



Etude analytique et expérimentale de champs ultrasonores dans des plaques collées à interfaces rugueuses

L.C. Foze Ndjomo^a, C. Potel^a, M. Bruneau^a, D. Leduc^b, M. Echcherif Elkettani^b et J.-L. Izbicki^b

^aLaboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine UMR CNRS 6613, Avenue Olivier Messiaen, 72085 Le Mans, France

^bLaboratoire Ondes et Milieux Complexes (LOMC), UMR CNRS 6294, 75 rue Bellot, CS 80540, 76058 Le Havre, France

catherine.potel@univ-lemans.fr

Le système étudié comporte deux plaques élastiques homogènes, de natures et d'épaisseurs différentes (ou non), qui adhèrent l'une à l'autre par une fine couche de colle reliant les faces rendues rugueuses pour améliorer l'adhésion. La caractérisation expérimentale de cette rugosité sera effectuée sur un banc de mesure (installé à cet effet au LOMC) par analyse de son influence sur la propagation d'ondes de cisaillement ultrasonores (ondes SH). Ce sont les résultats d'une modélisation analytique du comportement de ces ondes, développée au LAUM, qui sont présentés ici. Cette modélisation repose sur un formalisme intégral dans lequel le comportement de chacune des ondes considérées, dans chaque plaque, est exprimé sous forme de couplages modaux, couplages forts dus au comportement élastique de la couche de colle et couplages faibles résultant de la diffusion sur les surfaces rugueuses. Différents types de rugosités sont étudiés, notamment des rugosités périodiques de formes (profils, profondeurs, pentes) diverses, en situation d'accords de phase (ou non) entre l'onde ultrasonore et la répartition spatiale de rugosité, et des rugosités pseudo-aléatoire.

1 Introduction

L'objet de l'étude présentée ici est de décrire de façon analytique le comportement d'ondes SH guidées en vue de la caractérisation d'une structure à trois couches composée de deux plaques isotropes collées à l'aide d'une fine couche de colle (figure 1), les interfaces entre cette couche de colle et les deux plaques étant supposées rugueuses (sillons parallèles de profils quelconques). Plus précisément, les résultats de cette étude ont pour but de caractériser les rugosités étudiées et dans un premier temps d'interpréter les résultats expérimentaux qui seront obtenus sur un banc de mesure de fonctions de transferts (installé à cet effet au LOMC).

Cette étude analytique, issue de celle retenue pour l'étude de la diffusion d'ondes SH dans une plaque isotrope [1, 2, et les références contenues dans ces articles], repose sur un formalisme intégral dans lequel le comportement de chacune des ondes considérées, dans chaque plaque, est exprimé sous forme de couplages modaux, couplages forts dus au comportement élastique de la couche de colle et couplages faibles (perturbation) résultant de la diffusion sur les surfaces rugueuses (surfaces supposées de faible profondeur en regard de l'épaisseur des plaques et des longueurs d'ondes considérées). La perturbation apportée par les rugosités de surfaces aux champs d'ondes SH est traduite par des couplages internes à chaque plaque, doublés de modifications des couplages dus à la couche de colle.

Les cartographies des champs de déplacements et de contraintes, les amplitudes de l'onde incidente en fonction de la distance des bords de la rugosité et les coefficients de réflexion et de transmission en énergie sont présentés. Différents types de rugosités sont étudiés, notamment des rugosités périodiques de formes (profils, profondeurs, pentes) diverses, en situation d'accords de phase (ou non) entre l'onde ultrasonore et la répartition spatiale de rugosité, et des rugosités pseudo-aléatoire.

2 Le problème

La structure présentée en introduction est supposée infinie dans la direction y des sillons parallèles formant les rugosités et est délimitée par deux surfaces planes parallèles (figure 1). Une onde SH, polarisée parallèlement à l'axe y , se propage le long de l'axe x parallèle aux faces externes de la structure.

