



Simulation numérique 3D de la propagation d'ondes de choc acoustiques en atmosphère stratifiée avec écoulement

D. Luquet, F. Coulouvrat et R. Marchiano
Institut Jean le Rond d'Alembert-UPMC, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France
luquet@dalembert.upmc.fr

La simulation numérique de la propagation d'ondes de choc à travers une atmosphère réaliste tridimensionnelle est un défi. Elle intéresse de nombreuses applications en acoustique aérienne pour des sources géophysiques ou anthropiques. Nous présentons l'implémentation de la méthode dite FLHOWARD à 3 dimensions dans un code de calcul parallèle. Une équation des ondes scalaire non linéaire est résolue dans le cadre des méthodes unidirectionnelles. Cette équation inclut les effets de diffraction, d'absorption et les non-linéarités, la présence des hétérogénéités en densité et célérité du son du milieu de propagation, et enfin la présence d'un écoulement cisailé. La résolution numérique est effectuée à l'aide de la méthode du pas fractionné, qui consiste à découper le problème à résoudre en équations plus simples correspondant chacune à un effet physique. Ces équations sont résolues à l'aide d'une solution analytique quand cela est possible, et à l'aide de différences finies sinon. Le code de calcul est parallélisé en utilisant la bibliothèque MPI, par une approche de type décomposition de domaine 1D. Chaque partie du code est soigneusement validée sur des configurations dont la solution analytique est connue et qui seront présentées. Quelques exemples de propagation atmosphérique non linéaire illustreront finalement les capacités de l'algorithme.

1 Introduction

Les ondes des chocs sont phénomènes ayant de nombreuses origines : naturelles [1] (orages, météorites, volcans, ...) ou anthropiques (bang soniques [2], explosions civiles ou militaires). Ces ondes ont un spectre fréquentiel très étendu et se propagent généralement sur des distances grandes par rapport à leur longueur d'onde. Par conséquent, ce sont des phénomènes difficiles à simuler par des méthodes directes. Des calculs directs ont été réalisés sur des configurations 2D [3, 4] mais le coût devient prohibitif en 3D [5]. Les méthodes opérationnelles de type tracé de rayons permettent d'avoir un temps de rendu assez court pour faire des statistiques mais sont limitées dans le cas des zones d'ombre [6], des caustiques [7] et de la turbulence atmosphérique [8]. En conséquence une gamme de modèle intermédiaire a été développée, elle s'appuie sur la séparation du problème en deux ondes : une directe et une rétropropagée. Seule l'onde directe est résolue, on dit que l'on utilise un modèle "one-way". Les premiers types de modèles "one-way" reposaient sur l'approximation parabolique (équation KZK [9] en acoustique non-linéaire) et ont donné de bons résultats. Averyanov et al. [8] ont étendu la méthode pour la prise en compte d'un écoulement. Toutefois l'utilisation de l'approximation parabolique limite à de faibles angles de propagation. Christopher et Parker [10] puis Dagrau et al. [11] ont proposé une méthode permettant de retirer cette limitation angulaire. Le but de ce travail est d'étendre à trois dimensions la méthode FLHOWARD [12], qui permet de calculer la propagation non-linéaire d'une onde dans un milieu hétérogène à travers un écoulement cisailé sans limitation angulaire.

2 Modélisation

On utilise l'équation des ondes non-linéaire en milieu inhomogène avec présence d'écoulement donnée par [16].

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c_0^2} \frac{D_s^2 p_a}{Dt^2} - \rho_0 \nabla \cdot \left(\frac{\nabla p_a}{\rho_0} \right) + 2 \frac{dV_{0j}}{dz} \int_{-\infty}^t \frac{\partial^2 p_a(\mathbf{x}, t')}{\partial z \partial x_j} dt' \\ & = \frac{\beta}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2 p_a^2}{\partial t^2} + \frac{\delta}{c_0^4} \frac{\partial^3 p_a}{\partial t^3}. \end{aligned} \quad (1)$$

Dans cette équation, p_a représente la pression acoustique, c_0 , ρ_0 , β , δ la célérité du son, la masse volumique, le coefficient de non-linéarité et la diffusivité du son. $V_{0j}(z)$ est la vitesse d'un écoulement moyen verticalement cisailé suivant les

deux directions du plan horizontale $j = x, y$. La notation $D_s/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{V}_0 \cdot \nabla$ correspond à la dérivée convective associée à l'écoulement moyen cisailé.

