



Reconnaissance des sources acoustiques dans les composites à matrice organique : quel(s) critère(s) utiliser pour une classification non-supervisée des signaux ?

E. Ramasso, X. Gabrion, D.D. Doan, M. Kharrat, V. Placet et L. Boubakar
FEMTO-ST, 24 rue de l'Épitaphe, 25000 Besançon, France
emmanuel.ramasso@univ-fcomte.fr

Le traitement statistique et la classification non-supervisée des données acoustiques émises par les matériaux composites sous sollicitations mécaniques complexes demeurent un point dur, en particulier dans un environnement non contrôlé, dans lequel de nombreuses sources d'émissions acoustiques (frottements, vibrations mécaniques, interférences électro-magnétique...) peuvent s'ajouter à celles provenant de l'endommagement du matériau. La plupart des critères utilisés dans la littérature pour évaluer la segmentation des descripteurs des salves acoustiques sont basés sur la mesure des distances euclidiennes entre le centre de gravité du cluster et les descripteurs qui lui sont assignés. Dans ce cas, l'hypothèse implicite que les populations correspondant à chaque type d'endommagement présentent une forte compacité et une bonne séparation dans l'espace des descripteurs sélectionnés est formulée. La validité de cette hypothèse peut être questionnée, puisque la signature acoustique des différents modes d'endommagement évolue au cours de l'essai, en particulier en présence de discontinuités. Ce travail propose l'utilisation de nouveaux critères de segmentation, critères combinant des mesures statistiques de distance au sein des populations et des notions de séquences temporelles basées sur l'évolution de l'activité et de l'énergie cumulée au sein de chaque cluster au cours du temps.

1 Introduction

Malgré les nombreux efforts consentis ces dernières années par la communauté scientifique, les modèles disponibles à ce jour ne permettent pas de prédire de façon fiable la durée de vie de structures composites en usage dans leur environnement. Dans ce contexte de méconnaissance, et pour que l'intérêt porté à ces matériaux perdure, il semble intéressant de développer des méthodes de surveillance et des systèmes intégrés permettant le suivi de santé des structures. L'émission acoustique est apparue depuis quelques années comme une technique à fort potentiel puisqu'elle peut permettre de détecter, d'identifier et éventuellement de localiser spatialement les endommagements. Néanmoins le traitement statistique et la classification des données issues des systèmes d'acquisition acoustique demeurent un point dur, en particulier dans un environnement non contrôlé, dans lequel de nombreuses sources d'émissions acoustiques (frottements, vibrations mécaniques, interférences électro-magnétiques...) peuvent s'ajouter à celles provenant de l'endommagement du matériau.

La littérature fait état de résultats intéressants obtenus à l'aide d'outils de reconnaissance de forme non-supervisée basés sur des approches multivariées [1, 2, 3, 4]. Ces méthodes consistent à classer, à partir de critères de ressemblance, les salves transitoires détectées et enregistrées par des capteurs positionnés à la surface du matériau sollicité. La partition obtenue dans ce cas est directement dépendante de l'algorithme utilisé, des descripteurs des salves choisis, du nombre de classes de signaux dans la population et du critère d'évaluation des partitions [5, 6]. Une combinaison de ces critères peut également être utilisée pour évaluer la partition [4]. La plupart des critères utilisés dans la littérature sont basés sur la mesure des distances euclidiennes entre le centre de gravité du cluster et les descripteurs qui lui sont assignés et reposent sur l'hypothèse que les populations correspondant à chaque type d'endommagement présentent une forte compacité dans l'espace des descripteurs sélectionnés. La validité de cette hypothèse peut être questionnée, en particulier dans le cas d'essais pour lesquels les propriétés du matériau évoluent (apparition de discontinuités, changement de la capacité d'amortissement ...) et donc pour lesquels la signature acoustique des différents modes d'endommagement évolue. Sause et Horn [7] ont montré récemment à l'aide d'une étude basée sur des résultats expérimentaux et numériques que les ondes transitoires se propageant dans un matériau sont fortement distordues en présence de discontinuités.

Il en découle que les descripteurs des salves, y compris fréquentiels et énergétiques, sont largement affectés par la présence de discontinuités entre la source et le capteur. Même dans le cas de clusters à forte compacité, il paraît donc probable que leurs centres de gravité dans l'espace des descripteurs évoluent en cours de chargement et en fonction de la nature des endommagements. Le niveau de séparation des clusters dans l'espace des descripteurs dépend également étroitement de la configuration expérimentale, des sources acoustiques en présence. Dans un environnement non contrôlé un fort mélange des clusters peut être observé.