Un système de coordonnées (x_q, z_q) est attaché à chaque plaque $q=1,2$, chaque axe vertical z_q ayant son origine O_q au centre de la plaque et étant orienté vers la

surface rugueuse de la plaque considérée, les coordonnées des surfaces rugueuses étant notées $Z_q(x)$.

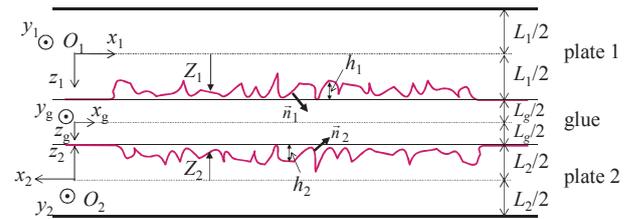


Figure 1: schéma de la structure 2D à surfaces supérieure et inférieure lisses, et à interfaces rugueuses entre chacune des plaques et la fine couche de colle.

Un système de coordonnées (x_q, z_q) est attaché à chaque plaque $q=1,2$, chaque axe vertical z_q ayant son origine O_q au centre de la plaque et étant orienté vers la surface rugueuse de la plaque considérée, les coordonnées des surfaces rugueuses étant notées $Z_q(x)$.

Chaque plaque est délimitée par deux surfaces parallèles de cotes $z_q = \pm L_q/2$ ($L_q > 0$), et par suite, notant la profondeur des rugosités $h_q(x) > 0$, les coordonnées des surfaces rugueuses peuvent être exprimées par $Z_q(x) = (L_q/2) - h_q(x)$. Les formes des surfaces rugueuses sont définies par leurs vecteurs unitaires sortants \bar{n}_q normaux aux surfaces des plaques :

$$\bar{n}_q = N_q^{-1} \left[\left(\partial_{x_q} h_q \right) \bar{e}_{x_q} + \bar{e}_{z_q} \right], \quad (1-a)$$

\bar{e}_{x_q} et \bar{e}_{z_q} désignant les vecteurs unités positifs suivant la direction des coordonnées x_q et z_q respectivement, et avec

$$N_q = \sqrt{1 + \left(\partial_{x_q} h_q \right)^2}, \quad (1-b)$$

L'épaisseur ℓ_g de la couche de colle entre les surfaces rugueuses s'exprime à partir de l'épaisseur en l'absence de rugosité par :

$$\begin{aligned} \ell_g(x) &= L_g + \sum_{i=1,2} h_i(x) h_i(x) \\ &= L_g + \sum_{i=1,2} \left[(L_i/2) - Z_i(x) \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Chaque plaque est caractérisée par sa densité ρ_q et son deuxième coefficient de Lamé μ_q , et la colle par ρ_g et μ_g respectivement.

$$\frac{L_1/\mu_1}{\left(k_{z_{1M}}^{(0)} L_1\right) \tan\left(k_{z_{1M}}^{(0)} L_1\right)} + \frac{L_2/\mu_2}{\left(k_{z_{2M}}^{(0)} L_2\right) \tan\left(k_{z_{2M}}^{(0)} L_2\right)} - \frac{L_g}{\mu_g} = 0. \quad (9)$$

4 Formulation intégrale du problème

4.1 Problème aux valeurs propres

Dans le cadre d'une formulation intégrale, la solution des équations (4) est exprimée sur la base d'un ensemble de fonctions propres orthogonales normalisées $\psi_{qMm}(z_q)$, pour chaque mode "M", associées à des valeurs propres $k_{z_{qMm}}$ ($m=1,2,\dots$), pour les deux guides d'onde de formes régulières (sans rugosité). Ces fonctions propres, solutions de l'équation de Helmholtz homogène, satisfont à des conditions de Neumann en $z_q = -L_q/2$, et aux conditions aux limites mixtes en $z_q = +L_q/2$

$$\left(\partial_{z_q} + \eta_{qM}\right) \psi_{qMm}(z_q) = 0, \quad z_q = L_q/2, \quad (10-a)$$