La résolution de cette équation passe par plusieurs transformations. Tout d'abord, on introduit le temps retardé $\tau = t - x/\bar{c}_0$ qui permet de se placer dans un référentiel se déplaçant à la vitesse moyenne du son \bar{c}_0 dans la direction x qui est choisie comme direction principale de la propagation. Une approximation parabolique grand angle est appliquée sur les termes représentant les perturbations des hétérogénéités et de l'écoulement qui sont au moins un ordre de grandeur inférieur aux termes homogènes. Enfin, dans le but de traiter des ondes de choc, on utilise une formulation en pseudo-potential : $p_a(\mathbf{x}) = \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial t}$. En effet, contrairement à la pression, le pseudo-potential est continu à travers un choc. Finalement, on obtient une équation de la forme :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial \tau}(\mathbf{x}, \tau) = D\phi(\mathbf{x}, \tau) + H\phi(\mathbf{x}, \tau) + N\phi(\mathbf{x}, \tau) \quad (2)$$

où D est opérateur représentant les effets de diffraction, H les effets des hétérogénéités, de l'absorption et de l'écoulement et N les non-linéarités .

3 Résolution numérique

3.1 Schéma à pas fractionné

Cette équation est résolue à l'aide d'une méthode d'avancement en espace dans la direction x . Une méthode de pas fractionné, dite "split-step", permet de résoudre chaque partie de l'équation (2) séparément, le membre de gauche est commun et fait office de terme de couplage.

$$\phi(x_{i+1}, y, z, \tau) = \phi_{\Delta x}^D \circ \phi_{\Delta x}^H \circ \phi_{\Delta x}^N(x_i, y, z, \tau). \quad (3)$$

L'équation (3) donne la forme d'un split-step du premier ordre. L'opérateur $\phi_{\Delta x}^X$ est la solution de $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial \tau}(\mathbf{x}, \tau) = X\phi(\mathbf{x}, \tau)$ sur le pas Δx avec $X = D, H$ ou N . Dans le code un split-step du second ordre [13] est utilisé, il est de la forme :

$$\phi(x_{i+1}, y, z, \tau) = \phi_{\frac{\Delta x}{2}}^D \circ \phi_{\frac{\Delta x}{2}}^H \circ \phi_{\Delta x}^N \circ \phi_{\frac{\Delta x}{2}}^H \circ \phi_{\frac{\Delta x}{2}}^D(x_i, y, z, \tau). \quad (4)$$

3.2 Spectre angulaire

L'opérateur $\phi_{\Delta x}^D$ est résolu de manière unidirectionnelle à l'aide de la méthode du spectre angulaire [14]. On applique la transformée de Fourier sur le potentiel acoustique pour

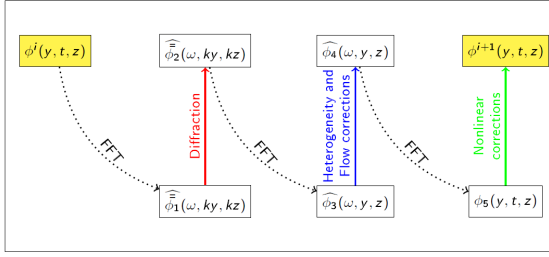


FIGURE 1 – Schéma à pas fractionné d'ordre 1

la variable temporelle et les directions transverses. Dans cet espace, la propagation se traduit par une équation différentielle du second ordre à coefficients constants que l'on peut résoudre analytiquement. Cette solution ne prend en compte qu'un seul sens de propagation : le champ rétro-diffusé est négligé. On revient ensuite à l'espace physique à l'aide d'une transformé de Fourier inverse :

$$F^{-1} \left[F(\phi(x_i, y, z, \tau)) \exp \left(\Delta x \left[ik - i \sqrt{k^2 - (k_y^2 + k_z^2)} \right] \right) \right]. \quad (5)$$

F représente une transformé de Fourier suivant (τ, y, z) . Cette transformé de Fourier impose des conditions aux limites périodiques. Elle peut être remplacée par une transformé en cosinus si l'on souhaite avoir des conditions aux limites de type Neumann ou par une transformé en sinus pour des conditions de type Dirichlet. En pratique, ces transformés sont implémentés à l'aide d'algorithmes de type FFT (Fast Fourier Transform).