L'obtention de clusters bien séparés dans l'espace des descripteurs sélectionnés ne permet donc pas de présumer que chaque cluster correspond à une source acoustique différente. En plus des critères statistiques cités précédemment, certains auteurs proposent d'utiliser des observations expérimentales ou des simulations numériques pour à la fois valider la segmentation et également labelliser les groupes. En effet, une des difficultés dans ces approches non-supervisées réside dans l'identification des groupes ou clusters naturels obtenus. Il s'agit de relier chaque groupe résultant du partitionnement à sa source acoustique. Ce travail particulièrement ardu requiert de distinguer les sources d'émissions acoustiques provenant de l'environnement de celles découlant de l'endommagement du matériau. Pour les composites, il s'agit également de discriminer les émissions acoustiques résultant des différents modes d'endommagement. Les modes d'endommagement typiques sont : la fissuration matricielle, la décohérence fibre/matrice, le délaminage et la rupture de fibres.

Pour relier les classes identifiées lors du partitionnement aux types de sources acoustiques, Sause et al. [8, 9] ont proposé récemment d'utiliser des outils théoriques permettant de simuler la forme des émissions acoustiques résultant des différents modes d'endommagement. Leurs résultats montrent une bonne corrélation entre les formes d'ondes simulées et celles enregistrées expérimentalement pour les différents modes d'endommagement (rupture matricielle, interfaciale et rupture de fibres.). Cette voie, bien que prometteuse, pose néanmoins des difficultés tant au niveau de la modélisation des sources que des modes de propagation, en particulier dans le cas des matériaux composites. Les modèles simulant les sources acoustiques provoquées par les différents mécanismes sont peu nombreux et reposent sur des hypothèses relativement fortes. Si la littérature est davantage étoffée en ce qui concerne les calculs de propagation des ondes, qu'ils soient analytiques ou numériques, leur mise en œuvre dans le cas de matériaux

fortement anisotropes et incluant des discontinuités apparaît particulièrement difficile. Les phénomènes de réflexion aux limites, interfaces et discontinuités induites par l'endommagement, l'anisotropie de l'atténuation rendent les simulations particulièrement difficiles. Les groupes obtenus par une méthode de partitionnement non-supervisées peuvent également être reliés à leur type de source acoustique en utilisant des observations expérimentales *in-situ* ou *post-mortem* [3], recourant à des méthodes optiques, thermographiques ou tomographiques. La revue de la littérature fait donc apparaître clairement qu'une reconnaissance non-supervisée et robuste des sources acoustiques dans les composites requièrent une validation à la fois de (i) la partition de la population et également de (ii) la labellisation des classes.

Dans ce travail, nous proposons d'intégrer des notions de séquence temporelle pour participer à la construction d'un critère de validation de la partition et de la labellisation [10, 11]. Effectivement, pour la plupart des matériaux composites, la rupture d'une pièce composite résulte d'endommagements progressifs et cumulés au cours du temps ; les seuils d'apparition, les cinétiques d'évolution et la contribution de chacun des modes d'endommagement à la ruine de la structure dépendant directement de la nature du composite, et du mode de sollicitation.

2 Matériels

2.1 Matériau et configuration expérimentale

Les données acoustiques sont enregistrées lors d'essais de traction quasi-statique réalisés sur des anneaux entaillés en composite unidirectionnel à matrice organique thermoplastique thermostable renforcée par des fibres continues de carbone. Les essais sont réalisés conformément à la norme ASTM D2290, avec des entailles au-dessous et en dessous des demi-cylindres. La configuration d'essai ainsi que la position des capteurs piézo-électriques sont détaillées en Fig. 1(a) et 1(b).

Une chaîne d'émission acoustique commercialisée par Physical Acoustics Coproration (PAC) et équipée de quatre capteurs large bande $\mu - 80$ (filtre 20 – 1000 kHz) pré-amplifiés à 20 dB est utilisée pour cette étude. La technique des fenêtres temporelles glissantes est utilisée pour l'extraction des salves. Les paramètres d'acquisition sont les suivants : seuil de détection = 40 dB, PDT = 60 μ s, HDT = 120 μ s, HLT = 300 μ s. Dans cette configuration expérimentale, à savoir un matériau à faible atténuation sous forme d'anneau avec un renfort orienté dans la direction circonférentielle, formant un guide d'ondes, une onde de surface peut passer plusieurs fois au niveau d'une même position circonférentielle avant d'être complètement atténuée. Compte tenu de la vitesse de propagation des ondes dans la direction des fibres et du diamètre des anneaux, le temps de passage entre deux passages est d'environ 120 μ s. Cette configuration rend particulièrement difficile la séparation des ondes directes des ondes réfléchies et des échos.