où le paramètre d'admittance η_{qM} , exprimé par

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta_{qM}} &= \frac{\mu_q}{\mu_g/L_g} - \frac{\mu_q/\mu_s}{k_{z_{sM}}^{(0)} \tan\left(k_{z_{sM}}^{(0)} L_s\right)} \\ &= \frac{1}{k_{z_{qM}}^{(0)} \tan\left(k_{z_{qM}}^{(0)} L_q\right)}, \end{aligned} \quad (10-b)$$

peut être considéré comme une expression approchée (sans rugosité) de la réaction d'une plaque sur l'autre à travers la couche de colle, pour un mode donné SH à une fréquence donnée. Les fonctions propres prennent alors la forme suivante :

$$\psi_{qMm}(z_q) = \alpha_{qMm}^{-1} \cos k_{z_{qMm}}(z_q + L_q/2), \quad (11-a)$$

les valeurs propres étant solution de l'équation

$$k_{z_{qMm}} \tan\left(k_{z_{qMm}} L_q\right) = \eta_{qM}, \quad (11-b)$$

le paramètre α_{qMm} étant fixé par la condition de normalisation.

La fonction de Green choisie dans la formulation intégrale présentée ci-dessous est développée sur cette base de fonctions propres :

$$G_{qM}(x, z_q; x', z'_q) = \sum_m g_{qMm}(x; x', z'_q) \psi_{qMm}(z_q), \quad (12-a)$$

où

$$g_{qMm}(x; x', z'_q) = \frac{\exp\left(-i k_{x_{qMm}} |x - x'|\right)}{2 i k_{x_{qMm}}} \psi_{qMm}(z'_q), \quad (12-b)$$

$$\text{avec} \quad k_{x_{qMm}} = \sqrt{k_q^2 - k_{z_{qMm}}^2}. \quad (12-c)$$

A noter que les valeurs $k_{z_{qM}}^{(0)}$ (équation 10.d) et $k_{z_{qMm}}$ (équation 11.b) sont réelles ou imaginaires.

4.2 Formulation intégrale

Etant donné le choix retenu pour la fonction de Green, et compte tenu de la loi de comportement pour la couche de colle (7), on démontre que la solution intégrale du problème (4) prend, dans le cadre de l'approximation de Born, dans chaque plaque, la forme suivante respectivement pour le mode incident $M=I$ et pour les autres modes $M=N \neq I$:

$$\begin{aligned} \hat{U}_{qM}(x, z_q) &= \hat{U}_{qI}^{(0)}(x, z_q) \delta_{MI} + \sum_{m=1}^{m_{\max}} \left[\hat{H}_{qMm}(x) \right. \\ &\quad \left. + \hat{E}_{qMm}(x) + \hat{B}_{qMm}(x) \right] \psi_{qMm}(z_q), \end{aligned} \quad (13-a)$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{H}_{qMm}(x) &= \int_0^\ell \left\{ g_{qMm}(x; x', Z'_q) \delta \left[\partial_{n'_q} \hat{U}_{qI}^{(0)}(x', Z'_q) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu_q}{\mu_g} \delta \left[\ell_g \partial_{z'_q} \hat{U}_{qI}^{(0)}(x', Z'_q) \right] \partial_{n'_q} g_{qMm}(x; x', Z'_q) \right\} dx', \end{aligned} \quad (13-b)$$

$$\begin{aligned} \hat{E}_{qMm}(x) &= - \int_0^\ell \left\{ \delta \left[\hat{U}_{sI}^{(0)}(x', Z'_s) \right] \right. \\ &\quad \left. \partial_{n'_q} g_{qMm}(x; x', Z'_q) \right\} dx', \end{aligned} \quad (13-c)$$

$$\hat{B}_{qMm}(x) = \int_{Z_q(x)}^{L_q/2} \left\{ \hat{U}_{qM}^{(0)}(x, z_q) \psi_{qMm}(z_q) \right\} dz_q, \quad (13-d)$$

