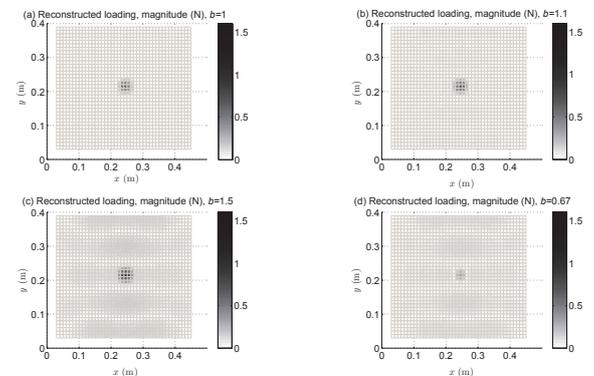


FIGURE 5 – Plaque excitée en son centre par une force ponctuelle de 1 N à 1.1 kHz ; amplitude de la force reconstruite au centre de chaque fenêtre virtuelle, pour différents biais  $b$  sur le module d'Young de la plaque ; (a)  $b = 1$  ; (b)  $b = 1.1$  ; (c)  $b = 1.5$  ; (d)  $b = 0.67$ .

## 4 Expériences

### 4.1 Protocole expérimental

La Méthode des Champs Virtuels a été mise en oeuvre expérimentalement à partir de champs de déplacements et de courbure issus de mesure par VLD à balayage. Un panneau rectangulaire en aluminium ayant des propriétés identiques à celui simulé dans la section précédente, a été monté en conditions de simple appui dans un cadre rigide en acier. Le panneau a été inséré dans un baffle en contreplaqué de 4 pieds  $\times$  4 pieds et d'un pouce d'épaisseur et installé dans une chambre anéchoïque ; ces conditions assurent des conditions de demi-espace de chaque côté du panneau. Un facteur de perte moyen  $\eta = 4 \times 10^{-3}$  a été estimé par la méthode de la largeur de bande à -3 dB pour les quelques premières résonances de la plaque.

Trois cas d'excitations dynamiques ont été considérés dans les expériences : (i) un pot vibrant électrodynamique (Bruel&Kjaer 4810) connecté au panneau via une tête d'impédance (PCB 208C03) à la position  $x = 0.06$  m,

$y = 0.30$  m; (ii) une source acoustique de débit (source de débit LMS moyenne - haute fréquence) à la position  $x = 0.36$  m,  $y = 0.12$  m et à une faible distance  $z = 0.051$  m de la surface de la plaque; (iii) la même source de débit à la position  $x = -0.20$  m,  $y = 0.01$  m et à une distance plus importante  $z = 0.46$  m de la surface de la plaque. La figure 6 montre le montage expérimental dans les cas d'excitation par pot vibrant et par source acoustique de débit. Nous avons vérifié que cette source acoustique se comporte comme une source ponctuelle omnidirectionnelle dans la bande de fréquence 170 - 2000 Hz; sa terminaison est instrumentée par un capteur fournissant une mesure directe de son accélération volumique  $\ddot{Q}(\omega)$ . Sous l'hypothèse d'une source ponctuelle et en supposant que la propagation s'effectue dans un demi-espace avec condition de doublement de pression acoustique à la surface du panneau, la pression acoustique en tout point de la surface du panneau s'écrit

$$\tilde{q}(\mathbf{x}, \omega) = \rho_0 \frac{\exp(-jk_0 r)}{2\pi r} \ddot{Q}(\omega), \quad (4)$$

où  $\rho_0$  est la masse volumique de l'air,  $r$  est la distance entre la terminaison de la source et le point courant de la plaque  $\mathbf{x}$ . La décroissance sphérique en  $1/r$ , la directivité uniforme et l'exactitude de l'équation (4) ont été vérifiées par des mesures directes jusqu'à des distances de propagation aussi faibles que 3 cm [12]. Finalement, le champ de vitesse transverse du panneau a été mesuré sur un maillage régulier grâce à un vibromètre laser Doppler à balayage Polytec, pour un bruit blanc sur la bande 170 - 2000 Hz en entrée du pot vibrant ou de la source de débit. Ce maillage est de 37 points  $\times$  27 points dans le cas de l'excitation par pot vibrant ou par la source acoustique en champ proche, et il est de 45 points  $\times$  31 points pour la source acoustique en champ lointain.