La fréquence d'acquisition est de 5 MS/sec. Les descripteurs des salves sont identifiés à l'aide du logiciel AE Win. Le matériau testé est très émissif et la rupture particulièrement énergétique. Pour limiter l'endommagement des capteurs induit par la propagation

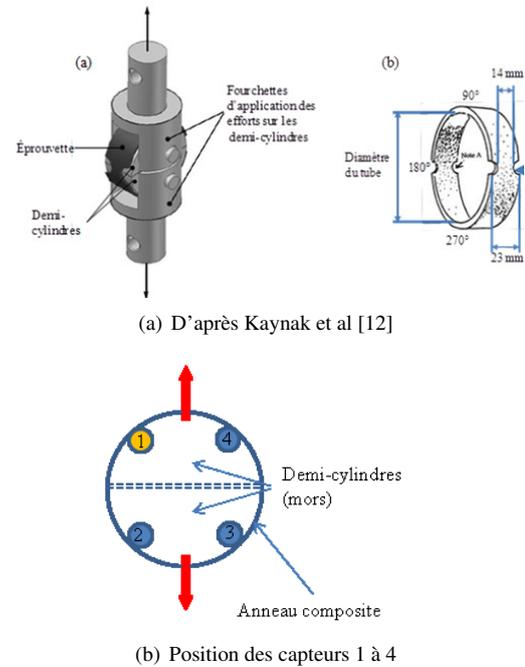


FIGURE 1 – Représentation schématique de la configuration d'essais et la position des capteurs

d'ondes à très forte amplitude au moment de la rupture, et comme proposé par Plöckl et al. [13], les capteurs sont positionnés sur les mors d'ancrage (demi-cylindres) et non pas directement sur le composite. Là encore, cette configuration rend le travail d'identification et de localisation des sources acoustiques particulièrement complexe puisque les ondes enregistrées sont distordues par le passage des interfaces entre capteurs, mors et composite. Le couplage entre les capteurs et les mors ainsi que l'atténuation a été effectué en réalisant une série de cassés de mines.

Les anneaux testés sont également équipés de jauges de déformations positionnées à différentes positions circonférentielles et dans les différentes directions matérielles. Une caméra infrarouge est également utilisée pour détecter les zones d'échauffement pendant l'essai. Enfin une caméra optique permet également d'observer la zone utile de l'anneau (partie entaillée).

2.2 Techniques de reconnaissance de forme non-supervisées

Nous avons adopté et comparé les approches proposées dans [4] (méthode 1) et [11] (méthode 2) pour le partitionnement non supervisé des émissions acoustiques sur l'essai considéré.

2.2.1 Méthode 1 [4]

Le partitionnement est estimé par l'algorithme des K-moyennes [14]. Le nombre de groupes (K, ou clusters) et les descripteurs sont déterminés en évaluant la qualité du partitionnement estimée par la combinaison de plusieurs indicateurs communément utilisés dans la littérature. Toutes les combinaisons de N descripteurs fréquentiels (parmi un sous-ensemble de descripteurs fréquentiels présélectionné) sont évaluées. Un des sous-ensembles les plus pertinents d'après [4] est composé des descripteurs suivants : les

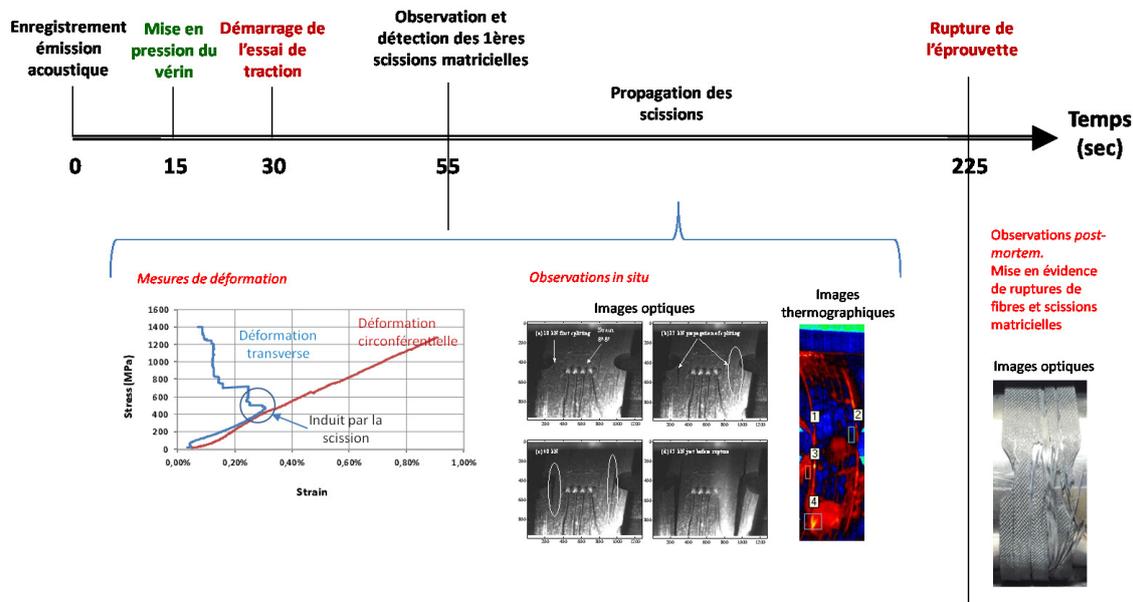


FIGURE 2 – Déroulement temporel de l'essai. Identification de modes d'endommagement par méthodes d'observation *in-situ* et *post-mortem*.