où le facteur $\delta \left[f(\ell_g, Z_q; \partial_{n'_q}) \right]$ signifie $\left[f(\ell_g, Z_q; \partial_{n'_q}) - f(L_g, L_q/2; \partial_{z'_q}) \right]$ et où l'intégrande n'implique que la perturbation du champ incident (notée " $\delta[\cdot]$ ") :

$$\begin{aligned} &\delta \left[\partial_{n'_q} \hat{U}_{qI}^{(0)}(x', Z'_q) \right] \\ &= \partial_{n'_q} \hat{U}_{qI}^{(0)}(x', Z'_q) - \partial_{z'_q} \hat{U}_{qI}^{(0)}(x', L_q/2), \end{aligned} \quad (13-e)$$

$$\delta \left[\partial_{n'_q} \hat{U}_{qI}^{(0)}(x', Z'_q) \right] = \partial_{n'_q} \hat{U}_{qI}^{(0)}(x', Z'_q) - \partial_{z'_q} \hat{U}_{qI}^{(0)}(x', L_q/2). \quad (13-f)$$

Le premier terme du membre de droite de l'équation (13-a) représente l'effet du champ incident sur le mode SH "M" qui s'annule pour $M \neq I$, le second représente le couplage modal dans une plaque provenant de la diffusion due à la pente et à la profondeur de la rugosité sur le bord de cette plaque, le troisième représente la perturbation provenant du couplage d'une plaque sur l'autre à travers la couche de colle compte tenu des effets du profil des rugosités, et le quatrième prend en compte l'effet de la variation de l'épaisseur de la plaque considérée (en fonction de x) lié à la profondeur de la rugosité (couplage modal de volume). Enfin, la perturbation de déplacement total prend la forme suivante :

$$\hat{U}_q(x, z_q) - \hat{U}_{qI}^{(0)}(x, z_q) = \sum_{M=0}^{M_{\max}} \sum_{m=1}^{m_{\max}} \left\{ \hat{H}_{qMm}(x) + \hat{E}_{qMm}(x) + \hat{B}_{qMm}(x) \right\} \psi_{qMm}(z_q), \quad (14)$$

les valeurs maximales des nombres entiers M et m étant données par le nombre de modes dont les contributions ne sont pas négligeables (environ entre un et dix dans les exemples présentés ci-dessous).

5 Résultats et discussion

5.1 Les deux plaques collées en l'absence de rugosité

Dans les résultats présentés dans la suite, les plaques collées sont l'une en plexiglas et l'autre en aluminium. Les paramètres physiques considérés (second coefficient de Lamé μ_q , vitesse de propagation des ondes de cisaillement c_{Tq} , et masse volumique ρ_q) pour l'aluminium ($q=1$) et le plexiglas ($q=2$), et les épaisseurs des plaques sont donnés dans le tableau 1.

Les courbes de dispersion pour chaque plaque séparément (équation 9 avec $L_{s \neq q} = L_g = 0$, à savoir

$$k_{z_{qM}}^{(0)} \sin(k_{z_{qM}}^{(0)} L_q) = 0)$$

sont représentées sur la figure (2-a), et les courbes de dispersion pour les plaques collées (équation 9) avec $L_g \neq 0$ sont indiqués dans la figure (2-b), l'épaisseur L_1 de la plaque d'aluminium étant choisie arbitrairement épaisseur de référence. Le principal effet du couplage des ondes SH entre les plaques apparaît clairement.