3.3 Prise en compte de l'écoulement, des hétérogénéités et de l'absorption

Les effets d'un écoulement cisailé, des hétérogénéités du milieu et de l'absorption sont pris en compte via $\phi_{\Delta x}^H$ dans un sous split-step dans l'espace fréquentiel. Dans un premier temps, les termes ayant trait aux effets de déphasage sont traités de manière analytique :

$$\hat{\phi}(x_{i+1}, y, z, \omega) = \hat{\phi}(x_i, y, z, \omega) \exp \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\omega^2 \left[\frac{V_{0x}^2}{2c_0^3} - \frac{V_{0x}}{c_0^2} - \frac{c_0'}{c_0^2} \right] + \frac{i\omega}{2\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial x}}{i\omega \left[1 + \frac{V_{0x}}{c_0} \right] + \frac{c_0}{2\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial x}} dx \right). \quad (6)$$

Les termes restants sont discrétisés à l'aide de différences finies pour chaque fréquence. Les deux directions sont traitées séparément à l'aide d'une méthode de type ADI (Alternating Direction Implicit). Les schémas utilisés pour la discrétisation spatiale sont du second ordre. Pour l'avancement, un schéma implicite de type Crank-Nicolson d'ordre 2 est appliqué. Les matrices résultantes étant tridiagonales, elles sont résolues à l'aide de l'algorithme de Thomas. Enfin, le terme d'absorption est résolu de manière analytique de la même façon que les termes de déphasage.

$$\hat{\phi}(x_{i+1}, y, z, \tau) = \hat{\phi}(x_i, y, z, \tau) \exp \left(-\frac{\omega^2 \delta}{2c_0^3} \Delta x \right). \quad (7)$$

Des couches absorbantes sont utilisées pour modéliser une condition aux limites de type champs libre. Elles sont écrites sous la forme d'un terme d'atténuation analogue à l'Eq. (7) avec $\delta(y, z)$ variant avec la profondeur de la couche absorbante pour éviter une forte rupture d'impédance.

3.4 Méthode de Burgers-Hayes pour les non-linéarités

Pour résoudre $\phi_{\Delta x}^N$, on utilise la méthode de Burgers-Hayes [15]

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z, \tau) &= \max \left[\phi(x, y, z, \theta) - \frac{\beta \Delta x}{\bar{\rho}_0 \bar{c}_0^3} \left(\frac{\partial \phi(x, y, z, \theta)}{\partial \theta} \right) \right] \\ \tau &= \theta - \frac{\beta \Delta x}{\bar{\rho}_0 \bar{c}_0^3} \frac{\partial \phi(x, y, z, \theta)}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (8)$$

Cette méthode utilise la solution implicite de Poisson pour le potentiel. En cas de chocs, la solution devient multivaluée et la solution physique correspond à la valeur maximale du potentiel pour satisfaire le second principe de la thermodynamique.

3.5 Calcul parallèle et décomposition de domaine 1D

Bien que les méthodes "one-way" soient moins coûteuses que les méthodes directes, il est nécessaire, à la fois en raison du temps de calcul et de la consommation en mémoire, de s'orienter vers des méthodes de parallélisations sur architecture à mémoire distribuée. Le fait d'utiliser des transformés de Fourier dans l'algorithme impose qu'au moins une direction ne soit pas découpée lors de la décomposition de domaine du fait de la nature non locale de cette opération. Nous utilisons donc une décomposition de domaine 1D. Des transpositions permettent de changer la direction qui est locale à un processeur. En pratique, ces transpositions demandent un grand nombre de communications entre les processeurs et peuvent limiter le gain de performance. Les FFT et les transpositions sont implémentés en utilisant la bibliothèque FFTW [17]. Enfin, le sens des opérations dans le schéma à pas fractionné correspond à celui limitant le nombre de FFT et de transposés.

4 Validation

La méthode est validée sur différents problèmes "simples" pour lesquels une solution analytique est connue.

4.1 Piston acoustique en régime linéaire

En premier lieu, la propagation tridimensionnelle d'une onde linéaire en milieu homogène est validée à l'aide du piston circulaire harmonique linéaire (figure 2). Les paramètres du problème sont une fréquence de $f = 1$ MHz, une célérité du son $c_0 = 1500$ m/s et un rayon du piston égal à une longueur d'onde. La propagation s'effectue sur 0.25 m dans un domaine $y = [-0.7, 0.7]$ mètre et $z = [-0.7, 0.7]$ mètre soit environ 167λ avec des couches absorbantes de 0.2 m. Pour chaque direction (x, y, z, τ) on prend 1024 points. Le champ axial est comparé avec la solution analytique. Sur la figure 3, le résultat donné par le code de calcul FLHOWARD 3D et la solution analytique sont quasiment indiscernables.