fréquences partielles 1 et 2 (PP1, PP2 en %), la fréquence de réverbération (R-FREQ), la fréquence du pic (du module de la FFT, notée PF, en kHz) et la fréquence du pic pondérée (WPF, en kHz).

2.2.2 Méthode 2 [11]

Les énergies PAC et absolue (aJ), l'amplitude (dB) et la fréquence de réverbération (R-FREQ) sont utilisés comme descripteurs. L'algorithme de Gustafson et Kessel (GK) [15] est utilisé avec un nombre de clusters estimé par l'indicateur de Davies et Bouldin en prenant soin d'adapter la mesure de distance à celle de l'algorithme GK (distance de "Mahalanobis modifiée"). Une première estimation de la partition est obtenue par l'algorithme des K-moyennes, puis les données acoustiques dans chaque groupe sont utilisées pour initialiser les centres et la matrice de covariance de l'algorithme GK.

3 Résultats et discussions

3.1 Séquence d'endommagement identifiée par observations expérimentales

La figure 2 présente l'évolution typique des essais réalisés au cours du temps. Un chargement monotone a été appliqué jusqu'à rupture des éprouvettes. Les observations post-mortem des faciès de rupture ont mis en évidence 3 modes d'endommagement principaux : (1) la microfissuration matricielle, (2) la scission matricielle (fissuration macroscopique ortho-radiale de la matrice qui se propage le long du renfort fibreux jusqu'à une séparation de l'anneau) et (3) la rupture de fibres et torons de fibres. Les observations optiques et thermographiques réalisées *in-situ* ont permis de détecter le seuil d'initiation des scissions ortho-radiales (environ 10 kN) et de suivre leur propagation au cours du chargement (Cf. Fig 2). A partir du seuil d'initiation, ces fissures se propagent progressivement dans la direction circonférentielle et ce jusqu'à la ruine de

l'éprouvette. Les images thermographiques infrarouge ont également permis de mettre en évidence la rupture de fibres se trouvant sur le chemin de ces macrofissures (et présentant vraisemblablement un défaut d'orientation par rapport à la direction circonférentielle), quelques secondes avant la rupture complète.

Pour l'essai considéré, un scénario permettant de lister les sources acoustiques potentielles (provenant de modes d'endommagement et de l'environnement) ainsi que leur temps d'apparition a pu être établi (Fig. 3). 1) Avant $t = 30s$ (et le début du chargement) : la matériau n'est pas sollicité mécaniquement, l'activité acoustique potentiellement enregistré entre $t = 0s$ et $t = 30s$ provient donc de sources extérieures (fonctionnement des organes hydrauliques, bruits électromagnétiques des instruments métrologiques environnant l'éprouvette). 2) A $t = 15s$, un saut dans l'activité acoustique en provenance du système hydraulique pourrait être observé du fait de la mise en pression du vérin permettant de solliciter mécaniquement l'éprouvette. 3) A partir de $t = 30s$ et jusqu'à la rupture complète de l'éprouvette : frottement entre l'anneau composite et les demi-cylindres pouvant constituer une source acoustique. Il est à noter que les conditions de frottement évoluent largement au cours de l'essai (pression de contact, vitesse de déplacement local). 4) A partir de $t = 55s$ et jusqu'à la rupture complète de l'éprouvette : apparition et propagation des scissions ortho-radiales. Avant la rupture de l'éprouvette : ruptures de fibres.

L'observation des faciès de rupture met également en évidence des microfissures dans la matrice. Celles-ci ne peuvent pas être mises en évidence *in-situ* à l'aide des techniques d'observation utilisées. Aucune information sur leurs temps d'apparition et leurs évolutions au cours du temps n'a pu être collectée.