La vitesse vibratoire mesurée en chaque point du maillage a été calculée dans le domaine fréquentiel par FFT et normalisée à chaque fréquence par la force appliquée par le pot vibrant ou par l'accélération volumique de la source acoustique; les résultats présentent par conséquent la réponse du panneau à une force ponctuelle de 1 N ou une accélération volumique de  $1 \text{ m}^3/\text{s}^2$  de la source acoustique. La vitesse transverse a été transformée en déplacement par division par  $j\omega$  à chaque fréquence et ce déplacement a été interpolé sur un maillage raffiné de  $49 \times 43$  points, puis lissé spatialement pour éliminer une partie du bruit de mesure en utilisant la fonction Matlab Gridfit<sup>1</sup>. Les courbures de flexion ont été ensuite calculées à partir de la version lissée du champ de déplacement en utilisant une simple règle de différentiation double à 3 points. L'étape de lissage du champ de déplacement mesuré s'avère cruciale pour obtenir un champ de courbure fiable en entrée de la méthode d'identification des chargements.

## 4.2 Résultats expérimentaux

### 4.2.1 Excitation mécanique

La figure 7 illustre les résultats expérimentaux dans le cas d'excitation de la plaque par pot vibrant au point  $x = 0.06$  m,  $y = 0.30$  m et à 3 fréquences : 400 Hz, 1100 Hz and 1900 Hz. Le champ de déplacement transverse

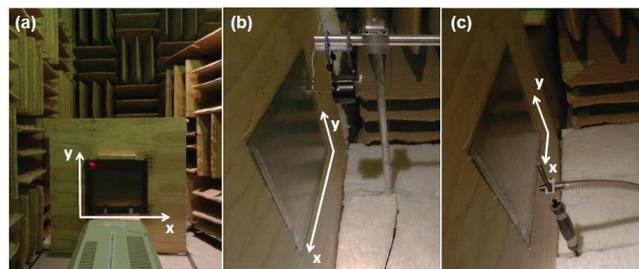


FIGURE 6 – Montage expérimental montrant le panneau bafflé en chambre anéchoïque et les axes de coordonnées ; (a) : mesure VLD, (b) : excitation par pot vibrant électrodynamique, (c) : excitation par source de débit volumique.

de la plaque sur le maillage de mesure de 37 points  $\times$  27 points issu de la mesure par VLD après division par  $j\omega$ , est également illustré aux 3 fréquences d'intérêt. Ces champs de déplacements révèlent la nature modale de la réponse de la plaque et, tels quels, ne permettent pas d'anticiper la position de l'excitation. On constate également que les longueurs d'onde vibratoires les plus faibles (à 1900 Hz) sont correctement capturées par le maillage de mesure. Même si les champs de déplacement représentés semblent spatialement lisses, un filtrage spatial passe-bas est nécessaire avant de générer le champ de courbure par différences finies. Le chargement reconstruit a été calculé à partir d'une fenêtre virtuelle mobile  $7 \times 7$ . La position du pot vibrant est correctement identifiée, et l'amplitude de la force (0.66 N à 400 Hz, 0.9 N à 1100 Hz et 0.96 N à 1900 Hz) est proche de la valeur réelle (1 N). On peut noter que la taille du point focal est essentiellement contrôlée par la taille de la fenêtre virtuelle, et n'augmente pas à mesure que la fréquence décroît. La sous-estimation notable de la force à 400 Hz est attribuable au lissage du champ de déplacement mesuré. Ce lissage doit être soigneusement fait pour filtrer le bruit de mesure tout en préservant les composantes utiles du champ de courbure afin d'identifier correctement le chargement. Ce compromis s'avère délicat dans les cas d'excitations concentrées car le champ de courbure varie fortement à proximité des excitations. De plus, à proximité immédiate du point de chargement, les hypothèses de Love-Kirchhoff sont en défaut, ce qui peut créer un biais dans l'identification de la force [13]. Une solution à ce problème est d'augmenter le nombre de points de mesure de façon à fournir une prédiction plus précise du champ de courbure par différences finies.