4.2 Diffusion par une sphère hétérogène

La validation des effets d'une hétérogénéité s'effectue sur le cas d'une hétérogénéité en célérité du son de forme

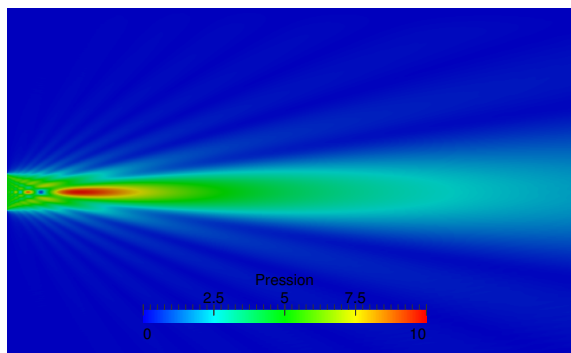


FIGURE 2 – Pression dans le plan (x, y) d'un piston acoustique 3D.

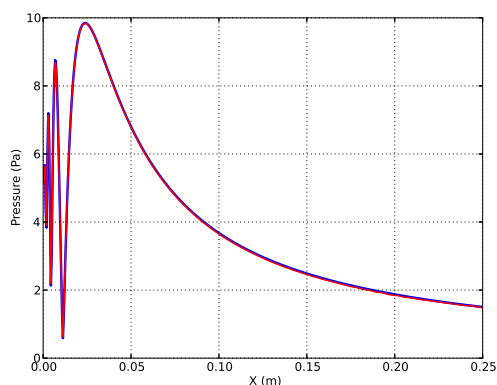


FIGURE 3 – Pression sur l'axe d'un piston acoustique 3D : comparaison entre la méthode FLHOWARD (rouge) et la solution analytique (bleu).

sphérique. Pour cette simulation, on utilise une onde de fréquence $f = 5$ Hz dans un milieu de célérité du son $c_0 = 340$ m/s et de densité $\rho_0 = 1.2 \text{ kg/m}^3$. L'hétérogénéité est de 5% en vitesse du son, soit une fluctuation en température de 34 °C supérieure à ce que l'on trouve dans l'atmosphère. Son rayon est de la taille d'une longueur d'onde. Un maillage grossier comportant 256 points dans chaque direction est utilisé. Le champs rétrodiffusé étant négligé, on n'observe pas d'oscillations sur la pression avant d'arriver sur l'hétérogénéité. Le champs diffusé par l'hétérogénéité est en assez bon accord avec la solution analytique avec une erreur de moins de 3 %.

4.3 Propagation non-linéaire dans un milieu thermovisqueux

Dans le but de valider et d'évaluer la performance de l'algorithme dans le cas d'une propagation non-linéaire dans un milieu visqueux, nous allons comparer une simulation FLHOWARD à la solution analytique de l'équation de Burgers donné par Mendousse [18]. Ce problème est défini par 2 nombres : le nombre de Gold'berg Γ qui caractérise le rapport entre effet non-linéaire et absorption et le paramètre de choc adimensionné σ . Dans notre cas nous prendrons $\Gamma = 50$ et nous propagerons l'onde jusqu'à $\sigma = 3$ donc trois fois la distance de choc, caractéristique d'un problème où les effets non-linéaires sont prépondérants. On utilise $N_\tau = 512$ points pour discrétiser l'onde. On peut observer une très bonne correspondance entre FLHOWARD et la solution

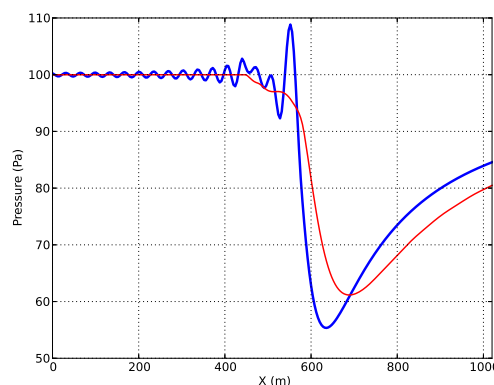


FIGURE 4 – Pression sur l'axe en présence d'une hétérogénéité de célérité du son sphérique : comparaison entre la méthode FLHOWARD (rouge) et la solution analytique (bleu).

analytique avec une erreur inférieure à 1%. La figure 5 (c) permet de justifier le choix d'un schéma à pas fractionné du second ordre.