3.2 Partitionnement des données acoustiques

Les figures 4 (méthode 1), 5 (descripteurs identiques mais utilisation de l'algorithme GK au lieu des K-moyennes) et 6

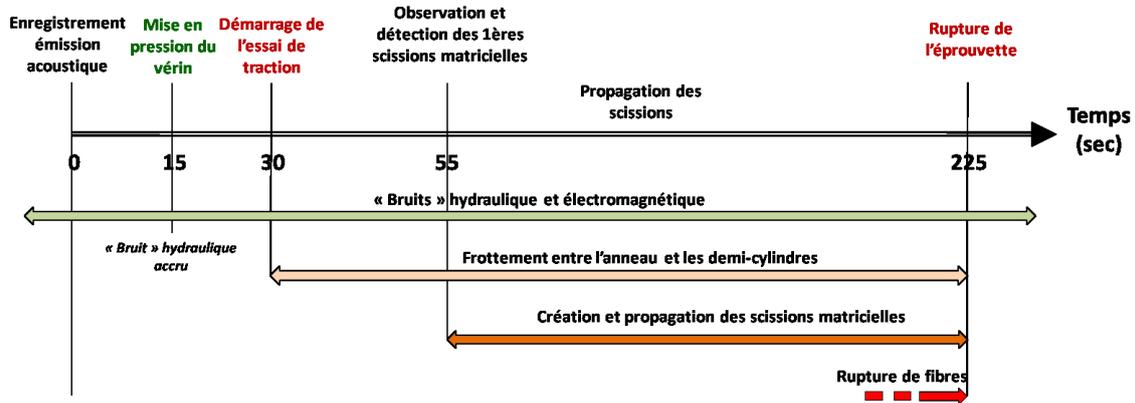
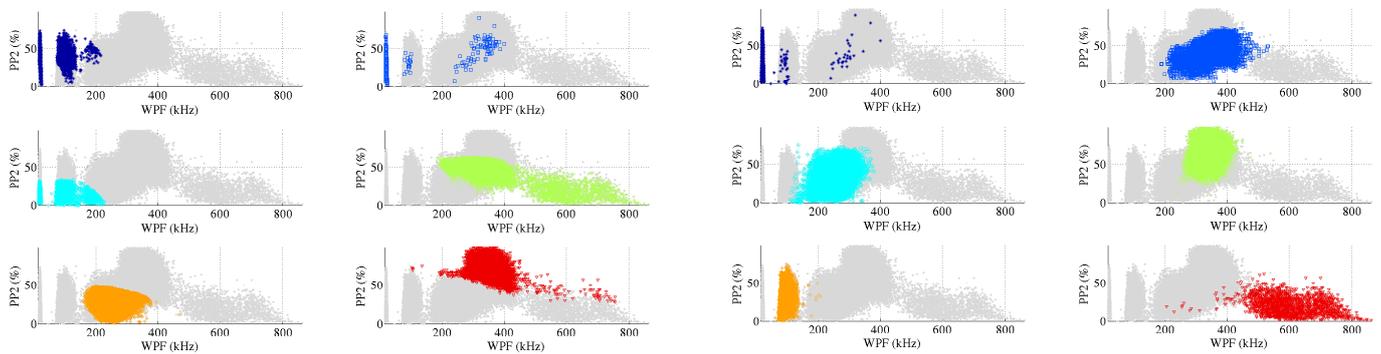
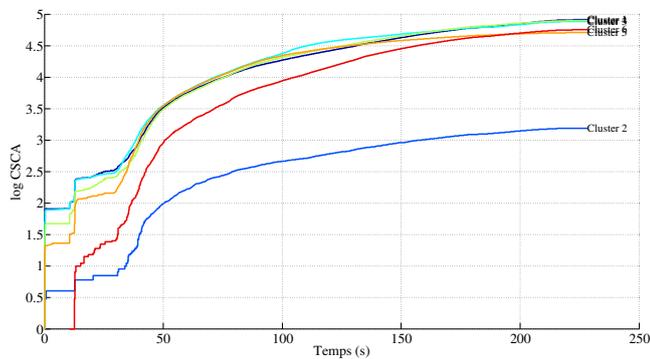


FIGURE 3 – Identification des sources d’émission acoustique potentielles et de leur séquence d’apparition.