### 4.2.2 Excitation acoustique

Les figures 8 et 9 illustrent les résultats dans le cas d'une source acoustique en champ proche de la plaque. Ces résultats correspondent à des fréquences de 650 Hz et 1100 Hz extraites de la réponse large bande. Le chargement a été identifié à l'aide d'une fenêtre virtuelle mobile  $7 \times 7$ . La distribution théorique des pressions pariétales complexes, issue de l'équation (4) en supposant une source d'accélération volumique unitaire,  $\ddot{Q} = 1 \text{ m}^3/\text{s}^2$  est présentée aux figures 8 et 9 pour fin de comparaisons. On constate une bonne reconstruction de la structure spatiale du chargement acoustique par la méthode des champs virtuels. Par ailleurs, les amplitudes de pression reconstruites se comparent

1. <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/8998-surface-fitting-using-gridfit>.

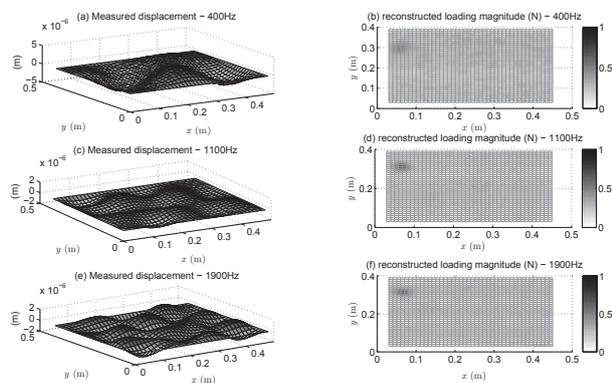


FIGURE 7 – Excitation mécanique par pot vibrant au point  $x = 0.06$  m,  $y = 0.30$  m. (a), (c), (e) Champ de déplacement de la plaque issu des mesures VLD à 400 Hz, 1100 Hz et 1900 Hz, respectivement ; (b), (d), (f) force reconstruite avec une fenêtre virtuelle  $7 \times 7$  à 400 Hz, 1100 Hz et 1900 Hz, respectivement.

raisonnablement bien aux prédictions théoriques. De façon générale, la réponse vibratoire de la plaque à des excitations acoustiques est un à deux ordres de grandeur plus faible que sous excitation mécanique, ce qui entraîne un bruit de mesure plus important et un calcul moins précis des champs de courbures par différences finies. En conséquence, les identifications d'efforts ont échoué en dessous de 500 Hz dans le cas d'un chargement acoustique.

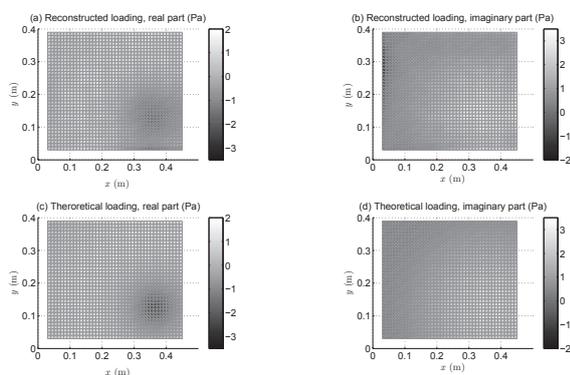


FIGURE 8 – Excitation acoustique par source de débit à 5.1 cm de la plaque, à 650 Hz. (a) pression reconstruite, partie réelle ; (b) pression reconstruite, partie imaginaire ; (c) pression calculée, Eq. (4), partie réelle ; (d) pression calculée, Eq. (4), partie imaginaire. Une fenêtre virtuelle mobile  $7 \times 7$  a été utilisée en (a) et (b).

Dans le cas de la source de débit à plus grande distance de la plaque ( $z = 0.46$  m), la réponse vibratoire de celle-ci est plus faible, ce qui crée un bruit de mesure proportionnellement plus grand. Un maillage de mesure plus raffiné, de 45 points  $\times$  31 points a donc été utilisé dans ce cas pour la mesure VLD. Les figures 10, 11 et 12 montrent la reconstruction du chargement acoustique en utilisant une fenêtre virtuelle  $7 \times 7$  aux fréquences de 650 Hz, 1100 Hz and 1900 Hz, respectivement. On présente également la comparaison avec les résultats issus de la fonction de Green théorique en demi-espace, équation (4), en supposant une accélération volumique unitaire,  $\ddot{Q} = 1$  m<sup>3</sup>/s<sup>2</sup>.