4.4 Propagation dans un guide d'onde avec écoulement cisailé

La validation des effets d'un écoulement cisailé se fait dans le cas d'un guide d'onde bidimensionnel à paroi rigide de largeur $2L$. En $y = L$ et en $y = -L$ on impose une condition de paroi rigide $\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$ à l'aide de la transformé en cosinus. Un écoulement cisailé de type Poiseuille est imposé dans la conduite. On ne considère pas d'hétérogénéités, de non-linéarité ni d'absorption, ces différents effets ayant été validés dans les précédents cas. Une solution sous forme modale de l'équation Flhoward est cherchée à l'aide d'une méthode de tir [12]. On compare la vitesse de phase obtenue par la méthode de tir avec celle donnée par le présent code. La largeur de la conduite est $L = 1$ mètre, est on propage l'onde jusqu'à 1000 longueurs d'onde dans un milieu dont la célérité du son est 340 m/s. Le maillage choisi est $N_x = 2000$, $N_y = 512$ et $N_\tau = 256$ points. La figure 6 montre que l'erreur de dispersion reste très faible (moins de 1%) sur de longues distances de propagation et ce quelque soit l'angle du mode.

5 Propagation atmosphérique

Dans cette partie, nous présentons un premier cas d'application à de la propagation atmosphérique tridimensionnelle en présence d'un sol rigide. La source est une distribution spatiale gaussienne, sa forme temporelle est une onde en N dont la durée entre les deux chocs est 0.02 s. Elle est placée à une altitude $z = 10$ m. La vitesse du son et la densité sont constantes $c_0 = 340$ m/s et $\rho_0 = 1.2 \text{ kg/m}^3$. Le coefficient de non-linéarité est $\beta = 1.2$. Un écoulement représentant un fort vent est obtenu par la théorie de la similarité de Monin-Obukhov [19]. Cet écoulement est imposé dans le sens de la propagation. Le domaine numérique est $y = [-100, 100]$ m, $z = [0, 250]$ m avec une fenêtre temporelle $\tau = [-0.04, 0.06]$ s. L'onde est propagée sur $x_{max} = 1000$ m. Des couches absorbantes d'épaisseurs

$y_{abs}, z_{abs} = 50\text{m}$ sont présentes sur les bords du domaine de calcul et une condition de réflexion est appliquée en $z = 0$. Le maillage est $N_x = N_y = N_z = N_\tau = 1024$. On observe sur les figures 7 et 8 que la source est peu directionnelle dans les basses fréquences, de plus la météo n'a que peu d'effet. Les interférences dues à la présence du sol sont bien présentes. Pour les hautes fréquences, l'effet de guide d'onde dû à l'écoulement cisaillé est bien présent. La figure 9 présente une cartographie de la pression dans le plan (τ, z) . On observe des signaux piégés près du sol dus au guide d'onde. On observe également la périodicité du signal due au traitement spectral.

6 Conclusion

Une méthode permettant de simuler la propagation non-linéaire à travers un milieu inhomogène, thermovisqueux, avec écoulement cisaillé en trois dimensions a été implémentée. Elle a été validée sur différents cas et a montré de bons résultats. Une première application de propagation atmosphérique a été présentée, elle permet de bien identifier les phénomènes physiques attendus.

Remerciements

This work was performed within the Aerodynamic and Thermal Load Interactions with Lightweight Advanced Materials for High Speed Flight II (ATLLAS II) project investigating high-speed transport. ATLLAS II, coordinated by ESA-ESTEC, is supported by the EU within the 7th Framework Programme Priority, Contract no. ACP0-GA-2010-263913. More information on ATLLAS II can be found on www.esa.int/techresources/atllas

Le présent travail a également bénéficié du soutien financier de la Délégation Générale de l'Armement (DGA) - convention de cofinancement d'un Doctorant.