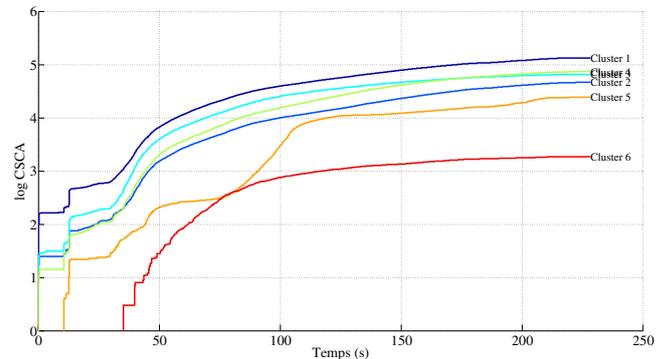


(a) Représentation des clusters dans l’espace des descripteurs PP2/WPF

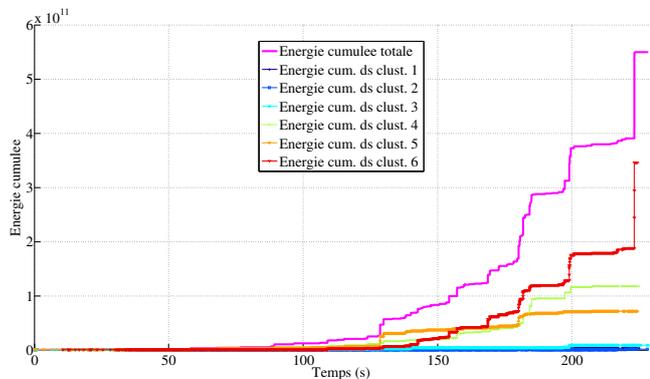
(a) Représentation des clusters dans l’espace des descripteurs PP2/WPF



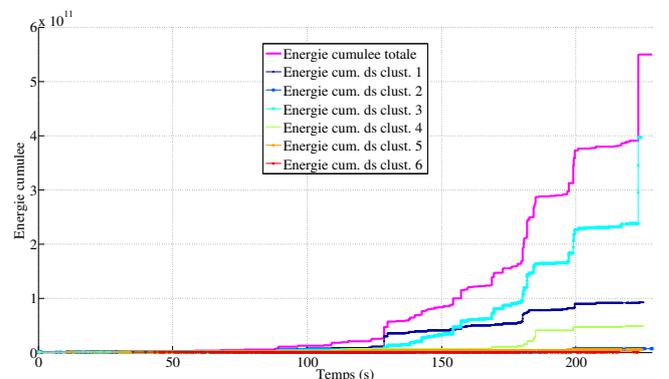
(b) Evolution de l’activité (log(CSCA)) pour chacun des clusters en fonction du temps



(b) Evolution de l’activité (log(CSCA)) pour chacun des clusters en fonction du temps



(c) Evolution de l’énergie cumulée totale et partielle dans chaque cluster en fonction du temps



(c) Evolution de l’énergie cumulée totale et partielle dans chaque cluster en fonction du temps

FIGURE 4 – Partition obtenue avec la méthode (K-moyennes et descripteurs fréquentiels).

FIGURE 5 – Partition obtenue avec l’algorithme GK basé sur les mêmes descripteurs que la méthode 1.

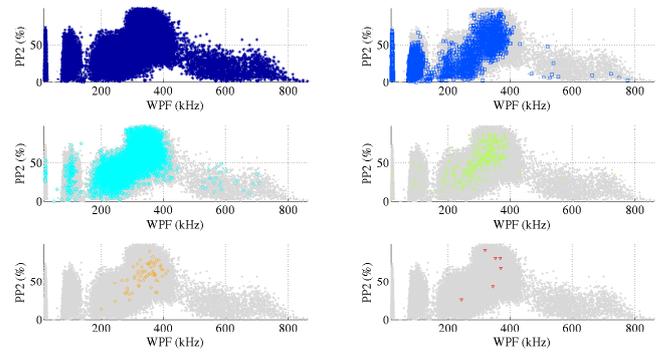
(méthode 2), proposent une synthèse des résultats obtenus avec les deux méthodes de partition.

La segmentation en groupes “naturels” obtenue par la méthode 1 (Fig. 4(a)) montre un découpage en bande de fréquences, mais la séparation obtenue entre les clusters est moins franche que pour certains résultats publiés dans la littérature [2, 4]. Il est néanmoins important de noter que notre essai est réalisé dans des conditions relativement complexes (anneau jouant le rôle de guide d’ondes, capteurs déportés sur les mors, présence de frottements entre l’anneau et les mors) et donc pour lequel les sources acoustiques et les modes de propagation sont nombreux. Ce découpage en fréquences semble plus naturel en utilisant l’algorithme GK (Fig. 5(a)), qui génère des groupes plus distincts. En particulier, le paquet de points au delà de 450 kHz est bien dissocié des autres.

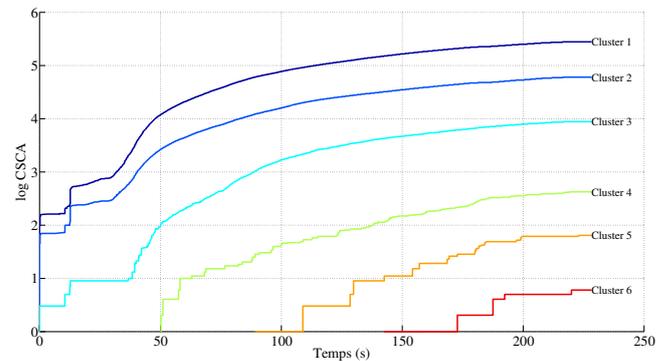
Les figures 4(b), 5(b) et 6(b) permettent de localiser le temps d’apparition de chacun des clusters et de suivre l’évolution temporelle de leur activité. La mesure est le logarithme de la cumulée de l’apparition de chaque cluster au cours du temps (log CSCA) [11].