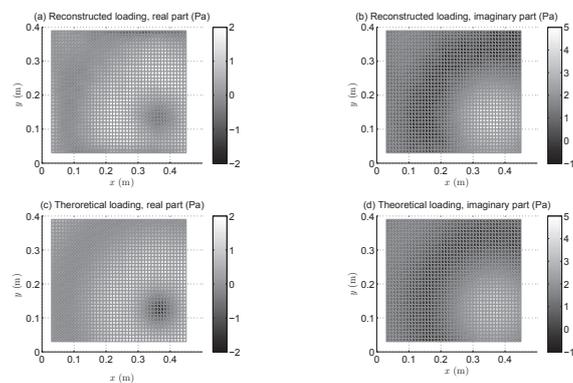


FIGURE 9 – Excitation acoustique par source de débit à 5.1 cm de la plaque, à 1100 Hz. (a) pression reconstruite, partie réelle ; (b) pression reconstruite, partie imaginaire ; (c) pression calculée, Eq. (4), partie réelle ; (d) pression calculée, Eq. (4), partie imaginaire. Une fenêtre virtuelle mobile  $7 \times 7$  a été utilisée en (a) et (b).

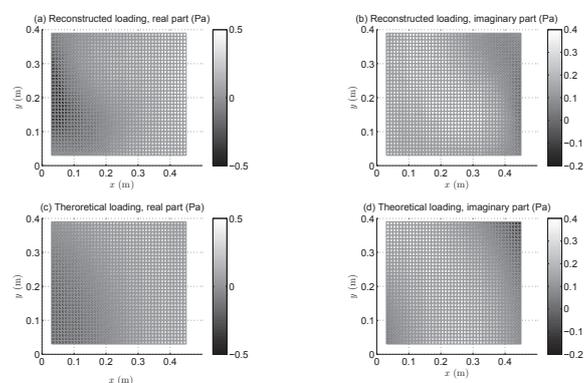


FIGURE 10 – Excitation acoustique par source de débit à 46 cm de la plaque, à 650 Hz. (a) pression reconstruite, partie réelle ; (b) pression reconstruite, partie imaginaire ; (c) pression calculée, Eq. (4), partie réelle ; (d) pression calculée, Eq. (4), partie imaginaire. Une fenêtre virtuelle mobile  $7 \times 7$  a été utilisée en (a) et (b).

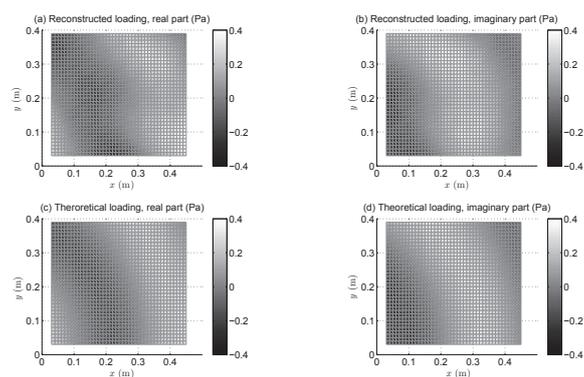


FIGURE 11 – Excitation acoustique par source de débit à 46 cm de la plaque, à 1100 Hz. (a) pression reconstruite, partie réelle ; (b) pression reconstruite, partie imaginaire ; (c) pression calculée, Eq. (4), partie réelle ; (d) pression calculée, Eq. (4), partie imaginaire. Une fenêtre virtuelle mobile  $7 \times 7$  a été utilisée en (a) et (b).

Les résultats démontrent de nouveau une reconstruction

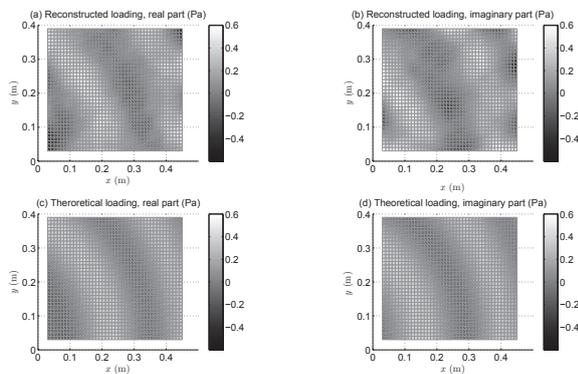


FIGURE 12 – Excitation acoustique par source de débit à 46 cm de la plaque, à 1900 Hz. (a) pression reconstruite, partie réelle ; (b) pression reconstruite, partie imaginaire ; (c) pression calculée, Eq. (4), partie réelle ; (d) pression calculée, Eq. (4), partie imaginaire. Une fenêtre virtuelle mobile  $7 \times 7$  a été utilisée en (a) et (b).

convaincante du chargement acoustique, à la fois en amplitude et en phase. De façon générale, les amplitudes de pression reconstruites sont légèrement sur-estimées et les cartographies de pression sont plus bruitées que dans la situation de la source en champ proche, en raison des vitesses vibratoires mesurées plus faibles.