Références

- [1] A. Le Pichon, E. Blanc, A. Hauchecorne, *Infrasound monitoring for atmospheric studies*, Springer (2010).
- [2] K. J. Plotkin, State of the art of sonic boom modeling, *J. Acoust. Soc. Am* **111**, 530-536 (2002).
- [3] V. W. Sparrow, R. Raspet, A numerical method for general finite-amplitude wave propagation in 2 dimensions and its application to spark pulses, *J. Acoust. Soc. Am* **90**, 2683-2691 (1991).
- [4] G. Hanique-Cockenpot, Etude numérique de la propagation non linéaire des infrasons dans l'atmosphère, *Thèse de doctorat de l'Ecole Centrale de Lyon* (2011).
- [5] S. D. Pino, B. Després, P. F. Piserchia, 3D finite volume simulation of acoustic waves in the Earth atmosphere, *Computers & Fluids* **38**, 765-777 (2009).
- [6] F. Coulouvrat, Sonic boom in the shadow zone : a geometrical theory of diffraction, *J. Acoust. Soc. Am* **111**, 499-508 (2002).
- [7] R. Marchiano, F. Coulouvrat, R. Grenon, Numerical simulation of shock wave focusing at fold caustics, with application to sonic boom, *J. Acoust. Soc. Am* **114**, 1758-1771 (2003).
- [8] M. Averiyarov, P. Blanc-Benon, R. Cleveland, V. Khokhlova, Nonlinear and diffraction effects in propagation of N-waves in randomly inhomogeneous moving media, *J. Acoust. Soc. Am* **129**, 1760-1772 (2011).
- [9] V. P. Kuznetsov, Equations of nonlinear acoustics, *Sov. Phys. Acoust.* **16**, 467-470 (1970).
- [10] T. Christopher, K. Parker, New approaches to nonlinear diffractive field propagation, *J. Acoust. Soc. Am* **90**, 488-499 (1991).
- [11] F. Dagrau, M. Rénier, R. Marchiano, F. Coulouvrat, Acoustic shock wave propagation in a heterogeneous medium : A numerical simulation beyond the parabolic approximation, *J. Acoust. Soc. Am* **130**, 20-32 (2011).
- [12] L. J. Gallin, M. Rénier, E. Gaudard, R. Marchiano, F. Coulouvrat, T. Farges, One-way approximation for the simulation of weak shock wave propagation in atmospheric flows, accepté pour publication à *J. Acoust. Soc. Am* le 11 mars 2014, sous presse.
- [13] G. Strang, On the construction and comparison of difference schemes, *SIAM J. Numer. Anal.* **5**, 506-517 (1968).
- [14] J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, McGraw-Hill (1968).
- [15] F. Coulouvrat, A quasi-analytical shock solution for general nonlinear progressive waves, *Wave Motion* **46**, 97-107 (2011).
- [16] F. Coulouvrat, New equations for nonlinear acoustics in a low Mach number and weakly heterogeneous atmosphere, *Wave Motion* **49**, 50-63 (2012).
- [17] <http://www.fftw.org/>
- [18] M. F. Hamilton, D. T. Blackstock, *Nonlinear Acoustics*, Acoustical Society of America, Melville (2008).
- [19] V. E. Ostashev, M. V. Scanlon, D. K. Wilson, S. N. Vecherin, Source localization from an elevated acoustic sensor array in a refractive atmosphere, *J. Acoust. Soc. Am* **124**, 3413-3420 (2008).

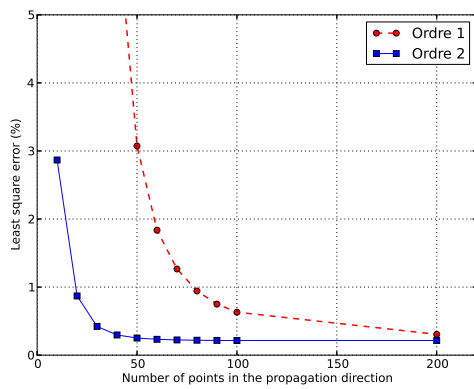
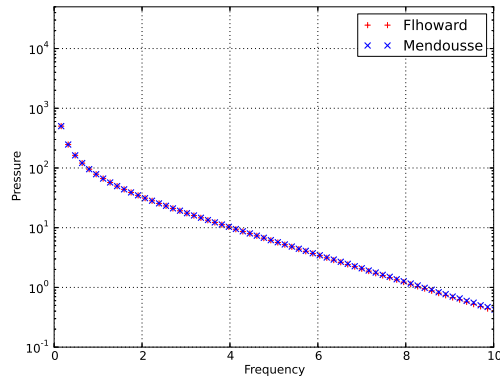
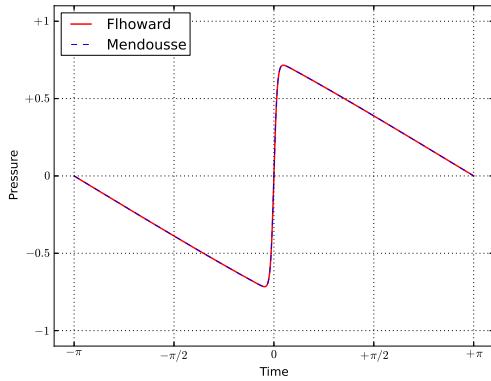