Avec la méthode 1 (Fig. 4), les clusters démarrent très tôt (dès la mise en route de l’enregistrement). Ces résultats ne semblent pas en accord avec le scénario établi préalablement (Fig. 2, 3). L’activité au sein de chacun des clusters est par ailleurs sensiblement équivalente alors que nous pourrions nous attendre à ce que l’activité liée à certaines sources acoustiques (fissuration matricielle, frottement) soit plus importante que pour d’autres (rupture de fibres). Il apparaît également que les clusters 4, 5 et 6 correspondent à des sources particulièrement énergétiques, puisque l’énergie totale cumulée provient de la contribution sensiblement équivalente des salves classifiées dans ces groupes. Bien que la séquence obtenue avec l’algorithme GK (avec les mêmes descripteurs fréquentiels) montre aussi des clusters démarrant trop tôt d’après le scénario établi (Fig. 5), les clusters 5 et 6 montrent des évolutions intéressantes. Le cluster 5 est caractérisé par une évolution plus atypique mettant en évidence deux cascades d’événements : la première lors du début du chargement ($t > 30$), correspondant d’ailleurs au démarrage du cluster 6, et la deuxième autour de $t = 70$ s, soit 15s après l’observation des premières scissions.

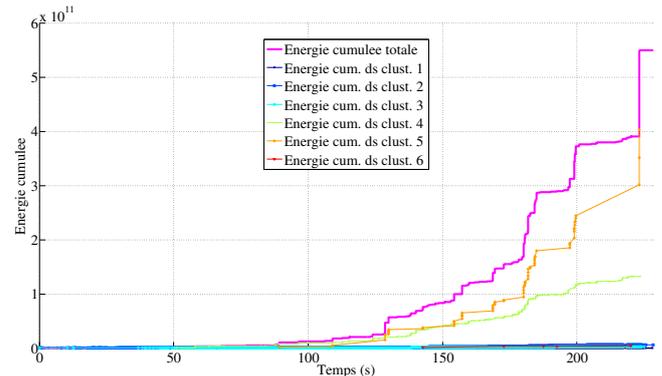
Pour la méthode 2 (Fig. 6), l’apparition des clusters est davantage répartie au cours du temps (Fig. 5(b)). Les clusters 1 et 2 apparaissent dès la mise en route. Des pics d’activité sont observés pour ces deux clusters à $t = 15$ s et à $t = 30$ s, c’est-à-dire à la mise en pression du vérin et au lancement de l’essai. Par la suite, leur activité est relativement régulière au cours du temps jusqu’à la rupture de l’éprouvette. La source acoustique associée à ces 2 clusters est en toute vraisemblance liée à l’environnement de l’essai (bruit hydraulique et électromagnétique), et ne peut être attribuée à un mode d’endommagement. Les pics d’activités enregistrés à $t = 15$ s et $t = 30$ pourraient correspondre à la réponse des servovannes. Le cluster 3 démarre assez tôt mais son activité débute après $t = 15$ s. Aucune activité n’est détectée dans ce cluster entre cet instant et $t = 45$ s. A partir de cet instant, l’activité reprend et reste quasiment constante jusqu’à la rupture de l’éprouvette. La source associée à ce cluster pourrait être le frottement entre l’anneau et les demi-cylindres. Lors de la mise en pression du vérin, un déplacement relatif des demi-cylindres par



(a) Représentation des clusters dans l’espace des descripteurs PP2/WPF



(b) Evolution de l’activité (log(CSCA)) pour chacun des clusters en fonction du temps



(c) Evolution de l’énergie cumulée totale et partielle dans chaque cluster en fonction du temps

FIGURE 6 – Partition obtenue avec la méthode 2.

rapport à l’anneau composite est observé. Ces déplacements permettent de mettre en tension l’anneau. L’activité reprend par la suite lorsque le chargement augmente.

Le temps d’apparition du cluster 4 coïncide avec le temps de détection des premières scissions ortho-radiales, et son activité perdure jusqu’à la rupture de l’éprouvette. Le cluster 5 apparaît vers $t = 90$ s lorsque les scissions se propagent inéluctablement sur la circonférence. Ce cluster ainsi que le cluster 6 sont caractérisés par des sauts d’activité correspondant à des saccades d’événements acoustiques. De plus, l’énergie des salves appartenant au cluster 5 est particulièrement élevée (Fig. 6(c)). Par conséquent, la source des salves classifiées dans ces clusters pourrait être liée aux ruptures de fibres.