Tableau 1: paramètres physiques et géométriques des plaques d'aluminium " $q=1$ ", de plexiglas " $q=2$ " et de la colle " g ".

	plaque $q=1$	plaque $q=2$	colle " g "
μ_q (G Pa)	26.003	2.4110	1
ρ_q (kg.m^{-3})	2705.8	1180.0	1300
c_{Tq} (m.s^{-1})	3100.0	1429.4	877
L_q (mm)	2	0.5	0.08

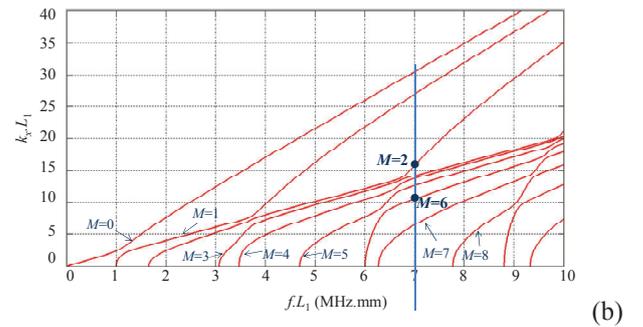
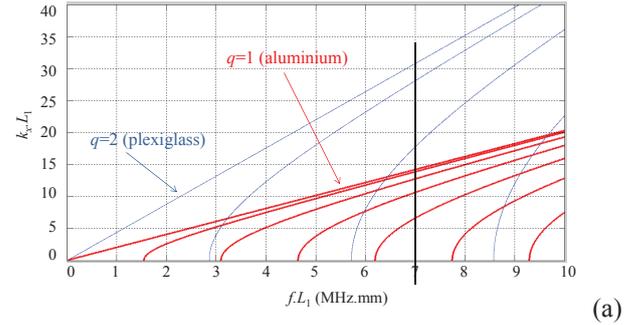


Figure 2 : courbes de dispersion pour chaque plaque séparément, plaque de plexiglas en bleu trait fin, plaque d'aluminium en rouge trait épais (a) et courbes de dispersion pour la structure à trois couches (les deux plaques et la couche de colle) (b)

Les figures (3.a) et (3.b) représentent les cartographies des parties réelles respectivement des champs de déplacement et de contrainte en fonction des coordonnées x et z , pour un point de fonctionnement de coordonnées $f.L_1 = 7.08$ MHz.mm et $k_{xM}^{(0)}.L_1 = 10.71$, (point noir du bas sur la figure 2-b, mode $M=6$). Le champ de déplacement linéaire et le champ de contrainte uniforme à l'intérieur de la colle ne sont pas présentés sur la cartographie. Pour le point de fonctionnement de coordonnées $f.L_1 = 7.08$ MHz.mm et $k_{xM}^{(0)}.L_1 = 16.36$

(point noir supérieur sur la figure 2-b, mode $M=2$), les cartographies des parties réelles des déplacements et des contraintes en fonction des coordonnées x et z sont présentées respectivement dans les figures (4.a) et (4.b). A noter que le point $M=6$ correspond à un couplage des deux plaques alors que le point $M=2$ est situé sur une portion de courbe où la vitesse de phase est celle du plexiglas. Comme prévu dans ce dernier cas, les ondes SH dans la plaque de plexiglas sont donc stationnaires dans la

direction z alors qu'elles sont évanescentes dans la même direction dans la plaque d'aluminium.