## 5 Conclusions

Ce travail concerne l'identification d'efforts dynamiques transverses à la surface d'une plaque mince en flexion. Les conclusions suivantes peuvent être formulées :

L'utilisation du principe des travaux virtuels sur la base de champs virtuels définis sur une fenêtre glissante permet l'identification de la distribution d'efforts sur la plaque. Il est à noter que l'obtention des cartographies d'efforts à une fréquence donnée est rapide (typiquement quelques secondes sur un PC).

La simulation numérique de reconstruction des efforts fournit en général d'excellents résultats en termes de localisation et de quantification des efforts. L'identification du chargement s'avère légèrement meilleure pour des excitations réparties parce que les champs de déplacement et de courbures sont spatialement plus lisses, ce qui rend plus précise l'intégration numérique sur les fenêtres virtuelles.

Une validation expérimentale a été menée par mesure VLD du champ de vitesse transverse d'un panneau excité mécaniquement ou acoustiquement. Les résultats expérimentaux sont cohérents avec ceux issus des simulations numériques. La méthode demande éventuellement un maillage de mesure fin de la réponse vibratoire de la structure, ce qui peut devenir fastidieux dans le cas d'une mesure par VLD à balayage. La déflectométrie optique a l'avantage de fournir une mesure simultanée de la réponse vibratoire sur l'ensemble de la structure, avec une résolution spatiale très fine. Cette possibilité fait l'objet de travaux actuellement en cours par les auteurs.

## Références

- [1] C. Pézerat. *Méthode d'identification des efforts appliqués sur une structure vibrante par résolution et régularisation du problème inverse [Identification of Forces Applied to a Vibrating Structure by the Resolution and Regularisation of the Inverse Problem]*. PhD thesis, INSA Lyon, 1996. in French.
- [2] C. Pézerat and J.-L. Guyader. Identification of vibration sources. *Applied Acoustics*, 61 :309–324, 2000.
- [3] S. Chesne. *Identification d'efforts aux limites des poutres et plaques en flexion par méthode indirecte [Identification of boundary forces in flexural beams and plates by an indirect method]*. PhD thesis, INSA Lyon, 2006. in French.
- [4] S. Chesne, C. Pézerat, and J.-L. Guyader. Identification of boundary forces in beams from measured displacements. *Journal of Vibration and Acoustics*, 128(4) :491–507, 2006.
- [5] S. Chesne, C. Pézerat, and J.-L. Guyader. Identification of plate boundary forces from measured displacements. *Journal of Vibration and Acoustics*, 130(4), 2008. art. no. 041006.
- [6] M. Grédiac. Principe des travaux virtuels et identification [principle of virtual work and identification]. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 309 :1–5, 1989. In French with abridged English version.
- [7] F. Pierron and M. Grédiac. *The Virtual Fields Method*. Springer, New-York, 2012.
- [8] A. Giraudeau, B. Guo, and F. Pierron. Stiffness and damping identification from full field measurements on vibrating plates. *Experimental Mechanics*, 46(6) :777–787, 2006.
- [9] C. Devivier, F. Pierron, and M.R. Wisnom. Damage detection in composite materials using full-field slope measurements. *Composites Part A*, 43 :1650–1666, 2012.
- [10] A. Giraudeau and F. Pierron. Simultaneous identification of stiffness and damping properties of isotropic materials from forced vibrating plates. *Comptes Rendus Mécanique*, 331(4) :259–264, 2003.
- [11] A. Giraudeau and F. Pierron. Identification of stiffness and damping properties of thin isotropic vibrating plates using the virtual fields method. theory and simulations. *Journal of Sound and Vibration*, 284(3-5) :757–781, 2005.
- [12] O. Robin, A. Berry, S. Moreau, and S. Campeau. Experimental reproduction of random pressure fields for vibroacoustic testing of plane panels (paper 2013-2027). In *19th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (34th AIAA Aeroacoustics Conference)*, Berlin, Germany, May 2013.
- [13] C. Devivier, F. Pierron, and M.R. Wisnom. Damage detection in composite materials using deflectometry and the virtual fields method. *Composites Part A*, 48 :201–218, 2013.