Le tableau 1 synthétise les clusters et leur labellisation effectuée à partir des observations expérimentales.

Cluster	Source acoustique
1	Hydraulique ou électromagnétique
2	Hydraulique ou électromagnétique
3	Frottement
4	Scission matricielle
5	Ruptures de fibres

TABLEAU 1 – Clusters et interprétation.

4 Conclusion

La validation de la segmentation non-supervisée des données acoustiques enregistrées lors d'essais mécaniques sur des matériaux composites constitue un point primordial pour accéder à une interprétation fiable des résultats. Cette étude montre clairement, à partir de l'utilisation de deux méthodes de classification non-supervisées appliquées à un même jeu de données, que les critères basés sur la mesure des distances euclidiennes entre le centre de gravité du cluster et les descripteurs qui lui sont assignés, ne peuvent représenter à eux seuls un moyen fiable de valider la segmentation. Cette étude montre que des critères basés sur des notions de séquences temporelles, alliant activité et énergie cumulée, constituent une alternative intéressante aux méthodes traditionnelles.

Remerciements

Ce travail a bénéficié d'une aide de l'Etat gérée par l'ANR au titre du PIA portant la référence ANR-11-LABX-0001-01 : Labex ACTION).

Références

- [1] A. A. Anastassopoulos and T. P. Philippidis. Clustering methodology for the evaluation of acoustic emission from composites. *NDT and E. International*, 30 :108–108, 1997.
- [2] R. Gutkin, C. J. Green, S. Vangrattanachai, S. T. Pinho, P. Robinson, and P.T. Curtis. On acoustic emission for failure investigation in CFRP : Pattern recognition and peak frequency analyses. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 25 :1393–1407, 2011.
- [3] S. Momon, N. Godin, P. Reynaud, M. R'Mili, and G. Fantozzi. Unsupervised and supervised classification of AE data collected during fatigue test on CMC at high temperature. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 43 :254–260, 2012.
- [4] M. G. R. Sause, A. Gribov, A. R. Unwin, and S. Horn. Pattern recognition approach to identify natural clusters of acoustic emission signals. *Pattern Recognition Letters*, 33 :17–23, 2012.
- [5] W.M. Rand. Objective criteria for the evaluation of clustering methods. *Journal of the American Statistical Association*, 66(336) :846–850, 1971.
- [6] J.C. Bezdek and N.R. Pal. Some new indexes of cluster validity. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B : Cybernetics*, 28(3) :301–315, Jun 1998.
- [7] M.G.R. Sause and S. Horn. Influence of internal discontinuities on ultrasonic signal propagation in carbon fiber reinforced plastics. In *30th European Conference on Acoustic Emission Testing and 7th International Conference on Acoustic Emission*, 2012.
- [8] M.G.R. Sause and S. Horn. Simulation of acoustic emission in planar carbon fiber reinforced plastic specimens. *J Nondestruct Eval*, 29 :123–142, 2010.
- [9] M.G.R. Sause, M.A. Hamstadt, and S. Horn. Finite element modeling of lamb wave propagation in anisotropic hybrid materials. *Composites Part B : Engineering*, 53 :249–257, 2013.
- [10] E. Ramasso, V. Placet, R. Gouriveau, L. Boubakar, and N. Zerhouni. Health assessment of composite structures in unconstrained environments using partially supervised pattern recognition tools. In *Annual Conference of the Prognostics and Health Management Society*, Minneapolis, USA, Sept. 2012.
- [11] V. Placet, E. Ramasso, L. Boubakar, and N. Zerhouni. Online segmentation of acoustic emission data streams for detection of damages in composites structures in unconstrained environments. In *International Conference on Structural Safety and Reliability*, Columbia Univ., NY, USA, June 2013.
- [12] C. Kaynak, E. Salim Erdiller, L. Parnas, and F. Senel. Use of split-disk tests for the process parameters of filament wound epoxy composite tubes. *Polymer Testing*, 24 :648–655, 2005.
- [13] M. Plöckl, M.G.R. Sause, J. Scharringhausen, and S. Horn. Failure analysis of nol-ring specimens by acoustic emission. In *30th European Conference on Acoustic Emission Testing and 7th International Conference on Acoustic Emission*, university of Granada, 2012.
- [14] Hans-Hermann Bock. Clustering methods : A history of k-means algorithms. In *Selected Contributions in Data Analysis and Classification*, pages 161–172. Springer Berlin Heidelberg, 2007.
- [15] E. Gustafson and W.C. Kessel. Fuzzy clustering with a fuzzy covariance matrix. In *IEEE Conf. on Decision and Control*, 1978.