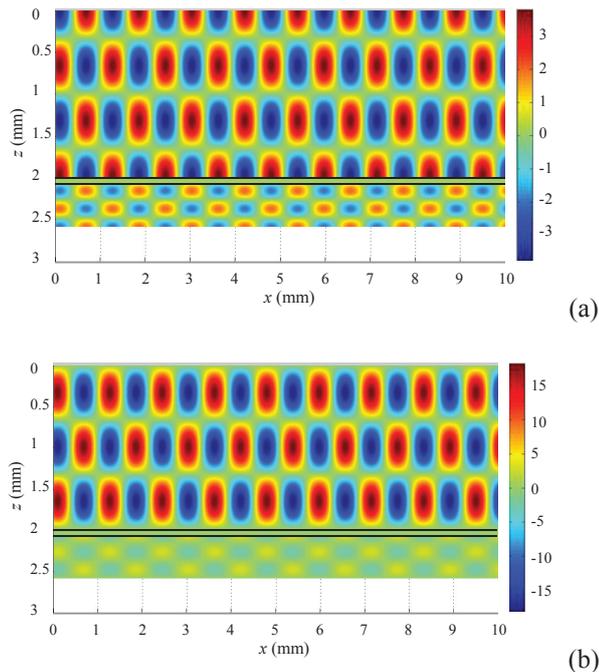


Figure 3 : cartographie de la partie réelle du déplacement (a) et du champ de contrainte (b) pour $f.L_1 = 7.08 \text{ MHz} \cdot \text{mm}$ et $k_{x_M}^{(0)}.L_1 = 10.71$ (mode $M = 6$)

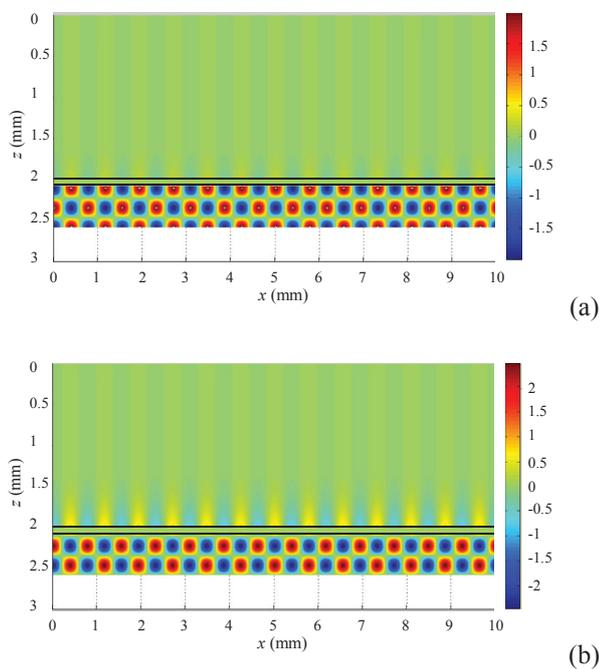


Figure 4 : cartographie de la partie réelle du déplacement (a) et du champ de contrainte (b) pour $f.L_1 = 7.08 \text{ MHz} \cdot \text{mm}$ et $k_{x_M}^{(0)}.L_1 = 17.36$ (mode $M = 2$)

Les résultats présentés ci-dessus peuvent être considérés comme des échantillons représentatifs des autres situations d'intérêt (les autres résultats calculés, non présentés ici, montrent un comportement similaire).

5.2 Les deux plaques collées en présence de rugosité

La structure du § 5.1 présente maintenant un profil de rugosité choisi ici périodique de période spatiale $\Lambda/L_1 = 0.1$ (dents de scie symétriques de hauteur $h/L_1 = 0.1$ sur chaque interface, voir figure 5) et de longueur $\ell = 10 \Lambda$ (ici $\Lambda = 0.2 \text{ mm}$, $h = 0.2 \text{ mm}$ et $\ell = 2 \text{ mm}$).

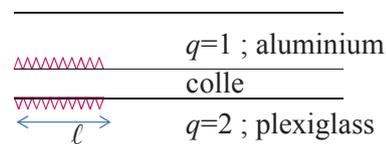


Figure 5 : Schéma de la structure

Les cartographies des figures 6 et 7 représentent la partie réelle de la perturbation, due à la rugosité, des champs de déplacement et de contrainte pour le couplage du mode incident avec lui-même, respectivement pour les cas $M = 6$ et $M = 2$ considérés au § 5.1. Le champ de déplacement $\left\{ \hat{U}_{q_M}(x, z_q) - \hat{U}_{q_I}^{(0)}(x, z_q) \delta_{MI} \right\}$ dans chaque plaque (perturbation) est celui donné par l'équation (13-a), avec $m_{\max} = 12$, et le champ de contrainte est donné par

$$\begin{aligned} & \hat{T}_{q_M}(x, z_q) - \hat{T}_{q_I}^{(0)}(x, z_q) \delta_{MI} \\ &= \mu_q \partial_z \left[\hat{U}_{q_M}(x, z_q) - \hat{U}_{q_I}^{(0)}(x, z_q) \delta_{MI} \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