FIGURE 5 – Propagation non-linéaire d’une onde plane dans un milieu visqueux : (a) Comparaison avec la solution analytique de Mendousse, (b) comparaison des spectres correspondants, (c) effets de la discrétisation et du schéma à pas fractionné sur l’erreur.

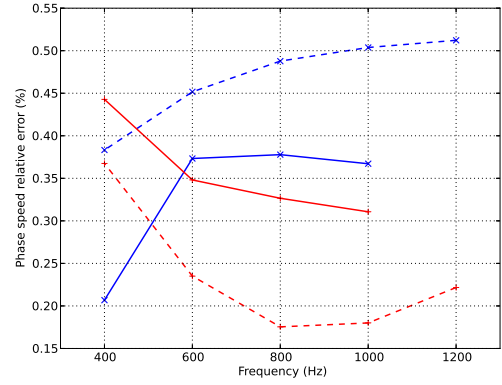


FIGURE 6 – Erreur relative de dispersions pour un écoulement de Poiseuille. $M = 0.1$ en traits discontinus et $M = -0.1$ en traits continus. Mode 1 en bleu et 4 en rouge.

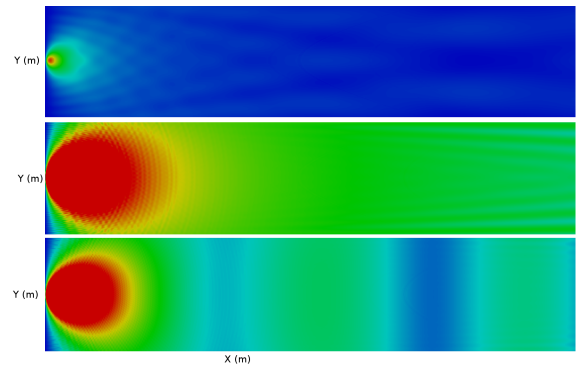


FIGURE 7 – Pression en unité arbitraire au niveau du sol ($x, y, z = 0$) pour une fréquence donnée. De haut en bas : $f = 10$ Hz, $f = 50$ Hz, $f = 100$ Hz.

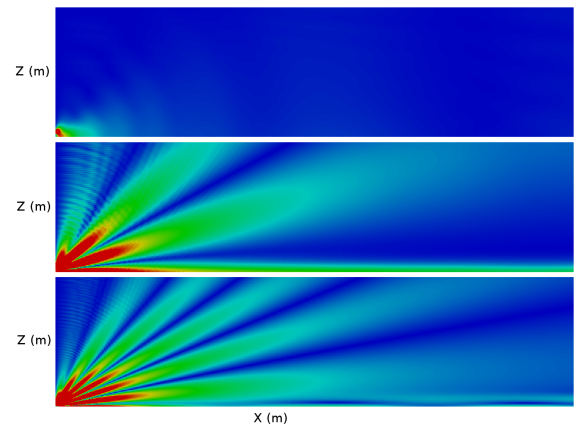


FIGURE 8 – Pression en unité arbitraire dans le plan vertical ($x, y = 0, z$) pour une fréquence donnée. De haut en bas : $f = 10$ Hz, $f = 50$ Hz, $f = 100$ Hz.

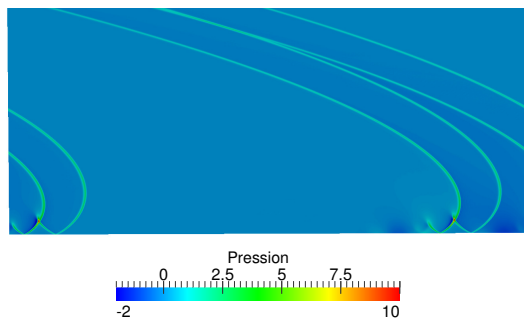


FIGURE 9 – Champ de pression dans le plan (τ, z) pour une propagation de $x = 508$ mètre.