La convergence sur le nombre de modes m à prendre en compte est très rapide dans tous les cas (3 à 12 modes suffisent). Plusieurs périodes spatiales peuvent être observées sur les cartographies des figures 6 et 7 : la période spatiale de la rugosité et les mêmes périodes suivant x et suivant z que celles déjà présentes respectivement sur les figures 3 et 4 (à noter également la présence d'une structure périodique liée à la longueur de la zone rugueuse). L'amplitude de l'onde diffusée rétro-propagée est relativement petite à l'entrée de la rugosité (l'onde incidente vient de la gauche). Comme attendu, les amplitudes des ondes perturbées sont au moins dix fois plus petites que celles de l'onde incidente.

Les cartographies de la figure 8 représentent la partie réelle de la perturbation, due à la rugosité, des champs de déplacement et de contrainte pour le couplage du mode incident $M = 6$ avec tous les modes générés à la fréquence considérée ($0 \leq M \leq 7$). Le champ de déplacement $\left\{ \hat{U}_{q_M}(x, z_q) - \hat{U}_{q_I}^{(0)}(x, z_q) \delta_{MI} \right\}$ dans chaque plaque est alors celui donné par l'équation (14), avec $m_{\max} = 12$, et le champ de contrainte est toujours donné par l'équation (15).

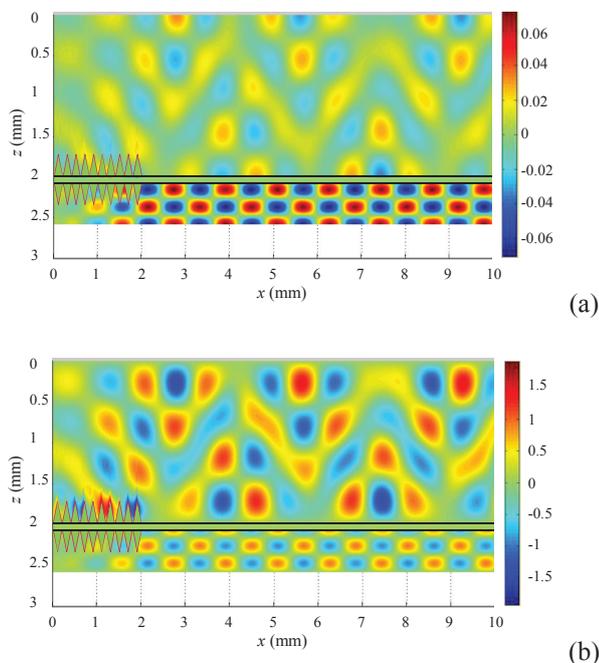


Figure 6 : cartographie de la partie réelle de la perturbation du déplacement (a) et du champ de contrainte (b) pour $f.L_1 = 7.08$ MHz.mm et $k_{x_M}^{(0)}.L_1 = 10.71$ (mode $M = 6$, auto-couplage). Ces figures doivent être comparées avec celles de la figure 3.

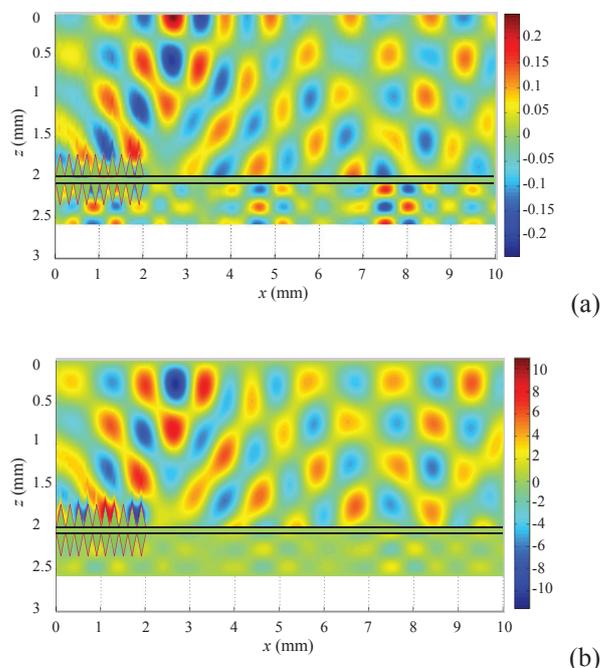


Figure 8 : cartographie de la partie réelle de la perturbation du déplacement (a) et du champ de contrainte (b) pour $f.L_1 = 7.08$ MHz.mm et $k_{x_M}^{(0)}.L_1 = 10.71$ (mode incident $M = 6$, somme sur tous les modes M , $0 \leq M \leq 7$). Ces figures doivent être comparées avec celles des figure 3 et 6.

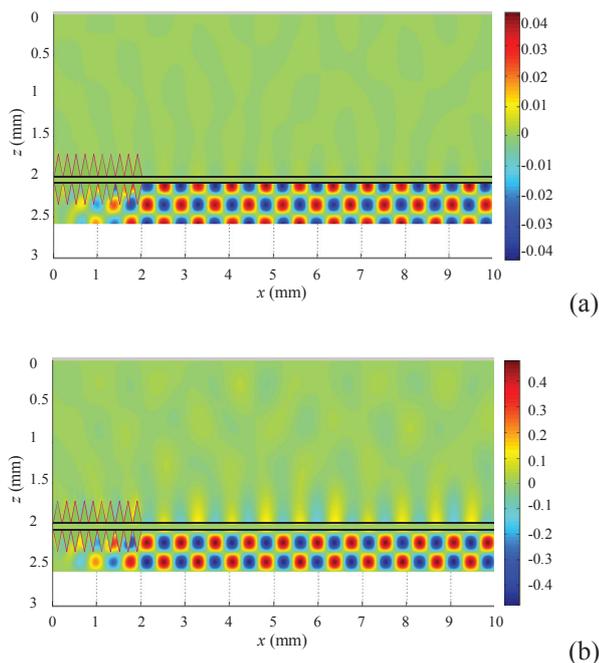


Figure 7 : cartographie de la partie réelle de la perturbation du déplacement (a) et du champ de contrainte (b) pour $f.L_1 = 7.08$ MHz.mm et $k_{x_M}^{(0)}.L_1 = 17.36$ (mode $M = 2$, auto-couplage). Ces figures doivent être comparées avec celles de la figure 4.

6 Conclusion

Le modèle analytique développé permet de décrire les effets de diffusion de la rugosité sur le comportement d'ondes SH pouvant se propager dans une structure constituée de deux plaques isotropes collées, en prenant en compte la forme des profils de rugosité et leurs profondeurs. Le modèle doit maintenant être exploité pour prendre en compte divers types de rugosités, les effets d'accord de phases entre modes et de périodicités de rugosité, et les résultats (coefficients de réflexion et de transmission en énergie sur les bords de la rugosité notamment) comparés à des résultats expérimentaux sur un banc mis en place à cet effet.

Références

- [1] T. Valier-Brasier, C. Potel, M. Bruneau, D. Leduc, B. Morvan, J.-L. Izicki, Coupling of shear acoustic waves by gratings: analytical and experimental analysis of spatial periodicity effects, *Acta Acustica*, **97**(5), 717-727 (2011).
- [2] T. Valier-Brasier, C. Potel, M. Bruneau, Shear acoustic waves polarized along the ridged surface of an isotropic solid plate; mode coupling effects due to the shape profile, *J. Appl. Phys.*, **108** (7), doi: 10.1063/1.3486020, (2010).